ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 52–66

Mathematical Subject Classification: 15A40, 15A04
УДК 512.533, 512.579

А. В. Жучок, Ю. В. Жучок
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка

НАПІВРЕТРАКЦІЇ ДЕЯКИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

Пам'яті професора Віталія Михайловича Усенка присвячується

Жучок А. В., Жучок Ю. В. Напівретракції деяких алгебраїчних систем. При вивченні фактор-напівгруп ефективною є техніка напівретракцій, вперше визначених у роботах В. М. Усенка, яка дозволяє використовувати напівретракції замість гомоморфізмів і мутації замість фактор-напівгруп. З використанням напівретракцій напівгруп суттєво полегшується задача знаходження конгруенцій напівгруп. У цій роботі наведено результати, отримані за допомогою техніки напівретракцій. Розглянуто техніку напівретракцій груп, запропоновану В.М. Усенком. Техніку напівретракцій моноїдів розповсюджено на довільні напівгрупи. У термінах напівретракцій представлено описи Герхарда, Петрича та Сільви ідемпотентних конгруенцій вільної напівгрупи. Визначено поняття напівретракції дімоноїда та наведено приклад застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій дімоноїдів. Розглянуто конструкції симетричної 0-категорії та симетричної інверсної 0-категорії. Охарактеризовано один тип напівретракцій симетричної 0-категорії та один тип напівретракцій симетричної інверсної 0-категорії. У термінах матричних напівгруп описано будову мутацій відповідних 0-категорій.
Ключові слова: напівретракція, група, напівгрупа, дімоноїд, симетрична 0-категорія.

Жучок А. В., Жучок Ю. В. Полуретракции некоторых алгебраических систем. При изучении фактор-полугрупп эффективна техника полуретракций, впервые определенных в работах В. М. Усенко, которая позволяет использовать полуретракции вместо гомоморфизмов и мутации вместо фактор-полугрупп. С использованием полуретракций полугрупп существенно облегчается задача нахождения конгруэнций полугрупп. В этой работе приведены результаты, полученные с помощью техники полуретракций. Рассмотрена техника полуретракций групп, предложенная В. М. Усенко. Техника полуретракций моноидов распространена на произвольные полугруппы. В терминах полуретракций представлены описания Герхарда, Петрича и Сильвы идемпотентных конгруэнций свободной полугруппы. Определено понятие полуретракции димоноида и приведен пример применения полуретракций к изучению конгруэнций димоноидов. Рассмотрены конструкции симметрической 0-категории и симметрической инверсной 0-категории. Охарактеризованы один тип полуретракций симметрической 0-категории и один тип полуретракций симметрической инверсной 0-категории. В терминах матричных полугрупп описано строение мутаций соответствующих 0-категорий.
Ключевые слова: полуретракция, группа, полугруппа, димоноид, симметрическая 0-категория.

Zhuchok A. V., Zhuchok Yu. V. Semiretractions of some algebraic systems. The technique of semiretractions which first appeared in the papers of V.M. Usenko is effective to the study of quotient semigroups. It allows to use semiretractions instead of homomorhisms and mutations instead of quotient semigroups. With the help of semiretractions the problem of finding of congruences on semigroups is simplified. In this paper we give

results obtained with the help of the technique of semiretractions. We consider the technique of semiretractions of groups proposed by V.M. Usenko. The technique of semiretractions of monoids is extended to arbitrary semigroups. In terms of semiretractions the descriptions of idempotent congruences on free semigroups obtained in the works of Gerhard, Petrich and Silva are presented. The notion of a semiretraction of a dimonoid is defined and an example of an application of semiretractions to the study of congruences on dimonoids is given. The constructions of a symmetric 0-category and a symmetric inverse 0-category are considered. One type of semiretractions of a symmetric 0-category and one type of semiretractions of a symmetric inverse 0-category are characterized. In terms of matrix semigroups the structure of mutations of the corresponding 0-categories are described.
Key words: semiretraction, group, semigroup, dimonoid, symmetric 0-category.

Вступ. При вивченні фактор-напівгруп ефективною стає техніка напівретракцій, уперше визначених у роботах В.М. Усенка (див., наприклад, [1]), яка дозволяє інтеріоризувати класичні факторизаційні методи використанням напівретракцій замість гомоморфізмів і мутацій замість фактор-напівгруп. З використанням лівих (правих, симетричних) напівретракцій напівгрупи суттєво полегшується задача знаходження правих (лівих, двобічних) конгруенцій цієї напівгрупи. Більш того, ліві (праві, симетричні) напівретракції взаємнооднозначно (з точністю до еквівалентності) відповідають трансверсалям розбиттів напівгруп, які визначаються правими (лівими, двобічними) конгруенціями.

У [2] визначено поняття напівретракції групи, яке узагальнює поняття ретракції (ідемпотентного ендоморфізму) та дозволяє з єдиної точки зору розглядати такі конструкції як довільні розширення груп і загальні добутки. При цьому виникає техніка, аналогічна техніці пірсовської декомпозиції ендоморфізмів прямих добутків.

Відзначимо, що в роботах Герхардта, Петрича і Сільви [3 – 7] описано конгруенції вільної напівгрупи, фактор-напівгрупи за якими є вільними в многовидах напівгруп ідемпотентів. Виявляється, що техніка, яка використовується в цих працях, збігається з технікою напівретракцій напівгруп.

Опираючись на вищезгадані результати, природньо виникає задача поширення поняття напівретракції на інші алгебраїчні структури. Так, у [8] було визначено поняття напівретракції дімоноїда та наведено деякі застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій дімоноїдів.

У цій роботі розглянуто техніку напівретракцій груп, напівгруп та дімоноїдів, а також наведено деякі її застосування.

Основні результати.

1. Напівретракції груп. У цьому пункті наведено техніку напівретракцій груп [2], запропоновану В.М. Усенком.

