

Mathematical Subject Classification: 11N25, 11S40  
УДК 511

**Я. А. Воробьев**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ Z-ФУНКЦИИ ГЕККЕ ПОЛЯ  
ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ**

**Воробйов Я. А. Щільнісна теорема для Геке Z-функції поля гаусових чисел.** В даній роботі нами вивчено розподілення нулів дзета-функції Геке в критичній області над полем гаусових чисел  $\mathbb{Q}(i)$ . Ми отримуємо нетривіальну оцінку для зета-суми рівномірно для  $m$  і  $Im(s)$ . Така оцінка є аналогом оцінки зета-суми для дзета-функції Римана. Така оцінка грає важливу роль в побудові асимптотичної оцінки для числа нулів дзета-функції Геке. Використовуючи модифіковану лему Хала і метод Хиз-Брауна, ми виводимо аналог щільнісної теореми для  $Z_m(s)$  третього степеня при умові  $m \neq 0$ .

**Ключові слова:** дзета-функція, число нулів, поліном Дирихле.

**Воробьев Я. А. Плотностная теорема для Z-функции Гекке поля гауссовых чисел.** В данной работе изучено распределение нулей дзета-функции Гекке в критической области над полем гауссовых чисел  $\mathbb{Q}(i)$ . Мы получаем нетривиальную оценку для зета-суммы равномерно для  $m$  и  $Im(s)$ . Данная оценка является аналогом оценки зета-суммы для дзета-функции Римана. Такая оценка играет важную роль в построении асимптотической оценки для числа нулей дзета-функции Гекке. Используя модифицированную лемму Хала и метод Хиз-Брауна, мы выводим аналог плотностной теоремы для  $Z_m(s)$  в третьей степени при условии  $m \neq 0$ .

**Ключевые слова:** дзета-функция, число нулей, полином Дирихле.

**Vorobyov Y. A. Dense theorem for Hecke Z-function over the field of Gaussian numbers.** In this work the distribution of zeros in critical strip of the Hecke zeta-function over the Gaussian field  $\mathbb{Q}(i)$  is studied. We obtain a non-trivial estimation for zeta-sum of  $Z_m(s)$  uniformly in  $m$  and  $Im(s)$ , which is analogue of the estimation of zeta-sum for the Riemann zeta-function. Such estimations play a critical role in construction of the asymptotic estimation for the number of zeros of the Hecke zeta-function. Using the modified Halas lemma and the method of Heath-Brown we deduce an analogue of the density theorem for  $Z_m(s)$  with an exponent three if  $m$  is not equal to 0.

**Key words:** zeta-function, number of zeros, Dirichlet polynomial.

**ВВЕДЕНИЕ.** Знаменитая формула Римана-Монгольдта о числе нетривіальних нулей дзета-функції Римана  $\zeta(s)$  приводить к плотностной гипотезе

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}, \tag{1}$$

где  $N(\sigma, T)$  означает число нулей  $\zeta(s)$  в прямоугольнике

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \Re s \leq 1, \quad |\Im s| \tag{2}$$

$\varepsilon > 0$  — произвольно малое число, а постоянная в символе "«" зависит только от  $\varepsilon$ .

Эта гипотеза ещё не доказана, но наилучшим приближением к ней есть результат М. Huxley[3]:

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{12}{5}(1-\sigma)} \log^9 T. \quad (3)$$

Аналогичную плотностную гипотезу можно рассматривать и для других дзета-подобных функций в конечных расширениях поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ .

Так, из работы D. R. Heath-Brown [2] следует существование абсолютной постоянной  $C$ , зависящей от дискриминанта квадратичного поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d$  — бесквадратное целое число, такое, что для любого  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(\sigma, T) \ll T^{\left(\frac{8}{3}+\varepsilon\right)(1-\sigma)} (\log T)^C. \quad (4)$$

В настоящей работе мы получаем асимптотическую формулу для количества нулей  $N_m(\sigma, T)$  в прямоугольнике (2) дзета-функции Гекке  $Z_m(s)$ , определяемой для  $\Re s > 1$  равенством

$$Z_m(s) := \sum_{\omega} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-s}.$$

Для функции  $Z_m(s)$  справедливо функциональное уравнение

$$\pi^{-s} \Gamma(2|m| + s) Z_m(s) = \pi^{-(1-s)} \Gamma(2|m| + 1 - s) Z_m(1 - s).$$

В основе наших рассуждений лежат аналоги результатов Н. Montgomery, М. Jutila, D. R. Heath-Brown и др. по изучению функции  $N(\sigma, T)$  для дзета-функции Римана.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

