

Mathematical Subject Classification: 70F35, 70F40, 70E55
УДК: 531.396

А. Г. Забуга¹, Е. Я. Антонюк¹, И. А. Бобух², Е. В. Соколов²

¹Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины

²Донбасская государственная машиностроительная академия

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ СОУДАРЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ТЕЛ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ С ФРИКЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Забуга А. Г., Антонюк Е. Я., Бобух И. О., Соколов Е. В. До питання про динаміку співудару абсолютно твердих тіл у складних системах з фрикційною взаємодією. Для конкретної системи за допомогою гіпотези Рауса розроблено математичну модель динаміки співудару абсолютно твердих тіл різної форми. Враховано кулонове тертя в точці співудару та наявність пружності в суміжних ланках. **Ключові слова:** рівняння динаміки, тертя ковзання, сили реакції, гіпотеза Рауса, абсолютно тверде тіло, удар, принцип Даламбера.

Забуга А. Г., Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В. К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием. На примере конкретной системы при помощи гипотезы Рауса разработана математическая модель динамики соударения абсолютно твердых тел различной формы. Учтено кулоново трение в точке соударения и наличие упругости в смежных звеньях.

Ключевые слова: уравнения динамики, трение скольжения, силы реакции, гипотеза Рауса, абсолютно твердое тело, удар, принцип Даламбера.

Zabuga A. G., Antonyuk E. Ya., Bobukh I. A., Sokolov E. V. About impact dynamics of perfectly rigid bodies in complex systems with friction interaction. For specified system mathematical model of impact dynamics of variform perfectly rigid bodies was developed using Routh hypothesis. Coulomb friction in impact point and elasticity in adjacent links was taken into account.

Key words: dynamics equations, sliding friction, reaction forces, Routh hypothesis, perfectly rigid body, impact, d’Alambert’s principle.

ВВЕДЕНИЕ. Анализ динамики соударения абсолютно твердых тел имеет большое значение как в теоретической механике, так и в самых разнообразных областях производства [1, 2, 3]. Особый интерес представляют случаи, когда соударение происходит между частями некоторой сложной системы. Сложность системы может быть обусловлена высоким порядком и нелинейностью дифференциальных уравнений, наличием неидеальных связей, упругих звеньев и переменной структуры [4, 5]. В данной статье проводится анализ динамики системы, являющейся моделью рольганга прокатного стана Магнитогорского металлургического комбината [6, 7].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи.

Изучаемая модель схематически представлена на рис. 1 и 2.

В изучаемой системе абсолютно твердое тело 1, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, массу $m_1 = 20000$ кг и длину $a = 10$ м, совершает плоскопараллельное движение в плоскости xy . До соударения с абсолютно твердым телом 2 цилиндрической формы с массой $m_2 = 4631$ кг, радиусом $R = 0,2$ м и осью симметрии, перпендикулярной плоскости рисунка, тело 1 движется поступательно в положительном направлении оси абсцисс. Ось симметрии тела 2 до соударения неподвижна.

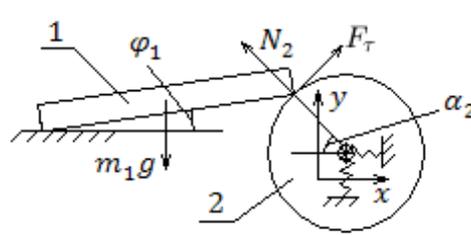


Рис. 1

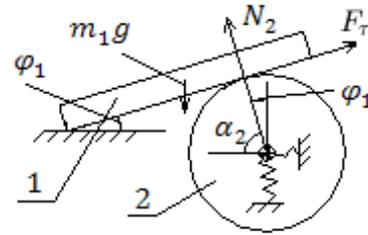


Рис. 2

Поступательное движение тела 2 ограничено по вертикали и горизонтали упругими звеньями. Коэффициент жесткости по горизонтали $k_x = 8,5 \cdot 10^7$ Н/м и соответствующий коэффициент диссипации $H_x = 85000$ Н·с/м. Предполагается, что по вертикали движение тела 2 ограничено амортизатором с коэффициентом жесткости $k_y = 8,5 \cdot 10^6$ Н/м и большим коэффициентом диссипации $H_y = 1,7 \cdot 10^5$ Н·с/м. Причем помимо амортизатора движению по вертикали препятствует еще и ограничитель с коэффициентом жесткости $k_{2y} = 8,5 \cdot 10^7$ Н/м. Суммарная сила, действующая на тело 2 со стороны амортизатора и ограничителя, была описана с помощью функции:

$$F_{upr} = k_y \cdot y_2 + H_y \cdot \dot{y}_2 + \frac{1}{2} k_{2y} \cdot y_2 \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arctg(\beta \cdot (y_2 + \Delta h)) \right), \quad (1)$$

где принято $\beta = 1 \cdot 10^5$ м⁻¹. Максимальное проседание тела 2 по вертикали, допускаемое ограничителем, $\Delta h = 0,02$ м. Использование функций вида $f(x) = \arctg(x)$ обусловлено тем, что они эффективны в качестве инструмента сглаживания зависимостей, имеющих аналитические особенности [8].

Тело 2 приводится во вращательное движение вокруг своей оси симметрии с помощью асинхронного электродвигателя, ротор которого соединен с этим телом через упругий вал с крутильной жесткостью $c = 5,45 \cdot 10^5$ Н·м и соответствующим коэффициентом диссипации $H = 50,886$ Н·м·с. Для численного эксперимента были использованы следующие параметры электродвигателя: момент инерции ротора $I_3 = 13,4$ кг·м², максимальный вращающий момент $M_k = 5300$ Н·м, угловая скорость идеального холостого хода $\omega_0 = 18,378$ с⁻¹ и угловая скорость при нагрузке M_k , равная $\omega_k = 16,319$ с⁻¹.

Система координат xy расположена так, как показано на рис. 1. Начало отсчета выбрано в положении статического равновесия оси симметрии тела 2. Тело 1 опирается слева на недеформируемую горизонтальную направляющую, вдоль

которой скользит без трения. В работе проводится сравнение динамики системы при различных высотах этой направляющей относительно начала отсчета $h = 0,18$ м и $h = 0,133$ м. Тело 1 имеет две степени свободы: x_1 – горизонтальная составляющая радиус-вектора его центра масс в выбранной системе отсчета и φ_1 – угол между направляющей и нижней поверхностью тела 1. Тело 2 имеет три степени свободы: x_2 и y_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие радиус-вектора его центра масс в выбранной системе отсчета и φ_2 – угол поворота тела 2 вокруг своей оси. Ротор электродвигателя имеет одну вращательную степень свободы φ_3 .