1.1. Загальні зауваження. У п.1 групову операцію будемо позначати зірочкою $*$, зберігаючи мультиплікативне позначення за операцією композиції перетворень. Нейтральний елемент групи G будемо позначати через θ_G (опускаючи нижній індекс у випадках, коли це не викликає непорозумінь), а елемент, протилежний елементу $g \in G$ – через $\bar{g}$ (тобто $g * \bar{g} = \bar{g} * g = \theta_G$). Через ι_G позначимо тотожний автоморфізм групи G (будемо говорити, що ι_G – операторна одиниця групи G), а через o_G – її нульовий ендоморфізм (тобто $g o_G = \theta$ для всіх $g \in G$).

Для $g, h \in G$ покладемо $[g; h] = g * h * \overline{g} * \overline{h}$, $hi_g = \bar{g} * h * g$. Символ i_g при цьому будемо трактувати як образ елемента $g \in G$ при канонічному гомоморфізмі

$$i : G \to Int\, G : g \mapsto i_g$$

групи G в групу $IntG$ її внутрішніх автоморфізмів.

Якщо ϕ, ψ – перетворення групи G, то через $\phi * \psi$ будемо позначати їх суму: $g(\phi * \psi) = g\phi * g\psi$, $g \in G$.

Група G називається загальним добутком своїх підгруп U і H, якщо $G = U * H$, $U \bigcap H = \{\theta_G\}$. При цьому говорять, що група G факторизуюча або, що вона факторизується в загальний добуток своїх підгруп. У наш час загальні добутки є одним із основних об'єктів обширної і розгалуженої теорії про властивості груп, що піддаються опису в термінах їх підгруп.

Основні поняття шрейєрової теорії розширень груп будемо використовувати в такій інтерпретації.

Нехай H_1, H_2 – групи, для яких визначено відображення

$$q : H_2 \times H_2 \to H_1 : (x; y) \mapsto (x; y)q,$$

$$\sigma : H_2 \to AutH_1 : x \mapsto \sigma_x,$$

що задовольняють співвідношенням

$$(t; u)q * (t * u; \upsilon)q = (u; \upsilon)q\sigma_t * (t; u * \upsilon)q, t, u, \upsilon \in H_2,$$

$$\sigma_{u*\upsilon} = \sigma_\upsilon \sigma_u i_{\overline{(u;\upsilon)q}}, u, \upsilon \in H_2.$$

Множина $H_1 \times H_2$ в цих умовах перетворюється в групу відносно операції

$$(u_1; \upsilon_1) * (u_2; \upsilon_2) = (u_1 * u_2\sigma_{\upsilon_1} * (u_1; \upsilon_2)q; \upsilon_1 * \upsilon_2),$$

$$u_1, u_2 \in H_1, \upsilon_1, \upsilon_2 \in H_2.$$

Цю групу називають шрейєровим добутком груп H_1 і H_2, який визначається системою факторів $(q; \sigma)$ (або, коротше, шрейєровим $(q; \sigma)$-добутком). Шрейєровий $(q; \sigma)$-добуток груп H_1 і H_2 будемо позначати через $(H_1; H_2)\mathfrak{S}_q^\sigma$.

1.2. Напівретракції. Лівою напівретракцією групи G називається таке її перетворення τ, для якого

$$(x * y)\tau = (x\tau * y)\tau, x, y \in G \tag{1}$$

при будь-яких $x, y \in G$. Якщо ж замість (1) виконується умова

$$(x * y)\tau = (x * y\tau)\tau,$$

то говорять про праву напівретракцію групи G.

Очевидна двоякість понять лівої та правої напівретракцій дозволяє нам обмежитися розглядом лівих напівретракцій.

У множині усіх ідемпотентних перетворень групи G ліві напівретракції характеризуються такою властивістю трансверсальності:

Лема. ([2], лема п.2.1) *Ідемпотентне перетворення τ групи G тоді й лише тоді буде лівою напівретракцією цієї групи, коли існує підгрупа $H \leq G$ така, що*

$$x\tau = y\tau \Leftrightarrow x * \overline{y} \in H,$$

які б не були $x, y \in G$.

Ліва напівретракція τ групи G називається регулярною, якщо $G\tau = Im\tau$ – підгрупа групи G. Перетворення $\tau' = \iota_G * \overline{\tau}$, де ι_G – операторна одиниця групи G (п.1.1), називається доповненням напівретракції τ.

Твердження. ([2], твердження п.2.3) *Ліва напівретракція τ групи G є регулярною тоді й лише тоді, коли її доповнення τ' є правою напівретракцією.*

Теорема. *([2], теорема п.2.4) Для будь-якої групи G наступні твердження є еквівалентними:*

1) група G факторизуюча;

2) існують регулярна права й регулярна ліва напівретракції τ_1 і, відповідно, τ_2 такі, що

$$\tau_1 * \tau_2 = \iota_G, \ \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1 = o_G.$$

Напівретракцією групи G називають таку її ліву напівретракцію τ, яка є також і правою. Іншими словами, перетворення τ групи G називається напівретракцією, якщо при будь-яких $x, y \in G$ виконуються умови:

$$(x * y)\tau = (x\tau * y)\tau,$$

$$(x * y)\tau = (x * y\tau)\tau.$$

Якщо τ – деяка напівретракція групи, то її ядро (за визначенням)

$$Ker\tau = \{x \in G | x\tau = \theta\tau\}$$

є, як не важко перевірити безпосередньо, підгрупою групи G.

Критерій того, що ліва напівретракція є правою, дає

Лема. ([2], лема п.4.1) *Для будь-якої лівої напівретракції τ довільної групи G наступні умови рівносильні*:

1) τ є правою напіретракцією групи G;

2) ядро $Ker\tau$ лівої напівретракції τ є нормальною підгрупою групи G.

Операторні властивості напівретракцій характеризуються так:

Лема. ([2], лема п.4.2) *Перетворення τ тоді й лише тоді є напівретракцією групи G, коли $\theta\tau = \theta$ і*

$$(x * y)\tau = (x\tau * y\tau)\tau$$

для всіх $x, y \in G$.