$s = \sigma + it$	комплексное число, $\Re s = \sigma$ , $\Im s = t$ ;
$\mathbb{Z}[i]$	кольцо целых гауссовых чисел $a + bi$ , $a, b \in \mathbb{Z}$ , $i^2 = -1$ ;
$\mathbb{Q}(i)$	поле гауссовых чисел $a + bi$ , $a, b \in \mathbb{Q}$ ;
$N(\omega)$	норма гауссового числа $\omega$ , $N(\omega) = a^2 + b^2$ ;
$\arg \omega$	аргумент гауссового числа $\omega$ ;
$\exp(z)$	$= e^z$ ;
" $\ll$ ", " $O$ "	символ Виноградова " $\ll$ " и символ Ландау " $O$ " эквивалентны;
$\sum_{\omega}$	означает, что суммирование идет по целым гауссовым $\omega$ , отличным от нуля;
$\Gamma(z)$	обозначает $\Gamma$ -функцию Эйлера.

### ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Сначала приведём некоторые леммы, используемые в дальнейшем.

**Лемма 1.** Пусть  $s = \sigma + it$ ,  $-1 \leq \sigma \leq 2$ ;  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ . Тогда для  $X = \frac{1}{2\pi} (t^2 + (4m + \sigma)^2)$  имеем

$$Z_m(s) \ll \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega) \leq X}} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-s} + O(\log(t^2 + m^2)).$$

Это утверждения следует из приближённого функционального уравнения для  $Z_m(s)$  (например, в форме Лаврика [9]).

Рассмотрим полином Дирихле над  $\mathbb{Z}[i]$

$$S_m(s) = \sum_{N < N(\omega) \leq 2N} a(\omega) e^{4mi \arg \omega}.$$

Пусть  $\mathfrak{J}$  — конечное множество комплексных чисел  $s = \sigma + it$ , для которых  $\sigma \geq \sigma_0$ ,  $T_0 \leq t \leq T + T_0$ , причём, если  $s, s'$  — различные элементы из  $\mathfrak{J}$ , то для соответствующих значений их мнимых частей имеем  $|t - t'| \geq 1$ . Тогда из [10] (теорема 7.5) находим

$$\min_{s \in \mathfrak{J}} |S(s)|^2 \ll \mathfrak{J}^{-1} (T + N) \left( \sum_{N < N(\omega) \leq 2N} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right) (\log N + 1).$$

Нам необходима также следующая лемма.

**Лемма 2.** Пусть  $\mu$  и  $\nu$  — положительные постоянные, такие, что

$$|Z_m(\sigma + it)| \ll (t^2 + m^2)^\mu (\log(t^2 + m^2))^\nu$$

равномерно по  $\sigma \geq \theta \geq 0$ . Тогда в принятых выше обозначениях имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}| &\ll N \left( \sum_{N < N(\omega) \leq 2N} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right) \cdot \left( \min_{s \in \mathfrak{J}} |S(s)|^2 \right)^{-1} + \\ &+ N^{\frac{\theta}{\mu}} T \left( \sum_{N < N(\omega) \leq 2N} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right)^{1 + \frac{1}{\mu}} \times \\ &\times \left( \min_{s \in \mathfrak{J}} |S(s)|^2 \right)^{-1 - \frac{1}{\mu}} (\log(T^2 + m^2))^{\frac{\nu}{\mu}}. \end{aligned}$$

Эта лемма есть аналог модифицированной леммы Halász–Montgomery, доказанной Heath–Brown [2]. Её доказательство проходит по схеме доказательства Heath–Brown.

Из функционального уравнения для  $Z_m(s)$  и принципа Фрагмена–Линделёфа следует оценка

$$Z_m(s) \ll (t^2 + m^2)^{\frac{1}{2} - \sigma} \log(t^2 + m^2), \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad |\Im s| = |t| \geq 2. \quad (5)$$

Кроме того, для  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $|\Im s| \geq 2$ , имеем (см. Р. Кауфман [6])

$$Z_m(s) \ll (t^2 + m^2)^{\frac{1}{6}} (\log(t^2 + m^2))^4. \quad (6)$$

Поэтому в лемме 2 при  $\theta = 0$  можно считать  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $\nu = 1$ , а при  $\theta = \frac{1}{2}$  имеем  $\mu = \frac{1}{6}$ ,  $\nu = 4$ .