Удар принимается абсолютно неупругим. Это означает, что скорости тел 1 и 2 после удара будут равны в точке контакта по нормали к соударяющимся поверхностям. То есть удар приводит к образованию геометрической связи. Касательные же составляющие скоростей твердых тел 1 и 2 в точке контакта в общем случае будут после удара различны. Отметим также, что поскольку соударяющиеся тела предполагаются абсолютно твердыми, то удар между ними происходит мгновенно. Кроме того, в изучаемой системе учитывается наличие трения между телами 1 и 2. Коэффициент трения скольжения принят $\mu = 0,3$. Наличие трения между телами 1 и 2 приводит к тому, что при ударе меняются как нормальные, так и касательные составляющие скоростей в точке контакта [1, 2].

Как видно из сравнения рис. 1 и 2, в изучаемой системе возможны два различных типа геометрии контакта тел 1 и 2 в момент удара. Причем поскольку образующаяся в момент удара геометрическая связь является неударяющей, то в системе могут последовательно произойти несколько ударов.

2. Уравнения динамики системы и описание удара.

В общем случае уравнения динамики изучаемой системы могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\varphi}_1 &= p_1 N_2 + p_\tau F_\tau - (a/2) m_1 g \cos \varphi_1, \\
 m_1 \ddot{x}_1 &= -N_2 \cos \alpha_2 + F_\tau \sin \alpha_2, \\
 m_2 \ddot{x}_2 &= N_2 \cos \alpha_2 - k_x x_2 - H_x \dot{x}_2 - F_\tau \sin \alpha_2, \\
 m_2 \ddot{y}_2 &= -N_2 \sin \alpha_2 - F_{upr} - F_\tau \cos \alpha_2, \\
 I_2 \ddot{\varphi}_2 &= c(\varphi_3 - \varphi_2) + H(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) - R F_\tau, \\
 I_3 \ddot{\varphi}_3 &= M - c(\varphi_3 - \varphi_2) - H(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2), \\
 N_2 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Следует отметить, что отсутствие слагаемого $-m_2 g$ в четвертом уравнении системы обусловлено выбором начала отсчета в положении статического равновесия.

В системе уравнений (2) N_2 – сила реакции, действующая со стороны тела 2 на тело 1. Наличие условия $N_2 \geq 0$ обусловлено тем, что геометрическая связь, которая может возникнуть между телами 1 и 2, односторонняя. F_τ – сила трения между телами 1 и 2. Силы N_2 и F_τ заранее не известны, они изменяются при движении частей изучаемой системы и при решении задачи подлежат определению. I_1 – момент инерции тела 1 относительно оси вращения. В изучаемой системе этой осью вращения будет линия контакта тела 1 с горизонтальной направляющей. Поскольку длина тела 1 предполагается намного большей, чем его толщина, то указанный момент инерции $I_1 = m_1 a^2 / 3$. p_1 и p_τ – плечи сил N_2 и F_τ соответственно относительно оси вращения тела 1. α_2 – угол между радиусом

тела 2, опущенным в точку контакта с телом 1, и осью абсцисс. Определяется α_2 так, как показано на рис. 1 и 2. $I_2 = m_2 R^2 / 2$ – момент инерции тела 2 относительно его оси симметрии. M – вращающий момент, развиваемый электродвигателем. Он был введен с помощью формулы Клосса [9, 10], преобразованной к виду, удобному для расчета.

$$M = \frac{2M_k (\omega_0 - \omega_k) (\omega_0 - \dot{\varphi}_3)}{(\omega_0 - \dot{\varphi}_3)^2 + (\omega_0 - \omega_k)^2}. \quad (3)$$

Поскольку длина a тела 1 намного превосходит радиус R тела 2, то угол наклона φ_1 будет достаточно малой величиной. Это означает, что в выражениях, в которые входит φ_1 , можно отбросить бесконечно малые второго и более высоких порядков, приняв

$$\sin \varphi_1 \approx \varphi_1, \quad \cos \varphi_1 \approx 1, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 \approx \varphi_1. \quad (4)$$

Также предполагается, что на вращательное движение тела 1 наложено ограничение $\varphi_1 \geq 0$.

Явный вид правых частей системы (2) и её порядок зависит от взаимного расположения тел 1 и 2 и характера их движения. Это означает наличие переменной структуры. Следовательно, необходимо рассматривать различные этапы соударения и согласовывать их между собой.

Для описания удара применялась гипотеза Рауса [1, 2], которая дополняет гипотезу Ньютона в случае наличия трения между соударяющимися телами. Согласно гипотезе Рауса, между нормальной S и касательной S_τ составляющими ударного импульса имеется такое же соотношение, как и между нормальной и касательной составляющими реакции неидеальной связи. То есть

$$|S_\tau| \leq \mu |S| \quad (5)$$

для удара без скольжения или

$$S_\tau = \mu S \operatorname{sign}(v) \quad (6)$$

в случае для удара со скольжением. В формуле (6) v – касательная составляющая скорости движения одного из соударяющихся тел относительно другого в точке их контакта до удара в момент времени, бесконечно близкий к моменту времени, в который происходит удар. При непосредственном применении гипотезы Рауса сначала предполагается, что происходит удар без скольжения. Это дает возможность вычислить нормальную и касательную составляющие ударного импульса исходя из двух условий: заданного соотношения нормальных составляющих скоростей соударяющихся тел в точке их контакта до и после удара и условия отсутствия проскальзывания после удара. Если рассчитанные таким образом нормальная и касательная составляющие ударного импульса не удовлетворяют неравенству (5), то необходимо рассматривать удар со скольжением. При этом вычисление нормальной и касательной составляющих ударного импульса проводится исходя из условий: заданного соотношения нормальных составляющих скоростей соударяющихся тел в точке их контакта до и после удара и уравнения (6).

В изучаемой системе изменения скоростей соударяющихся тел в момент удара могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}'_1 - \dot{\varphi}_1 &= \frac{p_1 S}{I_1} + \frac{p_\tau S_\tau}{I_1}, \\ \dot{x}'_1 - \dot{x}_1 &= -\frac{S \cos \alpha_2}{m_1} + \frac{S_\tau \sin \alpha_2}{m_1}, \\ \dot{x}'_2 - \dot{x}_2 &= \frac{S \cos \alpha_2}{m_2} - \frac{S_\tau \sin \alpha_2}{m_2}, \\ \dot{y}'_2 - \dot{y}_2 &= -\frac{S \sin \alpha_2}{m_2} - \frac{S_\tau \cos \alpha_2}{m_2}, \\ \dot{\varphi}'_2 - \dot{\varphi}_2 &= -\frac{R S_\tau}{I_2},\end{aligned}\tag{7}$$

где в левых частях стоят разности скоростей после удара и скоростей до удара.