Якщо τ – напівретракція групи G, то множина $G\tau = Im\tau$ є, як легко перевірити, групою відносно операції

$$x(*_\tau)y = (x*y)\tau, x, y \in Im\tau.$$

Цю групу називають τ-мутацією групи G і позначають через G^τ. Неважко помітити, що $G^\tau \cong G/Ker\tau$. Таким чином, при наявності напівретракції τ для групи G виникає представлення у вигляді шрейєрового добутку (п.1.1) груп $Ker\tau$ і G^τ. Система факторів, що відповідає цьому шрейєровому добутку, визначається рівностями

$$(x; y)q = (x*y)\tau', \;\; x, y \in G\tau, \tag{2}$$

$$\sigma_x = i_{\overline{x}}, \;\; x \in G\tau, \tag{3}$$

де τ' – доповнення напівретракції τ, а через i_g позначено внутрішній автоморфізм групи G, який відповідає елементу $g \in G$ (див. п.1.1).

Якщо, навпаки, $G = (H_1; H_2)\mathfrak{S}_q^\sigma$ – шрейєровий добуток груп H_1 і H_2, то безпосередньо превіряється, що перетворення

$$\tau : G \to G : (u; \upsilon) \mapsto (\theta; \upsilon)$$

є напівретракцією групи G. При цьому

$$H_1 = Ker\tau, \;\; H_2 = G^\tau$$

і мають місце співвідношення (2), (3).

Твердження. ([2], твердження п.4.3) *Для будь-яких груп G, H_1, H_2 наступні умови еквівалентні*:

1) $G = (H_1; H_2)\mathfrak{S}_q^\sigma$;

2) існує напівретракція τ групи G, для якої $H_1 \cong Ker\tau$, $H_2 = G^\tau$ і для всіх $x, y \in G\tau$ виконуються співвідношення (2), (3).

У [2] відзначено, що за допомогою напівретракцій для шрейєрових добутків вдається отримати аналог теореми п. 3.3 з [2], яка представляє собою узагальнення пірсовської декомпозиції напівгрупи ендоморфізмів прямого добутку груп.

2. Напівретракції напівгруп. У цьому пункті техніку напівретракцій моноїдів [1], запропоновану В.М. Усенком, поширено на довільні напівгрупи. Доведення наведених результатів грунтується на тих самих міркуваннях, що й доведення відповідних результатів роботи [1].

Нехай $Eq(X)$ – множина усіх еквівалентностей довільної множини X, $I\Im(X)$ – множина ідемпотентів симетричної напівгрупи $\Im(X)$. Між множинами $Eq(X)$ та $I\Im(X)$ існує взаємнооднозначна (з точністю до еквівалентності) відповідність, яка полягає в тому, що для будь-якого $\xi \in I\Im(X)$ виконується умова $(x; x\xi) \in \nabla_\xi$, де ∇_ξ – відношення рівнозначності перетворення ξ, тобто

$$\nabla_\varphi = \{(x; y) \,|\, x, y \in X, \, x\varphi = y\varphi\}, \; \varphi \in \Im(X).$$

Таким чином, множина $Im\xi$ перетворення $\xi \in I\Im(X)$ є трансверсаллю розбиття, що визначається відношенням ∇_ξ. Навпаки, якщо образ $Im\xi$ перетворення $\xi \in \Im(X)$ є трансверсаллю розбиття, що визначається деякою еквівалентністю $\pi \in Eq(X)$, причому $(x; x\xi) \in \pi$ для всіх $x \in X$, то $\xi^2 = \xi$, а $\nabla_\xi = \pi$.

Для довільної напівгрупи S важливу роль при цьому відіграє деяка підмножина множини $I\Im(S)$, елементи якої відповідають конгруенціям (можливо однобічним) напівгрупи S.

Перетворення τ напівгрупи S називають лівою напівретракцією, якщо

$$(xy)\tau = (x\tau\, y)\tau \tag{4}$$

для всіх $x, y \in S$. Якщо замість тотожності (4) виконується наступна:

$$(xy)\tau = (xy\tau)\tau, \tag{5}$$

то говорять про праву напівретракцію.

Двоїстість понять лівої та правої напівретракцій є очевидною. Тому у випадку однобічних напівретракцій обмежимося розглядом лівих напівретракцій.

Якщо для $\tau \in \Im(S)$ виконуються обидві тотожності (4), (5), то перетворення τ називають (симетричною) напівретракцією напівгрупи S.

Необхідні та достатні умови, за якими ідемпотентне перетворення напівгрупи є її лівою напівретракцією, дає

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ напівгрупи S є її лівою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення рівнозначності ∇_τ є правою конгруенцією цієї напівгрупи.*

Нехай μ – довільна права конгруенція напівгрупи S, $a \in S$, $[\mu]a = \{s \in \in S\,|(a; s) \in \mu\}$. Якщо розглянути деяке фіксоване константне перетворення $e_a \in \in \Im([\mu]a)$ $(se_a = a,\ s \in [\mu]a)$ і покласти $xe = xe_a \Leftrightarrow x \in [\mu]a$ для всіх $x \in S$, то отримаємо ідемпотентне перетворення множини S таке, що $\nabla_e = \mu$. Отже, має місце

Лема. *Для кожної правої конгруенції μ напівгрупи S існує її ліва напівретракція τ така, що $\nabla_\tau = \mu$.*

Ліві напівретракції τ_1, τ_2 напівгрупи S називають еквівалентними, якщо має місце рівність $\nabla_{\tau_1} = \nabla_{\tau_2}$.

Загальну характеристику (симетричних) напівретракцій дає

Твердження. *Для ідемпотентного перетворення π напівгрупи S еквівалентними є твердження*:

1) π є симетричною напівретракцією;

2) π є лівою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією напівгрупи S;

3) π є правою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією напівгрупи S;

4) для всіх $x, y \in S$ виконується тотожність: $(xy)\pi = (x\pi\, y\pi)\pi$.

Якщо τ – ідемпотентна напівретракція напівгрупи S, то множина $Im\tau$ є напівгрупою відносно операції $x \cdot_\tau y = (xy)\tau,\ x, y \in Im\tau$. Напівгрупу $S^\tau = (Im\tau,\ \cdot_\tau)$ називають τ-мутацією напівгрупи S. Відображення $S \to S^\tau\ : x \mapsto x\tau$ при цьому є гомоморфізмом напівгруп, конгруенція якого, зрозуміло, збігається з відношенням рівнозначності напівретракції.