**Лемма 3.** *Существует абсолютная постоянная  $C > 0$  такая, что для  $2 \leq N \leq t^2 + m^2$*

$$\left| \sum_{N(\omega) \leq N} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} \right| \ll N \exp \left( -C \frac{\log^3 N}{(\log(t^2 + m^2))^2} \right).$$

**Доказательство.** Рассматриваемая сумма есть аналог дзетовой суммы, которая играет ключевую роль в построении оценок дзета-функции Римана в критической полосе. (см. А. А. Карацуба [6], А. Івић [4]). Мы будем следовать схеме доказательства из книги [5]. Из равенства

$$\log \omega = \log |\omega| + i \arg \omega$$

выводим

$$e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} = \exp(i(4m\Im \log \omega - 2t\Re \log \omega)).$$

Займемся оценкой суммы

$$S(N_1) = \sum_{\substack{N_1 < N(\omega) \leq 2N_1 \leq N \\ 0 \leq \arg \omega \leq \frac{\pi}{2}}} \exp(i(4m\Im \log \omega - 2t\Re \log \omega)). \quad (7)$$

Ясно, что

$$\left| \sum_{N(\omega) \leq N} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} \right| \ll \max_{2 \leq N_1 \leq \frac{1}{2}N} |S(N_1)| \cdot \log N. \quad (8)$$

В комплексной плоскости рассмотрим решётку  $L$  с длиной фундаментальной области  $\ell$  ( $\ell > 1$ , более точно, значение  $\ell$  определим позднее) так, что центры её ячеек расположены в точках с целыми координатами, а оси параллельны координатным осям. Пусть  $L(N_1)$  обозначает наименьшую часть решётки  $L$ , содержащую область

$$G(N_1) : \left\{ N_1 < N(\omega) \leq 2N_1, 0 \leq \arg \omega \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

и пусть  $C(N_1)$  — множество центров решётки, лежащих в  $G(N_1)$ . Обозначим через  $\Delta$  — фундаментальную область с центром в  $(0, 0)$ .

Мы имеем

$$\begin{aligned} S(N_1) &= \sum_{z \in C(N_1)} \sum_{\omega \in \Delta} \exp(i(4m\Im \log(z + \omega) - 2t\Re \log(z + \omega))) + \\ &+ O\left(eN_1^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Равенство (9) не зависит от выбора расположения центров решётки  $L$ . Различных расположений центров решётки может быть не более  $([\ell])^2$ . Проведём усреднения по всем положениям решётки  $L$ . Имеем

$$S(N_1) \ll \frac{1}{\ell^2} \sum_{0 \neq z \in C(N_1)} \left| \sum_{\omega \in \Delta} \exp \left( i \left( 4m \Im \log \left( 1 + \frac{\omega}{z} \right) - 2t \Re \left( 1 + \frac{\omega}{z} \right) \right) \right) \right| + \quad (10)$$

$$+ O \left( \ell N_1^{\frac{1}{2}} \right).$$

Положим

$$\ell = 2 \left[ N_1^{\frac{5}{11}} \right] + \frac{1}{2}, \quad r = \left[ \frac{11 \log(t^2 + m^2)}{\log N_1} \right] + 1,$$

$$F_r(x + iy) = \sum_{q=1}^r \frac{(-1)^{r-1}}{q} \left( \frac{x + iy}{z} \right)^q, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{Q}(i).$$

Тогда для  $\omega = x + iy$ ,  $|x| \leq \ell$ ,  $|y| \leq \ell$  мы имеем

$$\exp \left( i \left( 4m \Im \log \left( 1 + \frac{\omega}{z} \right) - 2t \Re \log \left( 1 + \frac{\omega}{z} \right) \right) \right) =$$

$$= \exp \left( i \left( 4m \Im F_r(x + iy) - 2t \Re F_r(x + iy) \right) \right) + O \left( (t^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\ell}{|z|} \right)^{r+1} \right).$$

Теперь для чётного  $r$  простые вычисления дают

$$4m \Im F_r(x + iy) - 2t \Re F_r(x + iy) =$$

$$= \frac{(-1)^r t}{r|z|^r} x^r + \left( \frac{(-1)^{r-1} 2t}{(r-1)|z|^{r-1}} + \frac{(-1)^{r-1} 4m}{|z|^r} y \right) x^{r-1} +$$

$$+ \left( \frac{(-1)^{r-1} 2t}{3!(r-2)|z|^{r-2}} + \frac{(-1)^{r-2} 4m}{|z|^{r-1}} y + \frac{(-1)^{r-1} 2t(r-1)}{2!|z|^r} y^2 \right) x^{r-2} + \dots$$

$$\dots + \left( \frac{-2t}{|z|} - \frac{4m}{|z|^2} y + \dots + \frac{(-1)^{r-1} 4m}{|z|^r} y^{r-1} \right) x.$$

Для нечётного  $r$  следует заменить  $x$  на  $y$ ,  $t$  на  $2m$ .