2.1. Тела 1 и 2 движутся независимо друг от друга (случай 1). Этот случай имеет место до соударения тел 1 и 2, а также после того, как произошел разрыв геометрической связи между ними.

Случай 1 является самым простым, поскольку первые два и остальные четыре уравнения системы (2) являются независимыми друг от друга. Кроме того, очевидно, что в случае 1

$$N_2 = 0, \quad F_\tau = 0.\tag{8}$$

Подставляя (1), (3), (4) и (8) в (2), получаем систему дифференциальных уравнений, в которой правые части записаны в явном виде.

2.2. Случай, изображенный на рис. 1. На этом этапе систему уравнений (2) необходимо рассматривать отдельно для случая проскальзывания между телами 1 и 2 (случай 2) и при наличии фрикционной связи между ними (случай 3).

Переход от случая 1 к случаю 2 или 3 с учетом (4) происходит при выполнении одновременно двух условий. Первое условие

$$\sqrt{[x_2 - x_1 + a/2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R - h + y_2)^2} > a\tag{9}$$

обеспечивает переход системы к ситуации, изображенной на рис. 1, а не рис. 2. Второе условие представляет собой уравнение геометрической связи, образующейся при указанном переходе, и может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_1 = \frac{y_2 - h + \sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}{a}.\tag{10}$$

Исходя из геометрии системы (рис. 1), уравнения геометрической связи (10) и учитывая (4), можем записать

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_2 - x_1 - a/2}{R}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}{R},\tag{11}$$

а также

$$p_1 = a(\varphi_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2), \quad p_\tau = a(\cos \alpha_2 - \varphi_1 \sin \alpha_2).\tag{12}$$

Для составления уравнений динамики системы в случае 2 остается определить неизвестные реакции N_2 и F_τ . Это можно сделать с помощью уравнений динамики системы (2), уравнений связи и принципа Даламбера. Для вычисления реакций в случае 2 учтем также тот факт, что в случае движения с проскальзыванием F_τ представляет собой силу трения скольжения. Это означает, что в случае 2 имеем, согласно закону кулонова трения,

$$F_\tau = \mu N_2 \text{sign} \left(\dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}} \right), \quad (13)$$

где выражение, стоящее в скобках, представляет собой скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта. Эта скорость определяет направление действия силы трения F_τ . Подставляя уравнение геометрической связи (10) и уравнения (4) и (13) в первое уравнение системы (2), можем, воспользовавшись принципом Даламбера, найти неизвестную реакцию N_2 . Имеем

$$N_2 = \left[p_1 + p_\tau \mu \text{sign} \left(\dot{\varphi}_2 - \frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}} \right) \right]^{-1} \times \\ \times \left(\frac{I_1 (x_2 - x_1 - a/2) (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{a \sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}} + \frac{I_1 \ddot{y}_2}{a} - \right. \\ \left. - \frac{I_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 R^2}{a [R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2]^{3/2}} + \frac{am_1 g}{2} \right). \quad (14)$$

Подстановка (1), (3), (4), (10) – (14) во второе – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 2, записанные в явном виде. Эти уравнения были разрешены аналитически относительно вторых производных от координат при помощи программного пакета Maple и тем самым приведены к виду, пригодному для их численного решения с использованием метода Рунге–Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [11].

Уравнения (10) – (12) являются общими для случаев 2 и 3. Случай 3 отличается от случая 2 отсутствием проскальзывания между телами 1 и 2. Условие отсутствия проскальзывания приводит к наличию линейной кинематической связи, которая характеризуется уравнением

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2} \dot{\varphi}_2 = 0. \quad (15)$$

Данное уравнение является полным дифференциалом, интегрирование которого позволяет свести кинематическую связь к геометрической, которая характеризуется уравнением

$$x_1 = x_2 + \frac{2R \sin(\varphi_2 + C_1) - a}{2}, \quad (16)$$

где C_1 – константа интегрирования, которая определяется из выражения

$$C_1 = \arcsin \left(\frac{a + 2(x_1(t_3) - x_2(t_3))}{2R} \right) - \varphi_2(t_3), \quad (17)$$

а $x_1(t_3)$, $x_2(t_3)$ и $\varphi_2(t_3)$, в свою очередь – значения координат в момент времени t_3 образования кинематической связи (15).

Для определения неизвестных реакций N_2 и F_τ в случае 3 нужно воспользоваться уравнениями связи (10) и (16). При этом будем исключать координаты φ_1 и x_1 . Для этого подставим сначала (16) в (10), откуда получим соотношение

$$\varphi_1 = \frac{y_2 - h + R \cos(\varphi_2 + C_1)}{a}, \quad (18)$$

которое представляет собой уравнение геометрической связи, где исключена переменная x_1 . Подстановка (16) в (11) дает формулы

$$\cos \alpha_2 = -\sin(\varphi_2 + C_1), \quad \sin \alpha_2 = \cos(\varphi_2 + C_1). \quad (19)$$

И, наконец, подстановка (18) и (19) в (12) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} p_1 &= a \cos(\varphi_2 + C_1) - [y_2 - h + R \cos(\varphi_2 + C_1)] \sin(\varphi_2 + C_1), \\ p_\tau &= -a \sin(\varphi_2 + C_1) - [y_2 - h + R \cos(\varphi_2 + C_1)] \cos(\varphi_2 + C_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношений (4), уравнений связи в виде (16) и (18), а также соотношений (19) и (20) достаточно, чтобы определить неизвестные реакции N_2 и F_τ в случае 3, исходя из первых двух уравнений системы (2). Согласно принципу Даламбера имеем