Навпаки, якщо $\varphi\ : S \to T$ – деякий гомоморфізм напівгруп, Δ_φ – відповідна конгруенція, то, визначивши перетворення $\tau\ : S \to S$ умовами

$$(x; x\tau) \in \Delta_\varphi, \ \ x\tau = y\tau \Leftrightarrow (x; y) \in \Delta_\varphi,$$

отримаємо ідемпотентну напівретракцію напівгрупи S таку, що $S^\tau \cong Im\varphi$.

Таким чином, задача опису конгруенцій напівгруп заданого класу є еквівалентною задачі опису класів еквівалентних напівретракцій. Тобто, знаючи дію напівретракції на напівгрупі, ми можемо побудувати єдину конгруенцію, що їй відповідає, та, навпаки, знаючи будову конгруенції на напівгрупі, можливо задати клас еквівалентних напівретракцій – напівретракцій, відношення рівнозначності за якими збігаються з заданою конгруенцією.

Відзначимо, що напівретракції різних напівгруп та моноїдів розглядалися також у [9 – 19].

3. Напівретракції вільних напівгруп. Роботи Герхардта, Петрича [3 – 5] і Петрича, Сільви [6], [7] присвячені опису відносно вільних напівгруп ідемпотентів. У цих працях знайдено всі перетворення τ вільної напівгрупи такі, що напівгрупи $(Im\tau, *)$ з операціями $x * y = (xy)\tau$ є вільними у многовидах напівгруп ідемпотентів. При цьому виявляється, що такі перетворення є симетричними напівретракціями вільної напівгрупи, а напівгрупи $(Im\tau, *)$ – відповідними мутаціями (див. п.2). Отже техніка напівретракцій напівгруп стає корисною та ефективною при описі конгруенцій вільних напівгруп.

У цьому пункті ми сформулюємо основні результати [7], користуючись термінологією та позначеннями п.2.

Нехай $F^\theta = F^\theta[X]$ – вільний моноїд в алфавіті $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ..\}$, θ – порожнє слово, $F = F[X]$ – вільна напівгрупа в тому ж алфавіті.

Для всіх слів w в алфавіті X покладемо

$c(w)$ – множина елементів $x \in X$, які входять до запису елемента w,

$\vec{w}\quad (\overleftarrow{w})$ – початкове (кінцеве) слово мінімальної довжини слова w, для якого $c(w) = c(\vec{w})\quad (c(w) = c(\overleftarrow{w}))$,

$wf^{'}\quad (wr^{'})$ – остання (перша) літера слова $\vec{w}\quad (\overleftarrow{w})$,

$wf\quad (wr)$ – слово, отримане з $\vec{w}\quad (\overleftarrow{w})$ викресленням літери $wf^{'}\ (wr^{'})$,

wg_2 – перша літера слова w,

wk_2 – слово, отримане з w викресленням усіх літер, крім тих, які вперше з'явилися в запису,

$\bar{w}$ – слово, отримане з w записом у зворотньому порядку.

Якщо τ – довільне перетворення напівгрупи $F[X]$ або моноїду $F^\theta[X]$, $w \in\ \in F[X]$, то покладемо $\theta\tau = \theta, w\bar{\tau} = \overline{\bar{w}\tau}$.

Для всіх $w \in F[X]$, $\tau \in \{g, k\}, n > 2$ визначимо індуктивно перетворення τ_n вільної напівгрупи $F[X]$:

$$w\tau_n = (wf\tau_n)(wf^{'})(w\bar{\tau}_{n-1}). \tag{6}$$

Розглянемо далі систему слів $M_2 = x_2x_1, G_2 = x_2, K_2 = x_2x_1x_2$ і для $n > 2$ визначимо індуктивно формули:

$$M_n = x_n\overline{M_{n-1}},\ I_n = M_n x_n \overline{I_{n-1}}, I_m \in \{K_m, G_m\}\ ,\ m \geq 2. \tag{7}$$

Відзначимо, що у формулі (6) τ позначає g (відповідно, k) тоді й лише тоді, коли у формулі (7) I позначає G (відповідно, K).

Нехай $M_n = I_n$ та $\overline{M_n} = \overline{I_n}$ – напівгрупові тотожності, $n > 2$.

Теорема. *([7], леми 2.3, 2.4) Будь-яке перетворення $\tau \in \{g_n, k_n | n \geq 2\}$ вільної напівгрупи $F[X]$ є її напівретракцією. При цьому τ-мутація $(F[X])^\tau$ напівгрупи $F[X]$ є вільною напівгрупою у многовиді напівгруп ідемпотентів, визначених тотожністю $M_n = I_n$.*

У двоїстий спосіб отримується

Теорема. *([7], леми 2.3, 2.4) Будь-яке перетворення $\tau \in \{\bar{g}_n, \bar{k}_n | n \geq 2\}$ вільної напівгрупи $F[X]$ є її напівретракцією. При цьому τ-мутація $(F[X])^\tau$ напівгрупи $F[X]$ є вільною напівгрупою у многовиді напівгруп ідемпотентів, визначених тотожністю $\overline{M_n} = \overline{I_n}$.*

Визначимо перетворення μ^τ та δ^τ, $\tau \in \{g_{n+1}, k_n | n \geq 2\}$ вільної напівгрупи $F[X]$ за правилами:

$$w\mu^\tau = (wf\tau)(wf'), \quad w\delta^\tau = (wr')\,(wr\bar{\tau})$$

для всіх $w \in F[X]$.

При цьому будемо вважати, що $\mu^{g_2} = g_2, \quad \delta^{g_2} = \bar{g}_2$.