Обозначим

$$W = \sum_{|x| \leq \ell} \sum_{|y| \leq \ell} \exp \left( i \left( 4m \Im F_r(x + iy) - 2t \Re F_r(x + iy) \right) \right).$$

И теперь, повторяя рассуждения из книги А. А. Карацубы ([5], 58–59 и 66–69), мы получим утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 4.** В области  $\frac{1}{2} \leq \Re s \leq 1$ ,  $|t| \geq 2$  справедлива оценка

$$Z_m(s) \ll (t^2 + m^2)^{a(1-\sigma)^{3/2}} \log^4(t^2 + m^2), \quad (11)$$

где  $a > 1$  — абсолютная постоянная.

**Доказательство.** Пусть  $m = 0$ . В силу равенства

$$Z_0(s) = 4\zeta(s)L(s, \chi_4),$$

где  $L(s, \chi_4)$  —  $L$ -функция Дирихле с неглавным характером по модулю 4, утверждение леммы следует из аналогичных оценок для  $\zeta(s)$  и  $L(s, \chi_4)$  (см. [4], 160–161).

Пусть  $m \neq 0$ . Для  $N < X = \frac{1}{2\pi}(t^2 + (4m + \sigma)^2) \log(t^2 + m^2)$ , в силу леммы 1, можем записать

$$\begin{aligned} Z_m(s) &= \sum_{N(\omega) \leq N} e^{4mi \arg \omega} N^{-\sigma-it}(\omega) + \\ &+ \sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} N^{-\sigma-it}(\omega) + O(1) \ll N^{1-\sigma} \sum_{N(\omega) \leq N} \frac{1}{N(\omega)} + \\ &+ \sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} (N(\omega))^{-\sigma-it} + O(1) = \\ &= \sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} (N(\omega))^{-\sigma-it} + O(N^{1-\sigma} \log N). \end{aligned} \tag{12}$$

Положим  $N = \left[ \exp \left( (\log(t^2 + m^2))^{2/3} \right) \right]$ .

Тогда

$$N^{1-\sigma} \leq e^{(1-\sigma) \log N} \leq e^{2(q-\sigma)(\log(t^2+m^2))^{2/3}},$$

если  $(1-\sigma)(\log(t^2 + m^2))^{2/3} \leq 1$ .

Если же  $(1-\sigma)(\log(t^2 + m^2))^{2/3} > 1$ , то

$$\begin{aligned} (1-\sigma)(\log(t^2 + m^2))^2 &\leq \left( (1-\sigma)(\log(t^2 + m^2))^{2/3} \right)^{3/2} = \\ &= (1-\sigma)^{3/2} \log(t^2 + m^2), \end{aligned}$$

а потому

$$N^{1-\sigma} \leq (t^2 + m^2)^{a(1-\sigma)^{3/2}}, \text{ с некоторой постоянной } a \geq 2. \tag{13}$$

Далее, для выбранного значения  $N$  применение частичного суммирования даёт для некоторого  $\delta_0 > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} (N(\omega))^{-\sigma-it} &\ll X^{-\sigma} \left| \sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} (N(\omega))^{-it} \right| + \\ &+ \int_N^X u^{-\sigma-1} \left| \sum_{N < N(\omega) \leq u} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} \right| du. \end{aligned}$$

В силу леммы 4 получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} \ll \\ & \ll N \exp\left(-C \frac{\log^3 N}{(\log(t^2+m^2))^2}\right) + X \exp\left(-C \frac{\log^3 X}{(\log(t^2+m^2))^2}\right). \end{aligned}$$

А потому найдётся  $\sigma_0 > 0$  такое, что

$$\sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} \ll (t^2 + m^2)^{1-\sigma_0} \ll X^{1-\sigma_0}.$$

Поэтому, снова используя лемму 4, получаем с некоторым  $0 < C_1 \leq C$

$$\begin{aligned} & \sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-\sigma-it} \ll \\ & \ll X^{1-\sigma-\sigma_0} + \int_N^X u^{-\sigma} \exp\left(-C_1 \frac{\log^3 u}{(\log(t^2+m^2))^2}\right) du \ll \\ & \ll (t^2 + m^2)^{(1-\sigma)^{3/2}} + \int_{\log N}^{\log X} \exp\left(v(1-\sigma) - C_1 \frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right) dv, \end{aligned}$$

если  $1 - \sigma_1 \leq \sigma \leq 1$  для некоторого малого фиксированного  $\sigma_1 > 0$ .