$$\begin{aligned} N_2 &= \left[\frac{I_1}{a^2} \ddot{y}_2 - \left(\frac{I_1 R \sin(\varphi_2 + C_1)}{a^2} + \frac{R \cdot p_\tau m_1 m_2}{a(m_1 + m_2)} \right) \ddot{\varphi}_2 + \frac{m_1 g}{2} \right] \times \\ &\times \cos(\varphi_2 + C_1) + \left(\frac{R \cdot p_\tau m_1 m_2 \sin(\varphi_2 + C_1)}{a(m_1 + m_2)} - \frac{I_1 R \cos^2(\varphi_2 + C_1)}{a^2} \right) \dot{\varphi}_2^2 + \\ &+ \frac{p_\tau m_1 (k_x x_2 + H_x \dot{x}_2)}{a(m_1 + m_2)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} F_\tau &= \left[\left(\frac{I_1 R \cos(\varphi_2 + C_1)}{a^2} - \frac{R \cdot p_1 m_1 m_2}{a(m_1 + m_2)} \right) \dot{\varphi}_2^2 - \frac{I_1}{a^2} \ddot{y}_2 - \frac{m_1 g}{2} \right] \times \\ &\times \sin(\varphi_2 + C_1) + \left(\frac{I_1 R \sin^2(\varphi_2 + C_1)}{a^2} + \frac{R \cdot p_1 m_1 m_2 \cos(\varphi_2 + C_1)}{a(m_1 + m_2)} \right) \ddot{\varphi}_2 - \\ &- \frac{p_1 m_1 (k_x x_2 + H_x \dot{x}_2)}{a(m_1 + m_2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подстановка (1), (3), (4), (16) – (22) в третье – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 3, записанные в явном виде. Полученные уравнения были решены аналитически относительно вторых производных от координат с помощью программного пакета Maple.

Кроме сказанного выше, отсутствие проскальзывания между телами 1 и 2 в случае 3 накладывает следующее условие на нормальную и касательную составляющие реакции:

$$|F_\tau| \leq \mu N_2, \quad (23)$$

где составляющая реакции N_2 стоит вне знака модуля, поскольку на нее было наложено условие $N_2 \geq 0$. В момент времени, когда условие (23) перестает выполняться, происходит переход от случая 3 к случаю 2. Обратный переход происходит при одновременном выполнении двух условий: когда скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта обращается в нуль и когда справедливо неравенство (23).

Рассмотрим переходы от случая 1 к случаю 2 или 3. При указанных переходах происходит соударение тел 1 и 2. Причем удар без скольжения соответствует переходу к случаю 3, а удар со скольжением — к случаю 2. В случае удара без скольжения гипотеза Рауса в сочетании с кинематикой изучаемой системы, предположением о том, что удар абсолютно неупругий, и формулами (7) дает следующие значения составляющих ударных импульсов:

$$\begin{aligned} S_\tau = & [\dot{y}_2 \sin \alpha_2 - \dot{x}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\varphi}_1 a \sin \alpha_2 + \dot{x}_1 \cos \alpha_2 - \\ & - A \left(\frac{p_1 a \sin \alpha_2}{I_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)] \times \\ & \times \left[\frac{p_\tau a \sin \alpha_2}{I_1} - \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{m_1} - B \left(\frac{p_1 a \sin \alpha_2}{I_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$S = A - BS_\tau,$$

где были введены обозначения

$$\begin{aligned} A = & (\dot{x}_2 \sin \alpha_2 + \dot{y}_2 \cos \alpha_2 + R\dot{\varphi}_2 - \dot{x}_1 \sin \alpha_2 - \dot{\varphi}_1 a \cos \alpha_2) \times \\ & \times \left(\frac{p_1 a \cos \alpha_2}{I_1} - \frac{\cos \alpha_2 \sin \alpha_2}{m_1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$B = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + \frac{p_\tau a \cos \alpha_2}{I_1} + \frac{R^2}{I_2} \right) * \left(\frac{p_1 a \cos \alpha_2}{I_1} - \frac{\cos \alpha_2 \sin \alpha_2}{m_1} \right)^{-1}.$$

В выражениях (24) и (25) $\sin \alpha_2$ и $\cos \alpha_2$ определяются по формулам (19), а p_1 и p_τ — по формулам (20).

Если нормальная и касательная составляющие ударного импульса, вычисленные по формулам (24) и (25), не удовлетворяют неравенству (5), то происходит удар со скольжением. В этом случае гипотеза Рауса в сочетании с кинематикой изучаемой системы, предположением о том, что удар абсолютно неупругий, и формулами (6) и (7) дает следующие значения составляющих ударных импульсов:

$$\begin{aligned} S = & (\dot{x}_1 \cos \alpha_2 - \dot{\varphi}_1 a \sin \alpha_2 + \dot{y}_2 \sin \alpha_2 - \dot{x}_2 \cos \alpha_2) \times \\ & \times \left(\frac{[p_1 + p_\tau \mu \text{sign}(v)] a \sin \alpha_2}{I_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2 - \mu \text{sign}(v) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}, \\ S_\tau = & \mu S \text{sign}(v), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$v = \dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}, \quad (27)$$

а $\sin \alpha_2$ и $\cos \alpha_2$ определяются по формулам (11) и p_1, p_τ – по формулам (12).

Формулы (24) – (27) в сочетании с соотношениями (7) и определенными так, как указано выше, $\sin \alpha_2, \cos \alpha_2, p_1$ и p_τ позволяют корректно описать изменение скоростей соударяющихся тел в момент удара.

Переход от случая 2 или 3 к случаю 1 происходит тогда, когда нормальная составляющая реакции N_2 обращается в нуль. Такой переход не сопровождается ударом, а следовательно, скачкообразного изменения скоростей не происходит.

2.3. Случай, изображенный на рис. 2. На этом этапе также следует отдельно рассматривать движение с проскальзыванием (случай 4) и движение без проскальзывания (случай 5).

Возможен переход от случая 1 к случаю 4 или 5. Первое условие такого перехода после учета (4) может быть записано в следующем виде:

$$\sqrt{[x_2 - x_1 + a/2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R - h + y_2)^2} \leq a. \quad (28)$$

Выполнение условия (28) обеспечивает переход к ситуации, изображенной на рис. 2. Второе условие представляет собой уравнение геометрической связи, образующейся в момент указанного перехода, и может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{x_2 - x_1 + a/2}, \quad (29)$$

где в правой части второго неравенства были отброшены бесконечно малые второго и более высоких порядков.

Также в изучаемой системе возможны переходы от случая 2 к случаю 4 и от случая 3 к случаю 5. Из сравнения рис. 1 и 2 легко видеть, что оба указанных перехода происходят, когда начинает выполняться условие

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1. \quad (30)$$

Поскольку соотношение (30) будет верно на протяжении всего времени движения в случае 4 или 5, то, учитывая (4) и (29), имеем для указанных случаев

$$\sin \alpha_2 = \cos \varphi_1 \approx 1, \quad \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \approx \varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{x_2 - x_1 + a/2}. \quad (31)$$

Исходя из геометрии системы имеем для случаев 4 и 5 следующие соотношения:

$$p_1 = \sqrt{[x_2 - x_1 + a/2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R + h - y_2)^2}, \quad p_\tau = 0, \quad (32)$$

где φ_1 определяется из уравнения геометрической связи (29).