За допомогою перетворень μ^τ та δ^τ визначимо тепер перетворення $z^{\alpha\beta}$ вільної напівгрупи $F[X]$. Для цього розглянемо множину

$$D = \{(k_{n+1}, k_n), (g_{n+1}, k_n), (g_{n+1}, g_{n+1}), (k_n, g_{n+1}), (k_n, k_{n+1}),$$
$$(g_{n+1}, g_n), (k_n, g_n), (k_n, k_n), (g_n, k_n), (g_n, g_{n+1}) | n \geq 2\}$$

і для кожного $(\alpha; \beta) \in D$ покладемо

$$wz^{\alpha\beta} = w\mu^\alpha w\delta^\beta, \ w \in F[X].$$

Лема. ([7], лема 4.3) *Будь-яке перетворення $z^{\alpha\beta}$ $((\alpha, \beta) \in D)$ вільної напівгрупи $F[X]$ є її напівретракцією.*

Нехай $u = \vartheta$ – напівгрупова тотожність. Через $(u = \vartheta)$ будемо позначати многовид напівгруп, визначених тотожністю $u = \vartheta$. Має місце

Теорема. *([7], теорема 4.6) Якщо $(\alpha_m, \beta_n) \in D$, $\nu = (M_m = A_m) \vee (\overline{M_n} = \overline{B_n})$, то $z^{\alpha_m\beta_n}$-мутація $(F[X])^{z^{\alpha_m\beta_n}}$ напівгрупи $F[X]$ є вільною у многовиді напівгруп ідемпотентів, визначених тотожністю ν.*

Елемент a напівгрупи S назвемо медіальною одиницею, якщо $xax = x$ для всіх $x \in S$. Напівгрупу, кожен елемент якої є медіальною одиницею, назвемо напівгрупою медіальних одиниць.

Наведемо результат, який стосується многовиду напівгруп медіальних одиниць.

Теорема. *([7], твердження 6.2) Відображення*

$$\pi : F[X] \to F[X] \,:\, w \mapsto w\pi = (w\, g_2)\,(w\, \overline{g_2})$$

є напівретракцією вільної напівгрупи $F[X]$. При цьому π-мутація $(F[X])^{\pi}$ напівгрупи $F[X]$ є вільною у многовиді напівгруп медіальних одиниць.

Визначимо індуктивно перетворення b вільної напівгрупи $F[X]$, поклавши

$$\theta\, b = \theta,\; w\, b = (w\, f\, b)(w\, f^{'})(w\, r^{'})(wrb)$$

для всіх $w \in F[X]$.

Теорема. *([7], твердження 6.2) Перетворення b вільної напівгрупи $F[X]$ є напівретракцією такою, що b-мутація $(F[X])^{b}$ напівгрупи $F[X]$ є вільною напівгрупою ідемпотентів.*

Результати роботи [7] не описують напівретракції вільних напівгруп, мутації за якими є вільними в многовидах лівих нормальних напівгруп ідемпотентів, правих нормальних напівгруп ідемпотентів, нормальних напівгруп ідемпотентів, комутативних напівгруп ідемпотентів. Ці напівретракції описано окремо в роботі [14].

4. Напівретракції дімоноїдів. Дімоноїдом [20] називається алгебра з двома асоціативними операціями, що задовольняють деякі три аксіоми (див. нижче). Це поняття було введено Ж.-Л. Лоде для вивчення властивостей алгебр Лейбніца. У випадку, коли операції дімоноїда збігаються, він перетворюється в напівгрупу.

У цьому пункті визначено поняття напівретракції дімоноїда та наведено приклад застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій дімоноїдів. Результати цього пункту належать [8].

Нагадаємо, що непорожня множина D з визначеними на ній бінарними асоціативними операціями $\prec$ і $\succ$, які задовольняють умови:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z),$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$

$$(x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z)$$

для всіх $x, y, z \in D$, називається дімоноїдом. Гомоморфізмом дімоноїда D_1 в дімоноїд D_2 називається відображення $f : D_1 \to D_2$ таке, що

$$(x \prec y)f = xf \prec yf,\;\; (x \succ y)f = xf \succ yf$$

для всіх $x, y \in D_1$.

Перетворення τ дімоноїда D називається лівою напівретракцією, якщо

$$(x \prec y)\tau = (x\tau \prec y)\tau, \tag{8}$$

$$(x \succ y)\tau = (x\tau \succ y)\tau \tag{9}$$

при будь-яких $x, y \in D$. Якщо замість (8), (9) виконуються тотожності

$$(x \prec y)\tau = (x \prec y\tau)\tau, \tag{10}$$

$$(x \succ y)\tau = (x \succ y\tau)\tau, \tag{11}$$

то говорять про праву напівретракцію.

Якщо для перетворення τ дімоноїда D виконуються тотожності (8) – (11), то перетворення τ називається (симетричною) напівретракцією дімоноїда D.

Якщо напівретракція τ дімоноїда $D = (D, \prec, \succ)$ є симетричною, то виникає дімоноїд $D^\tau = (Im\tau, \prec_\tau, \succ_\tau)$, у якому операції визначаються за правилами:

$$x \prec_\tau y = (x \prec y)\tau, \ x, y \in Im\tau,$$
$$x \succ_\tau y = (x \succ y)\tau, \ x, y \in Im\tau.$$

Дімоноїд D^τ називається τ-мутацією дімоноїда D. Неважко помітити, що відображення $\tau^\# : D \to D^\tau \ : x \mapsto x\tau^\# = x\tau$ є гомоморфізмом дімоноїдів.

Відзначимо: якщо операції дімоноїда збігаються, то визначення лівої (правої, двобічної) напівретракції дімоноїда збігається з визначенням лівої (правої, двобічної) напівретракції напівгрупи (див. п.2). Таким чином, поняття напівретракції дімоноїда узагальнює поняття напівретракції напівгрупи.

Наведемо один розв'язок задачі безпосереднього опису напівретракцій дімоноїдів.

Нехай $D = (D, \prec, \ \succ)$ – довільний дімоноїд, I, J – довільні непорожні множини, для яких визначено відображення

$$p : \quad J \times I \to D : (j, i) \mapsto (j, i)p = p_{ji}.$$

Визначимо на множині $D^{'} = I \times D \times J$ операції за правилами:

$$(i, g, j) \prec^{'} (k, h, l) = (i, g \prec p_{jk} \prec h, l)\,,$$

$$(i, g, j) \succ^{'} (k, h, l) = (i, g \succ p_{jk} \succ h, l)\,.$$

Лема. ([8], лема п.3.3) *Алгебра* $(D^{'}, \prec^{'}, \succ^{'})$ *є дімоноїдом.*

Дімоноїд, отриманий таким способом, називається дімоноїдом Ріса й позначається через $D^{'} = D^{'}(I, D, J; p)$.