Из выражения подынтегральной функции последнего интеграла видно, что найдётся  $0 < \varepsilon < C_1$  такое, что

$$\begin{aligned} & \int_{\log N}^{\log X} \exp\left(v(1-\sigma) - C_1 \frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right) dv \leq \\ & \leq \max_{\log N < v \leq \log X} \left\{ \exp\left(v(1-\sigma) - (C_1 - \varepsilon) \frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \int_{\log N}^{\log X} \exp\left(-\frac{\varepsilon v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right) dv \right\}. \end{aligned}$$

В интеграле сделаем замену  $v^3 = u(\log(t^2 + m^2))^2$ , что даёт

$$\begin{aligned} \int_{\log N}^{\log X} & \ll \int_{\frac{\log^3 N}{(\log(t^2+m^2))^2}}^{\frac{\log^3 X}{(\log(t^2+m^2))^2}} e^{-u} u^{-2/3} (\log(t^2 + m^2))^{2/3} du \ll \\ & \ll (\log(t^2 + m^2))^{2/3} \int_0^\infty e^{-u} u^{-2/3} du \ll (\log(t^2 + m^2))^{2/3}. \end{aligned}$$

Кроме того, функция  $f(v) = v(1-\sigma) - (C_1 - \varepsilon) \frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}$  не возрастает при  $v \geq \left(\frac{1-\sigma}{C_1 - \varepsilon}\right)^{1/3} \log(t^2 + m^2)$ . Поэтому мы получаем для  $\log N \geq (\log(t^2 + m^2))^{2/3}$

следующую оценку

$$\sum_{N < N(\omega) \leq X} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-\sigma-it} \ll (t^2 + m^2)^{a_1(1-\sigma)^{3/2}} (\log(t^2 + m^2))^{b_1}, \quad (14)$$

где  $a_1 > 0$ ,  $0 < b_1 \leq 4$ .

Теперь из (12)-(14) следует утверждение леммы.  $\square$

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** В этой секции мы приводим наши основные результаты, связанные с оценкой функции

$$N_m(\sigma, T) := \left\{ \rho \in \mathbb{C} : Z_m(\rho) = 0, \Re \rho \geq \sigma \geq \frac{1}{2}, |\Im \rho| \leq T \right\}.$$

Мы будем существенно использовать неравенства (5) и (6) предыдущей секции.

Рассмотрим пару Меллина  $e^{-x}$  и  $\Gamma(z)$ :

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \quad (x > 0).$$

Тогда, полагая  $x = \frac{N(\omega)}{Y}$ ,  $Y > 1$ , получим

$$e^{-\frac{N(\omega)}{Y}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z) Y^z N(\omega)^{-z} dz. \quad (15)$$

Рассмотрим полином Дирихле

$$M_X(s) = \sum_{N(\omega) \leq X} a(\omega) N(\omega)^{-s},$$

где  $s = \sigma + it$ ,  $\log^2 T \leq |t| \leq T$ ,  $1 \ll X \leq Y \ll T^C$  ( $C > 4$  — константа), а коэффициенты  $a_m(\omega)$  являются коэффициентами разложения  $Z_m^{-1}(s)$  в ряд Дирихле:

$$Z_m(s) = \sum_{\omega} \frac{a_m(\omega)}{N(\omega)^s}, \quad \Re s > 1.$$

Очевидно, что

$$a_m(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } N(\omega) = 1; \\ (-1)^k e^{4mi \arg \omega}, & \text{если } \omega = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i \text{ — различные неассоции-} \\ & \text{рованные простые гауссовы числа;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$



В дальнейшем  $X$  и  $Y$  рассматриваются как параметры, зависящие от  $T$ , и каждый раз выбираются отдельно.

Ясно, что  $Z_m(s)M_X(s) \rightarrow 1$ , когда  $X \rightarrow \infty$  при  $\sigma > 1$ .

Мы имеем, в силу (15),

$$Z_m(s)M_X(s) = \sum_{\omega} C_m(\omega) e^{-\frac{N(\omega)}{T}} N(\omega)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s, z) dz, \quad (16)$$

где  $f(s, z) = Z_m(s+z)M_X(s+z)Y^z\Gamma(z)$ .