Исключим из системы (2) неизвестные составляющие реакций N_2 и F_τ в случае 4. Согласно закону кулонова трения, эти составляющие связаны между собой соотношением, которое с учетом (4) имеет вид

$$F_\tau = \mu N_2 \text{sign}(R\dot{\varphi}_2 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2), \quad (33)$$

где выражение, стоящее в скобках, представляет собой скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта. Подставляя (4), (29) и (31) – (33) в первое уравнение системы, находим с помощью принципа Даламбера нормальную составляющую реакции

$$N_2 = \frac{I_1}{p_1 (x_2 - x_1 + a/2)} \left(\ddot{y}_2 + \frac{(y_2 + R - h)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{(x_2 - x_1 + a/2)} \right) + \frac{I_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{p_1 (x_2 - x_1 + a/2)^2} \left(2 \frac{(y_2 + R - h)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{(x_2 - x_1 + a/2)} - \dot{y}_2 \right) + \frac{am_1 g}{2p_1}. \quad (34)$$

Подстановка (1), (3), (4), (29), (31) – (34) во второе – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 4, записанные в явном виде. Полученные уравнения были решены аналитически относительно вторых производных от координат с помощью программного пакета Maple.

Случай 5 отличается от случая 4 отсутствием проскальзывания между телами 1 и 2. Условие отсутствия проскальзывания представляет собой линейную неголономную связь, уравнение которой имеет вид

$$R\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\cos \varphi_1}. \quad (35)$$

Если учесть (4), то связь (35) сводится к кинематической и может быть проинтегрирована:

$$x_1 = x_2 + R\varphi_2 + C_2, \quad (36)$$

где C_2 – константа интегрирования, которая определяется из выражения

$$C_2 = x_1(t_5) - x_2(t_5) - R\varphi_2(t_5), \quad (37)$$

где $x_1(t_5)$, $x_2(t_5)$ и $\varphi_2(t_5)$ – значения координат в момент времени t_5 образования связи (35).

Для определения неизвестных реакций N_2 и F_τ в случае 5 подставим сначала (36) в (29) и (31). Имеем

$$\varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{a/2 - R\varphi_2 - C_2}, \quad (38)$$

$$\sin \alpha_2 = \cos \varphi_1 \approx 1, \quad \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \approx \varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{a/2 - R\varphi_2 - C_2}. \quad (39)$$

Далее, подставляя (36) в (32), находим

$$p_1 = \sqrt{[a/2 - R\varphi_2 - C_2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R + h - y_2)^2}, \quad p_\tau = 0, \quad (40)$$

где φ_1 определяется из уравнения (38).

Соотношений (4) и уравнений связи в виде (36) и (38), а также соотношений (39) и (40) достаточно, чтобы определить неизвестные реакции N_2 и F_τ в случае 5, исходя из первых двух уравнений системы (2). Согласно принципу Даламбера имеем

$$N_2 = \frac{I_1}{p_1 (a/2 - R\varphi_2 - C_2)} \left(\ddot{y}_2 + \frac{(y_2 + R - h) R\dot{\varphi}_2}{(a/2 - R\varphi_2 - C_2)} \right) +$$

$$+ \frac{I_1 R \dot{\varphi}_2}{p_1 (a/2 - R\varphi_2 - C_2)^2} \left(2 \frac{(y_2 + R - h) R \dot{\varphi}_2}{(a/2 - R\varphi_2 - C_2)} + \dot{y}_2 \right) + \frac{am_1 g}{2p_1}, \quad (41)$$

$$F_\tau = \frac{I_1 (y_2 + R - h)}{p_1 (a/2 - R\varphi_2 - C_2)^2} \left(\dot{y}_2 + \frac{(y_2 + R - h) R \dot{\varphi}_2}{(a/2 - R\varphi_2 - C_2)} \right) + \frac{m_1 m_2 R \ddot{\varphi}_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (k_x x_2 + H_x \dot{x}_2)}{m_1 + m_2} + \frac{(y_2 + R - h)}{p_1 (a/2 - R\varphi_2 - C_2)} \times \left(\frac{2I_1 (y_2 + R - h) (R \dot{\varphi}_2)^2}{(a/2 - R\varphi_2 - C_2)^3} + \frac{I_1 \dot{y}_2 R \dot{\varphi}_2}{(a/2 - R\varphi_2 - C_2)^2} + \frac{am_1 g}{2} \right). \quad (42)$$

Подстановка (1), (3), (4), (36) – (42) в третье – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 5, записанные в явном виде. Полученные уравнения были решены аналитически относительно вторых производных от координат с помощью программного пакета Maple.

Кроме сказанного выше, отсутствие проскальзывания между телами 1 и 2 в случае 5 накладывает условие на нормальную и касательную составляющие реакции, которое, как и в случае 3, имеет вид (23), но с той лишь разницей, что теперь N_2 и F_τ определяются по формулам (41) и (42). В момент времени, когда условие (23) перестает выполняться, происходит переход от случая 5 к случаю 4. Обратный переход происходит при одновременном выполнении двух условий: когда скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта обращается в нуль и когда справедливо неравенство (23).

Переход от случая 1 к случаю 4 или 5 сопровождается соответственно ударом со скольжением или без скольжения. Выражения (24) – (26) остаются верны, но с той лишь разницей, что в случае удара без скольжения $\sin \alpha_2$ и $\cos \alpha_2$ определяются по формулам (39), а p_1 и p_τ – по формулам (40). В случае удара со скольжением $\sin \alpha_2$ и $\cos \alpha_2$ определяются по формулам (31), а p_1 и p_τ – по формулам (32). Кроме того,

$$v = R \dot{\varphi}_2 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2. \quad (43)$$

Переход от случая 4 или 5 к случаю 1 происходит тогда, когда нормальная составляющая реакции N_2 обращается в нуль.

3. Анализ результатов численного решения дифференциальных уравнений.

Для численного решения уравнений динамики (2) была создана программа в среде разработки MatLab. Были выбраны следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) &= 0, & x_1(t_0) &= -5,5 \text{ м}, & x_2(t_0) &= 0, & y_2(t_0) &= 0, \\ \varphi_2(t_0) &= 0, & \varphi_3(t_0) &= 0, & \dot{\varphi}_1(t_0) &= 0, & \dot{x}_1(t_0) &= 3,5 \text{ м/с}, \\ \dot{x}_2(t_0) &= 0, & \dot{y}_2(t_0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(t_0) &= \omega_0, & \dot{\varphi}_3(t_0) &= \omega_0, \end{aligned} \quad (44)$$

где $t_0 = 0$. Изучалась динамика системы на протяжении первой секунды от начала отсчета. Для получения достаточно точного результата расчет проводился с шагом $1 \cdot 10^{-5}$ с.