Нехай $D^{'} = D^{'}(I, D, J; p)$ – дімоноїд Ріса, τ – ідемпотентна напівретракція дімоноїда D, α та β – такі ідемпотенти симетричних напівгруп $\Im(I)$ та, відповідно, $\Im(J)$, що виконується умова:

$$p_{ji} = p_{j\beta\, i\alpha}, \ j \in J, \, i \in I.$$

Нехай далі $D^{''}(I\alpha, D^\tau, J\beta; p^{'})$ – дімоноїд Ріса такий, що

$$p^{'} : J\beta \times I\alpha \to D^\tau : (j\beta, i\alpha) \mapsto (j\beta, i\alpha)p^{'} = p^{'}_{j\beta\; i\alpha} = p_{j\beta\; i\alpha}\tau.$$

Визначимо перетворення $\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}$ дімоноїда $D^{'}$, поклавши

$$(i, a, j)\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]} = (i\alpha, \ a\tau, j\beta)$$

для всіх $(i, a, j) \in D^{'}$.

Теорема. *([8], теорема п.3.4)*

Будь-яке перетворення $\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$ *дімоноїда Ріса* D' *є напівретракцією, для якої має місце рівність* $(D')^{\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}} = D''(I\alpha, D^{\tau}, J\beta; p')$.

5. Напівретракції симетричних 0-категорій. У цьому пункті описано один тип напівретракцій симетричної 0-категорії та один тип напівретракцій симетричної інверсної 0-категорії. При цьому вивчається будова мутацій відповідних 0-категорій в термінах матричних напівгруп.

Нагадаємо визначення симетричної 0-категорії. Нехай X – довільна непорожня множина, $U(X)$ – множина усіх непорожніх підмножин множини X. Для будь-яких $A, B \in U(X)$ через $Map(A; B)$ позначатимемо множину всіх сюр'єктивних відображень $\varphi : A \to B : x \mapsto x\varphi$ множини A на множину B.

Якщо $\varphi \in Map(A; B)$, то через $Dom\varphi$ будемо позначати область визначення відображення φ, а через $Im\varphi$ – його область значень (образ), тобто $Dom\varphi = A$, $Im\varphi = B$. На множині

$$SymX = \{\varphi \in Map(A; B) | A, B \in U(X)\}$$

природньо визначеною є часткова операція композиції відображень. Якщо $\varphi, \psi \in \in SymX$ такі, що $\varphi \in Map(A; B)$, $\psi \in Map(C; D)$, то про композицію $\varphi\psi$ можна говорити лише у випадку, коли $B \bigcap C \neq \emptyset$, а саме: якщо $M = B \bigcap C \neq \emptyset$, то композицією $\varphi\psi$ відображень φ і ψ називається відображення

$$\varphi|_E \psi|_M : E \to F : x \mapsto x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi,$$

де $E = \varphi^{-1}(M)$, $F = \psi(M)$.

На цьому шляху виникає напівгрупоїд (множина з бінарною частковою операцією), який називають напівгрупоїдом часткових перетворень множини X та позначають через $\mathfrak{P}\mathfrak{I}(X)$. Цей напівгрупоїд не є алгебраїчною категорією.

Дійсно, нехай $\varphi \in Map(A; B)$, $\psi \in Map(C; D)$ і $\eta \in Map(E; F)$ такі відображення із $\mathfrak{P}\mathfrak{I}(X)$, що добутки $\varphi\psi$, $\psi\eta$ визначено і $x\psi \notin Dom\eta$ для кожного $x \in B \bigcap C$. Це означає, що $Im\varphi\psi \bigcap E = \emptyset$, тобто добуток $(\varphi\psi)\eta$ відображень $\varphi\psi$ та η не є визначеним. Отже, напівгрупоїд часткових перетворень не є локально асоціативним [21].

Вимоги до визначення композиції $\varphi\psi$ сюр'єктивних відображень $\varphi, \psi \in SymX$, де $\varphi \in Map(A; B)$, $\psi \in Map(C; D)$, можна посилити: вважатимемо композицію $\varphi\psi$ визначеною лише за умови $B = C$. Напівгрупоїд, що при цьому виникає на множині $SymX$, називається симетричною категорією на множині X та позначається через $SymX$.

Симетрична категорія $SymX$ на відміну від напівгрупоїда часткових перетворень є локально-асоціативним напівгрупоїдом.

Дійсно, якщо φ, ψ та η із $SymX$ такі, що добутки $\varphi\psi$, $\psi\eta$ визначено, то $Im\varphi = Dom\psi$, $Im\psi = Dom\eta$. Оскільки $Dom\psi\eta = Dom\psi$, $Im\varphi\psi = Im\psi$, то добутки $(\varphi\psi)\eta$ і $\varphi(\psi\eta)$ є визначеними, при цьому $(\varphi\psi)\eta = \varphi(\psi\eta)$.

Якщо напівгрупоїд $\mathfrak{P}\mathfrak{I}(X)$ часткових перетворень множини X доповнити зовнішнім анулятором 0 і для всіх $\varphi \in Map(A; B)$, $\psi \in Map(C; D)$ таких, що $B \bigcap C \neq \emptyset$, покласти $\varphi\psi = 0$, то отримаємо напівгрупу $\mathfrak{P}\mathfrak{I}^0(X) = \mathfrak{P}\mathfrak{I}(X) \bigcup \{0\}$, яка називається напівгрупою часткових перетворень множини X.

Виявляється, що напівгрупа $\mathfrak{P}\mathfrak{I}^0(X)$ не є 0-категорійною [22], оскільки для тотожнього перетворення i_X множини X та відображень $\varphi \in Map(A;A)$, $\psi \in \in Map(B;B)$, де $A = \{a\}, B = \{b\}$ $(a, b \in X, a \neq b)$, маємо: $\varphi i_X \neq 0$, $i_X\psi \neq 0$, $\varphi i_X \psi = 0$.

Приєднуючи до симетричної категорії $SymX$ зовнішній нуль 0 і довизначивши операцію композиції $\varphi\psi$ за правилом: $\varphi\psi = 0$, коли $B \neq C$, отримаємо групоїд, який називається симетричною 0-категорією на множині X і позначається через $Sym^0 X$.