Учитывая выбор  $M_X(s)$ , мы можем записать правую часть (16) в виде

$$4e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega) > X}} C_m(\omega) e^{-\frac{N(\omega)}{T}} N(\omega)^{-s}.$$

Для вычисления интеграла в (16) перенесем контур интегрирования на прямую  $\Re z = \frac{1}{2} - \sigma < 0$ , при этом мы пройдем через два полюса подынтегральной функции в точках  $z = 1 - s$  и  $z = 0$ , если  $m = 0$ , и единственный простой полюс в точке  $z = 0$ , если  $m \neq 0$ .

Мы можем считать, что  $m \neq 0$ , так как случай  $m = 0$  можно рассматривать отдельно, используя известные результаты о распределении нулей  $\zeta(s)$  и  $L(s, \chi_4)$ .

Поэтому из (16) находим

$$\begin{aligned} 4e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega) > X}} C_m(\omega) e^{-\frac{N(\omega)}{T}} N(\omega)^{-s} &= \\ &= Z_m(s)M_X(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s, z) dz, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $a := a(s) = \frac{1}{2} - \Re s = \frac{1}{2} - \sigma$ .

Пусть  $\rho$  — нуль  $Z_m(s)$  в полосе  $\frac{1}{2} \leq \Re \rho \leq 1$ . Тогда первое слагаемое в правой части (17) исчезает.

Поскольку  $|e^{-\frac{1}{Y}} - 1| \leq \frac{1}{4}$  для  $Y > 5$ , то (17) показывает, что хотя бы одно из выражений

$$\sum_{\substack{\omega \\ N(\omega) > X}} C_m(\omega) e^{-\frac{N(\omega)}{T}}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s, z) dz \quad (18)$$

по абсолютному значению  $\geq 1$ .

Обозначим через  $N_1$ ,  $N_2$  количества различных корней  $\rho = \beta + i\gamma$ ,  $\beta \geq \sigma$ ,  $|\gamma| \leq T$ ,  $Z$ -функции Гекке  $Z_m(s)$ , для которых  $I$ -е или  $II$ -е выражение в (18) не меньше 1 по абсолютному значению. Из леммы 12 работы J. P. Kubilius [8] видно, что кратность таких корней не превосходит  $O(\log(T|m|))$ , поэтому заключаем

$$N_m(\sigma, T) \ll (N_1 + N_2) \log(T|m|). \quad (19)$$

Возьмём некоторое  $\eta$ ,  $0 < \eta < 1$  (позднее его уточним) и положим  $X = T^\eta \leq Y \leq T^4$ .

Из оценок  $Z_m(s)$  (см. формулы (5) и (6)), тривиальной оценки  $M_X(s) \ll X$  и формулы Стирлинга для  $\Gamma(z)$ , видно, что  $f(\rho, z)$  допускает оценку

$$|f(\rho, z)| \leq e^{-\frac{1}{2}|\gamma|},$$

если  $\Re z = a(\rho)$ ,  $|\Im z| > A \log T$ , где  $A$  — достаточно большое.

Поэтому существует  $B = B(\eta)$  такое, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a \pm iB \log T}^{a \pm i\infty} f(\rho, z) dz \right| \leq \frac{1}{16}. \quad (20)$$

Далее, поскольку при  $|z| > \frac{1}{\log T}$ ,  $\Re z = a(\rho)$ , выполняется неравенство  $|\Gamma(z)| \ll \ll \log T$  (это следует из формулы Стирлинга для  $\Gamma(z)$ ), то мы имеем

$$|M_X(\rho + z)Y^z \Gamma(z)| \ll XY^{a(\rho)} \log T. \quad (21)$$

Поэтому, если первое выражение в (18) не меньше 1, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma - B \log T}^{\gamma + B \log T} \left| Z_m \left( \frac{1}{2} + iu \right) \right| du \gg \left( XY^{a(\rho)} \log T \right)^{-1}, \quad (22)$$

если только  $a(\sigma) < -\frac{1}{\log T}$ . В противном случае мы имеем тривиально  $N(\sigma, T) \ll \ll T^{2(1-\sigma)} \log T$  (см. лемму 6).