В качестве первой характеристики для анализа динамики изучаемой системы были выбраны нормальная и касательная составляющие силы реакции. На рис. 3 и 4 N_2 показана сплошной линией, а F_τ – пунктиром.

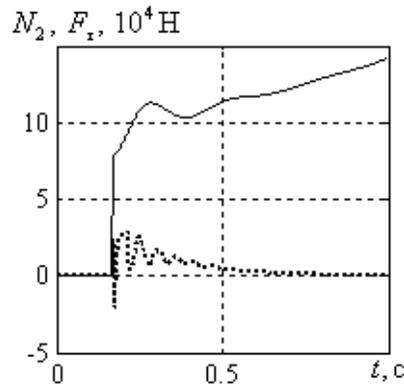


Рис. 3

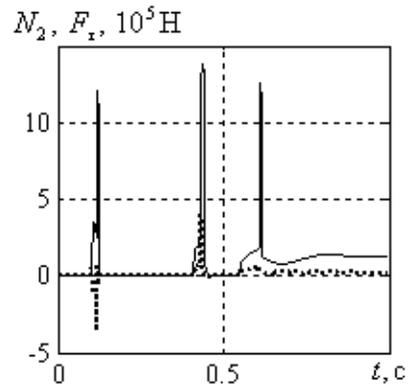


Рис. 4

Из сравнения графиков на рис. 3 ($h = 0,18$ м) и рис. 4 ($h = 0,133$ м) видно, что во втором случае максимальные значения нормальной и касательной составляющих ударного импульса будут выше примерно на порядок. Как будет показано ниже, скачки нормальной составляющей реакции в случае, изображенном на рис. 4, обусловлены тем, что тело 2 при движении вертикально вниз упирается в ограничитель.

Рассмотрим более внимательно случай движения при $h = 0,18$ м. Расчет показывает, что в этом случае последовательно происходят два удара. Сначала в момент времени $t = 0,118$ с происходит удар без скольжения. Составляющие ударного импульса при этом $S = 4,342 \cdot 10^3$ кг · м/с и $S_\tau = 489,219$ кг · м/с. Однако, как можно видеть из графика, изображенного на рис. 3, геометрическая связь (18) не образуется, поскольку $N_2 = 0$. Отсутствие перехода к случаю 3 после указанного удара объясняется наличием кривизны соударяющихся поверхностей и скоростей поступательного движения соударяющихся тел, достаточных для разрыва геометрической связи между телами 1 и 2. Таким образом, после первого соударения на протяжении некоторого промежутка времени имеет место случай 1.

В момент времени $t = 0,17$ с происходит удар со скольжением. Составляющие ударного импульса при этом $S = 1,234 \cdot 10^3$ кг · м/с и $S_\tau = 370,282$ кг · м/с. Данный удар сопровождается переходом системы от случая 1 к случаю 4, что видно на графике, как резкий скачок нормальной составляющей реакции. В момент времени $t = 0,174$ с происходит переход от случая 4 к случаю 5, то есть образуется неголономная связь (35). Затем данная связь разрывается в момент времени $t = 0,189$ с и потом снова образуется при $t = 0,218$ с. После этого имеет место движение в случае 5. Указанное движение сопровождается постепенным падением до нуля касательной составляющей реакции. Это объясняется тем, что скорость поступательного движения тела 1 и скорость вращения тела 2, как будет показано ниже, постепенно достигают постоянных значений. Нормальная составляющая реакции монотонно возрастает вследствие того, что центр масс тела 1 при движении приближается к телу 2.

Рассмотрим случай движения при $h = 0,133$ м. В момент времени $t = 0,1003$ с происходит удар без скольжения. Составляющие ударного импульса $S = 8,214 \cdot$

10^3 кг·м/с и $S_\tau = 1,196 \cdot 10^3$ кг·м/с. Этот удар сопровождается переходом от случая 1 к случаю 3, но кинематическая связь (15) разрывается сразу же после удара. Эта связь образуется вновь в момент времени $t = 0,103$ с, а затем опять разрывается в момент времени $t = 0,11$ с. После этого связь (15) образуется ещё раз в момент времени $t = 0,118$ с. И, наконец, в момент времени $t = 0,126$ с происходит разрыв кинематической связи (15) и геометрической связи (18), то есть происходит переход от случая 3 к случаю 1. На графике, изображенном на рис. 4 это видно, исходя из того, что после указанного промежутка времени $N_2 = 0$.

Спустя некоторое время, при $t = 0,414$ с, происходит удар без скольжения. Составляющие ударного импульса $S = 5,281 \cdot 10^3$ кг·м/с и $S_\tau = 1,118 \cdot 10^3$ кг·м/с. Этот удар сопровождается переходом от случая 1 к случаю 5. После этого в момент времени $t = 0,418$ с происходит разрыв неголономной связи (35), то есть имеет место переход от случая 5 к случаю 4. В последующие моменты времени $t = 0,434$ с и $t = 0,447$ с происходит образование и разрыв связи (35). Наконец, в момент времени $t = 0,463$ с происходит разрыв геометрической связи (29), то есть имеет место переход от случая 4 к случаю 1. Данный переход можно объяснить тем, что вертикальная составляющая скорости движения тел 1 и 2 меняет знак под действием сил упругости со стороны ограничителя. Тот факт, что тело 1 перемещается выше, чем тело 2, обусловлен тем, что движение последнего по вертикали ограничено упругими звеньями (амортизатором).

При $t = 0,55$ с происходит удар со скольжением. Составляющие ударного импульса $S = 1,092 \cdot 10^3$ кг·м/с и $S_\tau = 327,581$ кг·м/с. Этот удар сопровождается переходом от случая 1 к случаю 4. После этого следует серия переходов от случая 4 к случаю 5 и наоборот. Указанные переходы (чередуются образование связи (35) и её разрыв) происходят в моменты времени $t = 0,602$ с, $t = 0,615$ с, $t = 0,623$ с, $t = 0,656$ с, $t = 0,701$ с, $t = 0,709$ с и $t = 0,733$ с. После последнего из указанных переходов и, как минимум, до окончания первой секунды движения имеет место случай 5. В целом, после момента времени $t = 0,733$ с поведение нормальной и касательной составляющих реакции на рис. 4 качественно не отличается от такового на рис. 3. Разница заключается только в том, что согласно рис. 4 величина касательной составляющей реакции не успевает упасть до нуля. Это значит, что скорость поступательного движения тела 1 и скорость вращения тела 2 не успевают достичь постоянных значений за первую секунду движения.