На відміну від напівгрупи часткових перетворень, симетрична 0-категорія є категорійною в нулі напівгрупою, що перевіряється безпосередньо. Відзначимо, що деякі структурні властивості симетричної 0-категорії та її піднадпівгрупи – симетричної інверсної 0-категорії, вивчалися в [21], [23].

Нехай X – довільна непорожня множина. Визначимо бінарне відношення λ на множині $U(X)$ таким способом:

$$(A;B) \in \lambda \Leftrightarrow |A| \geq |B|\,.$$

Підмножину T із $Sym^0 X$, де $0 \notin T$, назвемо λ-системою (ненульових) представників даної напівгрупи, якщо для всіх $(A;B) \in \lambda$ існує лише один елемент $\varphi \in Map(A;B)$, для якого $\varphi \in T$. Якщо T – деяка λ-система представників $Sym^0 X$ і $\psi \in T \bigcap Map(A;B)$, де $(A;B) \in \lambda$, то представника ψ позначатимемо через ψ_{AB}.

Через T_X позначимо множину всіх λ-систем представників $Sym^0 X$. Визначимо перетворення $\delta_T \in \mathfrak{I}(Sym^0 X)$, де $T \in T_X$, поклавши $\delta_T(0) = 0$ та

$$\delta_T(\varphi) = \varphi_{AB} \Leftrightarrow \varphi \in Map(A;B) \quad ((A;B) \in \lambda)$$

для кожного $\varphi \in Sym^0 X$, $\varphi \neq 0$.

Лема. *Перетворення δ_T є напівретракцією напівгрупи $Sym^0 X$ при будь-якому $T \in T_X$.*

Доведення. Нехай $\varphi, \psi \in Sym^0 X$. Якщо хоча б один з цих елементів дорівнює нулю або $\varphi, \psi \in Sym^0 X$ такі, що $\varphi \neq 0 \neq \psi$ і $Im\varphi \neq Dom\psi$, то

$$\delta_T(\varphi\psi) = \delta_T(0) = \delta_T(\delta_T(\varphi)\delta_T(\psi)).$$

В інших випадках, тобто коли $\varphi, \psi \in Sym^0 X$ такі, що $\varphi \neq 0 \neq \psi$ та $Im\varphi = Dom\psi$, отримуємо:

$$\delta_T(\varphi\psi) = (\varphi\psi)_{Dom\varphi\psi\ Im\varphi\psi} = \eta_{Dom\varphi\ Im\psi}, \text{де } \eta = \varphi\psi,$$

$$\delta_T(\delta_T(\varphi)\delta_T(\psi)) = \delta_T(\varphi_{Dom\varphi\ Im\varphi}\psi_{Dom\psi\ Im\psi}) = \delta_T(\phi) = \phi_{Dom\varphi\ Im\psi},$$

$$\text{де } \varphi_{Dom\varphi\ Im\varphi}\psi_{Dom\psi Im\psi} = \phi \in Map(Dom\varphi; Im\psi),$$

звідки $\eta_{Dom\varphi\ Im\psi} = \phi_{Dom\varphi\ Im\psi}$.

Лему доведено.

Нехай $M = X \times X$, 0 – зовнішній елемент, тобто $0 \notin M$. На множині $M^0 = = (X \times X) \bigcup \{0\}$ визначимо операцію за правилом:

$$(a;b)(c;d) = \begin{cases} (a;d), & b = c, \\ 0, & b \neq c, \end{cases}$$

$$(a;b)0 = 0(a;b) = 00 = 0.$$

Множина M^0 з такою операцією є напівгрупою з нулем, оскільки напівгрупоїд M задовольняє умовам Конрада (див. [22]). Отриману напівгрупу назвемо матричною напівгрупою та позначимо через M^0_X.

Відзначимо, що матрична напівгрупа M^0_X є напівгрупою Брандта [22].

Якщо ρ – деяке транзитивне бінарне відношення на множині X, то множина ρ^0, де $\rho^0 = \rho \bigcup \{0\}$, є піднапівгрупою матричної напівгрупи M^0_X. Цю піднапівгрупу будемо позначати $M^0_X(\rho)$.

Твердження. *Для будь-якої напівретракції δ_T напівгрупи Sym^0X δ_T-мутація $(Sym^0X)^{\delta_T}$ є ізоморфною напівгрупі $M^0_{U(X)}(\lambda)$.*

Доведення. Визначимо відображення

$$f : (Sym^0X)^{\delta_T} \to M^0_X(\lambda) : \varphi_{AB} \mapsto f(\varphi_{AB}), \text{де}$$

$$f(\varphi_{AB}) = \begin{cases} (A;B), & \varphi_{AB} \neq 0, \\ 0, & \varphi_{AB} = 0, \end{cases}$$

яке, як неважко пересвідчитися, є гомоморфізмом.

Дійсно, при будь-яких φ_{AB}, $\varphi_{CD} \in (Sym^0X)^{\delta_T}$, $\varphi_{AB} \neq 0 \neq \varphi_{CD}$ матимемо:

$$f(\varphi_{AB}\,\varphi_{CD}) =$$

$$= \begin{cases} f(\varphi_{AD}) = (A;D) = (A;B)(C;D) = f(\varphi_{AB})\,f(\varphi_{CD}), & B = C, \\ f(0) = 0 = (A;B)(C;D) = f(\varphi_{AB})f(\varphi_{CD}), & B \neq C. \end{cases}$$

Якщо принаймні один з елементів φ_{AB}, $\varphi_{CD} \in (Sym^0X)^{\delta_T}$ дорівнює 0, то перевірка тотожності гомоморфізму для f є тривіальною. Крім цього, відображення f є біекцією.

Твердження доведено.

Через $BSym^0X$ позначимо підмножину із симетричної 0-категорії Sym^0X, яка складається з усіх взаємнооднозначних часткових перетворень множини X в об'єднанні з нулем, тобто

$$BSym^0X = \{\varphi \in Sym^0X | \varphi = 0 \ \vee \ (\varphi \neq 0, \ \varphi - \text{біекція})\}.$$

Неважко помітити, що $BSym^0X$ є піднапівгрупою напівгрупи Sym^0X. Її називають симетричною інверсною 0-категорією на множині X (див., наприклад, [23]).