Теперь применение неравенства Коши-Шварца даёт

$$\int_{\gamma - A \log T}^{\gamma + A \log T} \left| Z_m \left( \frac{1}{2} + iu \right) \right|^2 du \gg X^{-2} Y^{-2a(\rho)} (\log T)^{-2}.$$

А потому суммирование по всем корням  $\rho$ , дающим вклад в  $N_2$ , приводит к оценке

$$\int_{T - A \log T}^{T + A \log T} \left| Z_m \left( \frac{1}{2} + iu \right) \right|^2 \cdot n(u) du \gg N_2 X^{-2} Y^{-2a(\sigma)} (\log T)^{-2}, \quad (23)$$

здесь  $n(u)$  означает количество тех нулей  $\rho$ , для которых  $|\gamma - u| \leq A \log T$ , что в силу леммы 6 даёт  $n(u) \ll (\log T)^2$ .

Далее, в силу оценки (см. [1], лемма 10)

$$\int_{-T}^T \left| Z_m \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \ll (T + |m|) \log^b(T + |m|), \quad (b\text{-константа}), \quad (24)$$

левая сторона (23) есть  $O(T + |m|)(\log(T + |m|))^{b+2}$ .

Сравнение оценок (23) и (24) приводит к неравенству

$$N_2 \ll X^2 Y^{2a(\sigma)} (T + |m|) (\log(T + |m|))^{b+5} \ll (T + |m|)^{1+2\eta} Y^{2(\frac{1}{2}-\sigma)}. \quad (25)$$

Вывод оценки величины  $N_1$  полностью совпадает с рассуждениями из работы [2], что в принятых нами обозначениях даёт

$$N_1 \ll (T + |m| + N_0)N_0^{1-2\sigma}(\log(T^2 + m^2))^{C_1} \quad (26)$$

и

$$N_1 \ll (N_0^{2-2\sigma} + T|m|N_0^{3-4\sigma})(\log(T^2 + m^2))^{C_1}, \quad (27)$$

где параметр  $N_0$  удовлетворяет неравенству

$$Y^\alpha \ll N_0 \ll Y^\alpha(\log(T^2 + m^2)), \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1.$$

Если теперь учесть, что  $1 - 2\sigma < 0$ , то из (25), (26) получаем

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{1+3\eta}Y^{1-2\sigma} + \left(Y^{1-2\sigma} + T|m|Y^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) \log(TM)^{C_1+1}. \quad (28)$$

Возьмём  $Y = (T|m|)^{2(3-2\sigma)^{-1}}$ .

Тогда после простых упрощений получим для  $\eta = \frac{1}{15}$ ,  $\sigma \geq \frac{2}{3}$

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{4(1-\sigma)}{3-2\sigma}}, \quad \frac{2}{3} \leq \sigma \leq \frac{5}{6}.$$

Полагая  $Y = (T|m|)^{(\alpha(2\sigma-1))^{-1}}$ ,  $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$ , находим

$$(TM)^{1+3\eta}Y^{1-2\sigma} = (TM)^{1+3\eta-\frac{1}{\alpha}} \ll T^\varepsilon.$$

Поэтому из (25), (27) получаем для  $\frac{5}{6} \leq \sigma \leq 1 + \varepsilon$

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{2(1-\sigma)}{2\sigma-1}}(\log T|m|)^C.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** В прямоугольнике  $\frac{2}{3} \leq \sigma \leq 1 - \varepsilon$  для  $m \neq 0$  справедливы оценки

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{4(1-\sigma)}{3-2\sigma}}(\log(T|m|))^C \quad \frac{2}{3} \leq \sigma \leq \frac{5}{6}.$$

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{2(1-\sigma)}{2\sigma-1}}(\log(T|m|))^C \quad \frac{5}{6} < \sigma \leq 1 - \varepsilon,$$

с постоянной в символе " $\ll$ ", зависящей только от  $\varepsilon$ .

В случае  $m = 0$  оценки для  $N_0(\sigma, T)$  совпадают с оценками функции  $N(\sigma, T)$  для дзета-функции Римана (см., например, [4]).

Теперь займемся оценкой  $N_m(\sigma, T)$  вблизи прямой  $\sigma = 1$ .

**Теорема 2.** Для  $1 - \varepsilon \leq \sigma < 1$  имеет место оценка

$$N_m(\sigma, T) \ll_\varepsilon (T^2 + m^2)^{b(1-\sigma)^{3/2}} \log^C T^2 + m^2,$$

где  $b$  и  $C$  — абсолютные положительные постоянные.

Это утверждение есть следствие аналога оценки Монтгомери ([10], теорема 12.3)

$$N_m(\sigma, T) \ll \left( \max_{\substack{\alpha \leq \sigma \leq 1 \\ |s-1| \geq 1 \\ |\Im s| \leq T}} |Z_m(s)| \log^{C_1} T \right)^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-a)}{(2\sigma-1-a)(\sigma-a)}} \log^{C_2}(T + |m|),$$

где  $C_1, C_2$  — положительные постоянные,  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ ,  $\sigma \geq \frac{1+a}{2}$ , и оценки  $Z_m(s)$  из леммы 5.