Следующие характеристики, показанные на рис 5 и 6, которые были выбраны для анализа динамики изучаемой системы, это угловые скорости вращения тела 2 (сплошная линия) и ротора электродвигателя (пунктирная линия). На рис. 5 показаны угловые скорости в случае, когда $h = 0,18$ м, а на рис. 6 – $h = 0,133$ м. Изменения угловых скоростей обусловлены касательными составляющими ударного импульса и реакции. Направления нормальных составляющих проходят через ось вращения тела 2 и следовательно, создаваемые ими моменты равны нулю. Как можно видеть, наиболее сильные изменения скоростей наблюдаются тогда, когда происходят удары, а также в те интервалы времени, когда касательные составляющие реакции имеют наибольшие значения. Это хорошо согласуется с теорией, так как именно касательные составляющие реакции создают вращательный момент относительно оси симметрии тел цилиндрической формы. Отсутствие видимых разрывов на графиках угловой скорости φ_2 в моменты вре-

мени перехода от случая 2 к случаю 3 и наоборот, а также от случая 4 к случаю 5 и наоборот, говорит о том, что уравнения динамики (2) для указанных случаев были правильно согласованы между собой в процессе численного решения.

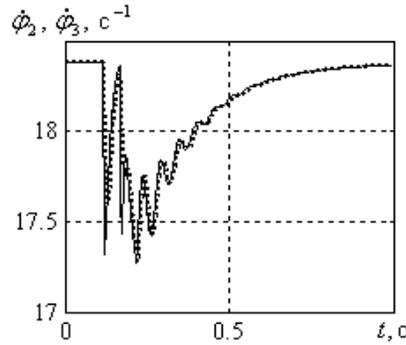


Рис. 5

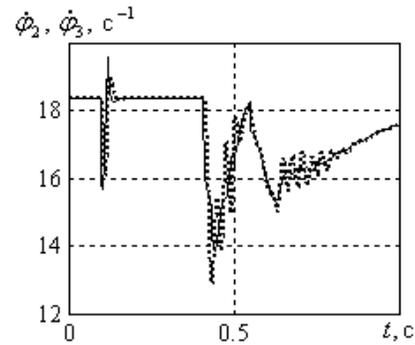


Рис. 6

Как можно видеть, наиболее сильные изменения скоростей наблюдаются тогда, когда происходят удары, а также в те интервалы времени, когда касательные составляющие реакции имеют наибольшие значения. Это хорошо согласуется с теорией, так как именно касательные составляющие реакции создают вращательный момент относительно оси симметрии тел цилиндрической формы. Отсутствие видимых разрывов на графиках угловой скорости $\dot{\varphi}_2$ в моменты времени перехода от случая 2 к случаю 3 и наоборот, а также от случая 4 к случаю 5 и наоборот, говорит о том, что уравнения динамики (2) для указанных случаев были правильно согласованы между собой в процессе численного решения.

Угловые скорости $\dot{\varphi}_2$ и $\dot{\varphi}_3$, изображенные на рис. 5, мало отличаются между собой на протяжении всего интервала времени, когда изучается движение. На рис. 6 ситуация несколько иная. После второго удара, который происходит при $t = 0,414$ с, наблюдаются явные различия в угловых скоростях на протяжении около 0,4 с. В указанный промежуток времени изменения $\dot{\varphi}_3$ имеют вид сложных колебаний.

Также можно видеть, что в случае, изображенном на рис. 5, угловые скорости на протяжении первой секунды движения успевают достичь постоянного значения, равного ω_0 . В случае, изображенном на рис. 6, одной секунды оказывается недостаточно для достижения указанного значения угловых скоростей. О данной особенности также было сказано выше при рассмотрении составляющих реакции.

Наконец, как можно видеть из графиков, в случае, изображенном на рис. 6, угловая скорость $\dot{\varphi}_3$ имеет в определенный интервал времени значение, меньшее ω_k . Это означает, что $\dot{\varphi}_3$ выходит за пределы устойчивой работы электродвигателя. В случае, показанном на рис. 5, столь сильное падение $\dot{\varphi}_3$ не наблюдается.

Указанные особенности зависимостей угловых скоростей в случае $h = 0,133$ м могут приводить к быстрому изнашиванию деталей и сбоям в работе машин.

Следующая характеристика, которая анализировалась, это изменение горизонтальной составляющей скорости \dot{x}_1 тела 1. Она показана на рис. 7 и 8. Причем рис. 7 соответствует движению при $h = 0,18$ м, а рис. 8 – $h = 0,133$ м.

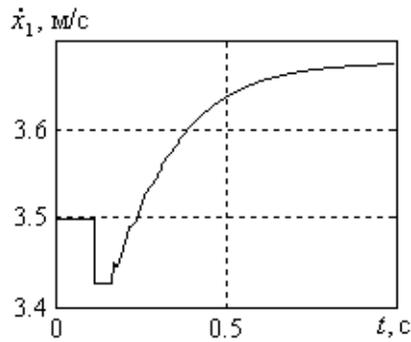


Рис. 7

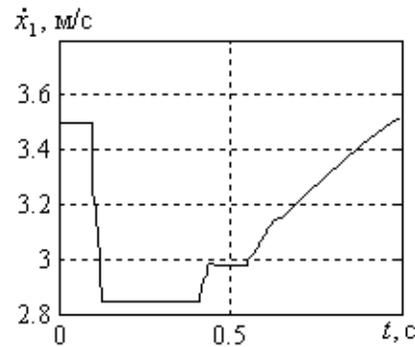


Рис. 8

Как видно из сравнения графиков на рис. 7 и рис. 8, при $h = 0,18$ м \dot{x}_1 уменьшается после первого удара примерно до 3,43 м/с, а при $h = 0,133$ м – примерно до 2,85 м/с. Более сильное изменение \dot{x}_1 во втором случае обусловлено большими по сравнению с первым случаем значениями составляющих ударного импульса и реакций и меньшим углом α_2 .