Нехай μ – відношення рівнопотужності на множині $U(X)$. Підмножину H із $BSym^0X$, де $0 \notin T$, назвемо μ-системою (ненульових) представників цієї напівгрупи, якщо для всіх $(A;B) \in \mu$ існує лише один елемент $\psi \in Map(A;B)$, для якого $\psi \in H$. Якщо H – μ-система представників $BSym^0X$ і $\psi \in H \bigcap Map(A;B)$, де $(A;B) \in \mu$, то представника ψ позначатимемо через ψ_{AB}.

Позначимо через H_X множину всіх μ-систем з $BSym^0X$ і визначимо перетворення $\delta_H \in \Im(BSym^0X)$, де $H \in H_X$, поклавши $\delta_H(0) = 0$ та

$$\delta_H(\psi) = \psi_{AB} \Leftrightarrow \psi \in Map(A;B) \quad ((A;B) \in \mu)$$

для кожного $\psi \in BSym^0X$, $\psi \neq 0$.

Твердження. *Для будь-якого $H \in H_X$ перетворення δ_H є напівретракцією напівгрупи $BSym^0X$ такою, що δ_H-мутація $(BSym^0X)^{\delta_H}$ ізоморфна напівгрупі $M^0_{U(X)}(\mu)$.*

Доведення. Аналогічно тому як в попередній лемі можна довести, що δ_H є напівретракцією напівгрупи $BSym^0X$ при будь-якому $H \in H_X$. Крім того, безпосередньою перевіркою можна переконатися, що відображення $f : (BSym^0X)^{\delta_H} \to$ $\to M^0_{U(X)}(\mu)$, яке визначається умовою:

$$f(\psi_{AB}) = \begin{cases} (A;B), & \psi_{AB} \neq 0, \\ 0, & \psi_{AB} = 0 \end{cases}$$

для кожного $\psi_{AB} \in (BSym^0X)^{\delta_H}$, є ізоморфізмом.

Твердження доведено.

Висновки. У роботі розглянуто застосування техніки напівретракцій, запропонованої В. М. Усенком, до вивчення таких алгебраїчних систем як групи, напівгрупи та дімоноїди.

1. **Усенко В. М.** Напівретракції моноїдів [текст] / Усенко В. М. // Труды ИПММ. – 2000. – Т. 5. – С. 155–164.
2. **Усенко В. М.** О полуретрациях групп [текст] / Усенко В. М. // Вопросы алгебры. Изд-во Гомельс. ун-та. – 1997. – Т. 11. – С. 151–169.
3. **Gerhardt J. A.** Free bands and free *-bands [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Glasgow Math J. – 1986. – 28. – P. 161–179.
4. **Gerhardt J. A.** Certain characterizations of varieties of bands [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1988. – 31. – P. 301–319.
5. **Gerhardt J. A.** Varieties of bands revisited [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Proc. London Math. Soc. – 1989. – 58 (3). – P. 323–350.
6. **Petrich M.** Relatively free bands [text] / Petrich M., Silva P. V. // Comm. in Algebra. – 2000. – 28 (5). – P. 2615–2631.
7. **Petrich M.** Structure of relatively free bands [text] / Petrich M., Silva P. V. // Commun. Algebra. – – 2002. – 30, № 9. – P. 4165–4187.
8. **Жучок А. В.** Напівретракції дімоноїдів [текст] / Жучок А. В. // Труды ИПММ. – 2008. – Вып. 17. – С. 42–50.
9. **Усенко В. М.** Полуретракции моноидов [текст] / Усенко В. М. // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л. А. Калужніна. – Вінниця: ВДПУ, 1999. – С. 120–121.

10. **Усенко В. М.** Напівретракції та симетричні зображення [текст] / Усенко В. М. // Вісник Київ. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 81–85.

11. **Жучок Ю. В.** Деякі напівретракції вільних напівгруп [текст] / Жучок Ю. В., Жучок А. В. // Наукова молодь: Збірник праць молодих вчених. Луганськ: ЛНДПУ. – 2005. – Т. 2. – С. 148–153.

12. **Жучок А. В.** Напівретракції вільних моноїдів [текст] / Жучок А. В. // Труды ИПММ. – 2005. – Вып. 11. – С. 81–88.

13. **Жучок А. В.** Свободные полугруппы идемпотентов [текст] / Жучок А. В. // Известия Гомельского ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – №4(19). – С. 55–58.

14. **Жучок А. В.** Вільні нормальні напівгрупи ідемпотентів [текст] / Жучок А. В. // Труды ИПММ. – 2006. – Вып. 12. – С. 57–62.

15. **Жучок А. В.** Що таке напівретракція напівгрупи [текст] / Жучок А. В. // Освіта Донбасу. – 2008. – № 1 (126). – С. 66–71.

16. **Жучок А. В.** Про один клас напівретракцій вільних моноїдів [текст] / Жучок А. В. // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 50–53.

17. **Жучок Ю. В.** Про деякий клас напівретракцій [текст] / Жучок Ю. В. // Пошуки і знахідки. Матеріали наукової конференції Слов'янського держ. пед. ун-ту. – Слов'янськ, 2004. – Вип. 3. – С. 35–37.

18. **Кизименко А. М.** Свободные полугруппы и прямоугольные связки [текст] / Кизименко А. М. // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л. А. Калужніна. – Вінниця : ВДПУ, 1999. – С. 85.

19. **Кизименко А. М.** Свободные полугруппы и комутативные связки [текст] / Кизименко А. М. // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л. А. Калужніна. – Вінниця: ВДПУ, 1999. – С. 84–85.

20. **Loday J.-L.** Dialgebras [text] / Loday J.-L. // Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math. – 1763. – Springer-Verlag, Berlin, 2001. – P. 7–66.

21. **Жучок Ю. В.** Декомпозиції напівгруп з нулем [текст] / Жучок Ю. В. // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 7–13.

22. **Клиффорд А.** Алгебраическая теория полугрупп [текст] / Клиффорд А., Престон Г. М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 185 с.; Т. 2. – 422 с.

23. **Жучок Ю. В.** Група автоморфізмів симетричної інверсної 0-категорії [текст] / Жучок Ю. В. // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2008. – Т. 2. – С. 57–61.