Следствием теоремы 1 и 2 является "плотностная" теорема

**Теорема 3.** *Существует абсолютная постоянная  $C \geq 1$  такая, что при  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $T \geq 2$*

$$N_m(\sigma, T) \ll \begin{cases} (T|m|)^{3(1-\sigma)} \log^C(T|m|), & |m| \geq 1, \\ T^{\frac{12}{5}(1-\sigma)} \log^9 T, & m = 0. \end{cases}$$

**Доказательство.** Для  $m = 0$  имеем  $Z_0(s) = 4\zeta(s)L(s, \chi_4)$ , а потому требуемый результат следует известных оценок  $N_0(\sigma, T)$ , полученных Huxley [3] и Montgomery [10]. Для  $m \neq 0$  мы учитываем, что

$$N_m(\sigma, T) \ll T|m| \log T|m| \ll (T|m|)^{3(1-\sigma)} \log T|m|,$$

если  $3(1-\sigma) \geq 1$ , то есть  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{2}{3}$ .

Для  $\frac{2}{3} \leq \sigma \leq 1 - \varepsilon$  требуемый результат даёт теорема 1, ибо полученные там оценки для  $\frac{2}{3} \leq \sigma \leq \frac{5}{6}$  и  $\frac{5}{6} \leq \sigma \leq 1 - \varepsilon$  достигают максимума при  $\sigma = \frac{5}{6}$ . Наконец, для  $1 - \varepsilon \leq \sigma \leq 1$  утверждение следует из теоремы 2, если положить  $\varepsilon \leq 9b^{-2}$ .  $\square$

В заключение заметим, что усреднённые по параметру  $m$  оценки для  $N_m(\sigma, T)$  рассматривались в работах Ф. Б. Ковальчик [7] и М. D. Coleman [1].

По методу работы [1] можно получить оценку

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{10}{3}(1-\sigma)} \log^1 9T|m|,$$

которая слабее полученной в настоящей работе.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Получена нетривиальная оценка для зета-суммы равномерно для  $m$  и  $Im(s)$ , являющаяся аналогом оценки зета-суммы для дзета-функции Римана. Такая оценка играет важную роль в построении асимптотической оценки для числа нулей дзета-функции Геке. Используя модифицированную лемму Хала и метод Хиз-Брауна доказан аналог плотностной теоремы для  $Z_m(s)$  в третьей степени при условии  $m \neq 0$ .

1. **Coleman M. D.** The Rosser-Iwaniec sieve in number fields [text] / Coleman M. D. // Acta Arith. – 1995. – 65. – P. 53–83.
2. **Heath-Brown D. R.** On the density of the zeros of the Dedekind zeta-function [text] / Heath-Brown D. R. // Acta Arith. – 1977. – V. 37. – P. 169–181.
3. **Huxley M.** On the difference between consecutive primes [text] / Huxley M. // Inv. Math. – 1972. – V. 15. – P. 155–164.
4. **Ivič A.** The Riemann zeta-function. Theory and Applications [text] / Ivič A. – N.-Y.; Wiley, 1985.
5. **Карацуба А.А.** Основы аналитической теории чисел [текст] 90/ Карацуба А. А. – М., 1975.
6. **Кауфман Р. М.** Оценка  $L$ -функции Гекке гауссова поля на половинной прямой [текст] / Кауфман Р. М. // Запис. научн. семин. Ленингр. отдел. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1979. – 91. – С. 40–51.
7. **Ковальчик Ф. Б.** Плотностные теоремы и распределение в простых секторах и прогрессиях [текст] / Ковальчик Ф. Б. // ДАН СССР. – 1974. – 219. – С. 31–34.
8. **Kubilius J. P.** On a problem in the  $n$ -dimensional analytic theory of numbers [text] / Kubilius J. P. // Vilniaus Valst. Univ. Mokslo darbai Fiz. Chem. Moksly. Ser. 4. – 1955. – P. 5–43.
9. **Лаврик А. Ф.** Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля [текст] / Лаврик А. Ф. // Мат. заметки. – 1967. – 2(5). – С. 475–482.
10. **Монтгомери Г.** Мультипликативная теория чисел [текст] / Монтгомери Г. // – М.: Мир, 1974.