Кривая на рис. 7 имеет два горизонтальных участка, которые соответствуют движению в случае 1, когда на тело 1 в горизонтальном направлении не действуют никакие силы. По окончании каждого из горизонтальных участков вследствие удара происходит скачкообразное изменение скорости. Причем в результате второго удара скорость возрастает. Этот факт объясняется тем, что при втором ударе нормальная составляющая ударного импульса направлена практически по вертикали. Следовательно, основной вклад в изменение \dot{x}_1 при втором ударе вносит касательная составляющая ударного импульса. После второго удара \dot{x}_1 возрастает, приближаясь к некоторому постоянному значению, что согласуется со сказанным при анализе предыдущих графиков.

Кривая, изображенная на рис. 8, имеет три горизонтальных участка, соответствующих движению в случае 1. Это согласуется со сказанным выше о том, что в системе при движении происходит три удара. Также можно видеть, что за время движения \dot{x}_1 не успевает достигнуть постоянного значения, что также согласуется со сказанным выше.

Еще следует отметить, что на графиках, изображенных на рис. 4, не имеется явных разрывов в те моменты времени, когда происходят переходы от движения с проскальзыванием к движению без проскальзывания и наоборот. Это указывает на то, что уравнения динамики (2) для различных случаев движения были правильно согласованы между собой в процессе численного решения.

На рис. 9 и 10 показана зависимость координаты y_2 оси симметрии тела 2 от времени. Рис. 9 соответствует движению при $h = 0,18$ м, а рис. 10 – $h = 0,133$ м.

В целом, оба графика, изображенных на рис. 9 и 10 хорошо согласуются с тем, что было сказано выше. Основная отличительная особенность графика на рис. 10 заключается в том, что координата y_2 трижды достигает значений меньших $\Delta h = 0,02$ м. При этом тело 2 в указанные моменты времени упирается в ограничитель, что сопровождается скачкообразным увеличением жесткости согласно (1). Из сравнения графиков на рис. 10 с графиками на рис. 4 видно, что указанное увеличение жесткости приводит к соответствующему увеличению

нормальной составляющей реакции. Три выраженных максимума на рис. 4 наблюдаются в те же самые моменты времени, что и три выраженных минимума на рис. 10.

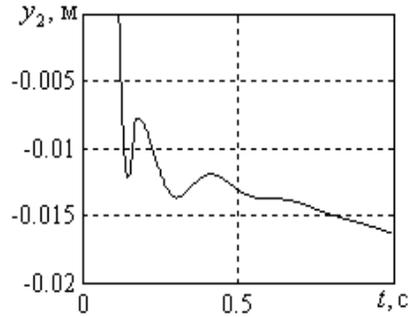


Рис. 9

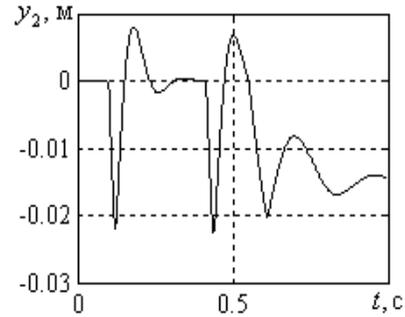


Рис. 10

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Анализ результатов численного решения уравнений динамики (2) показывает, что в изучаемой системе многократно происходит образование и разрыв геометрических и кинематических связей. Это позволяет сделать вывод о том, что динамика данной и подобной систем не может изучаться в рамках одноструктурных динамических моделей. Единственный способ исследования динамики таких систем: построение и согласование между собой в процессе численного решения систем дифференциальных уравнений, соответствующих различным структурам.

Отсутствие на полученных графиках, характеризующих изменение координат, разрывов в моменты времени, когда происходит образование или разрыв какой-либо из геометрических или кинематических связей, свидетельствует о том, что уравнения динамики (2) для различных случаев движения были правильно согласованы между собой в процессе численного решения. Аналогичный вывод следует из того, что при ударах скачкообразно изменяются скорости, но не изменяются координаты, что согласуется с теорией соударений абсолютно твердых тел.

Исходя из сравнения результатов анализа динамики изучаемой системы, полученных при $h = 0,18$ м и $h = 0,133$ м, можно видеть, что во втором случае динамическая нагруженность системы будет значительно выше. Кроме того, во втором случае системе требуется в несколько раз больше времени на прохождение переходного процесса. Это следует учитывать при проектировании реальных машин, поскольку указанные особенности динамики изучаемой системы при $h = 0,133$ м могут приводить к сбоям в работе двигателей и быстрому выходу из строя деталей оборудования.

1. **Пановко Я. Г.** Введение в теорию механического удара [Текст] / Пановко Я. Г. – М. : Наука, 1977. – 224 с.

2. **Раус Э. Дж.** Динамика системы твердых тел [Текст] : В 2 т. Т. 1. / Э. Дж. Раус ; перевод с англ. Ю. А. Архангельского [и др.] ; под ред. Ю. А. Архангельского и В. Г. Дёмина. – М. : Наука, 1983. – 464 с.
3. **Кильчевский Н. А.** Теория соударений твердых тел [Текст] : монография / Н. А. Кильчевский. – К. : Наукова думка, 1969. – 247 с.
4. **Кожевников С. Н.** Динамика машин с упругими звеньями [Текст] / С. Н. Кожевников. – К. : Издательство Академии наук Украинской ССР, 1961. – 160 с.
5. **Мартынюк А. А.** Устойчивость движения сложных систем [Текст] : монография / А. А. Мартынюк. – К. : Наукова думка, 1975. – 352 с.
6. **Диагностика** и динамика прокатных станов [Текст] : монография / В. В. Веренев, В. И. Большаков, А. Ю. Путники, А. А. Коринь, С. В. Мацко. – Днепропетровск: ИМА-пресс, 2007. – 144 с.
7. **Машины** и агрегаты металлургических заводов [Текст] : В 3 т. Т. 3. / А. И. Целиков, П. И. Полухин, В. М. Гребеник [и др.]. – М.: Металлургия, 1981. – 576 с.
8. **Антонюк Е. Я.** О динамической нагруженности машин с параллельными статически неопределимыми кинематическими цепями [Текст] / Е. Я. Антонюк, А. Г. Забуга // Обработка материалов давлением. – 2012. – №3 (30). – С. 235–241.
9. **Справочник** по автоматизированному электроприводу [Текст] / под ред. В. А. Елисева, А. В. Шинянского. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 616 с.
10. **Москаленко В. В.** Электрический привод [Текст] : учебник для студ. высш. учеб. заведений / В. В. Москаленко. – М. : Издательский центр «Академия», 2007. – 368 с.
11. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн и Т. Корн ; пер. с англ. И. Г. Арамановича [и др.] ; под общ. ред. И. Г. Арамановича. – М. : Наука, 1973. – 832 с.