

Mathematical Subject Classification: 74G05
УДК 539.3

А. А. Фесенко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЗАДАЧА СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ

Фесенко Г. О. Задача стационарной теплопроводности для напівскінченного шару. Отримано точний розв'язок задачі стационарной теплопроводности для напівскінченного шару. На нижней и боковой грани шар теплоизолирован, а на иншей грани шару задана температура, розподілена на відомій ділянці. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до одномірної крайової задачі, розв'язок якої побудовано у явному вигляді. При оберненні трансформант розв'язку виникають кратні інтеграли від циліндричних функцій. Надано методику обчислень даних інтегралів, яка базується на використанні формули Соніна. Проведено числовий аналіз значення температури шару в залежності від різних розмірів ділянки розподілу заданої температури.

Ключові слова: шар, теплопровідність, інтегральні перетворення, циліндрична функція.

Фесенко А. А. Задача стационарной теплопроводности для полубесконечного слоя. Получено точное решение задачи стационарной теплопроводности для полубесконечного слоя. По нижней и боковой граням слой теплоизолирован, а на верхней грани задана температура, распределенная по известной площадке. С помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к одномерной краевой задаче, решение которой строится в явном виде. При обращении трансформанты решения возникают кратные интегралы от осциллирующей функции. Предложена специальная методика их вычисления, основанная на применении формулы Сонина. Проведен численный анализ распределения температуры в слое при различных параметрах площадки распределения начальной температуры.

Ключевые слова: слой, теплопроводность, интегральные преобразования, цилиндрическая функция.

Fesenco A. A. The problem of the stationary heat-conduction for the semi-infinite layer. The exact solution of the stationary heat-conduction problem for the semi-infinite layer was constructed. The lower and lateral faces of the layer are heat-insulated. The temperature is given at the upper face of the layer and is distributed through the known area. The initial problem is reduced to the one-dimensional boundary problem with the help of the integral Fourier transformation. The solution of this problem is constructed in the explicit form. The multiply integrals with the oscillation function are obtained after inverting of the integral transformation. For their calculation the special method based on the Sonin's formula using is proposed. The numerical analysis was done for the investigation of the temperature distribution in the layer depending on the area parameters of the initial temperature.

Key words: layer, thermal conductivity, the integral transformations, the cylindrical function.

ВВЕДЕНИЕ. Изучение температурного распределения в слое является важным как с точки зрения приложений в различных областях инженерии, так и дальнейшего применения полученных решений при постановке задач несвязной термоупругости [1]. Задачи теплопроводности для полубесконечного слоя исследовались многими авторами как в статической, так и в динамической постановках [2, 3, 7–12]. Зачастую численный расчет по полученным формальным решениям является проблематичным в связи с наличием входящих в формулы интегралов, осциллирующих функций. В предложенной работе предлагается методика вычисления кратных интегралов от цилиндрических функций, входящих в точное решение задачи, которое построено методом интегральных преобразований [4]

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим упругий полубесконечный слой, описываемый в декартовой системе координат соотношениями

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h. \quad (1)$$

Грани $x = 0$ и $z = 0$ предполагаются теплоизолированными:

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

здесь T – температура слоя. На грани $z = h$ по участку $x \in [0, A]$, $y \in [-B, B]$ задана температура

$$T(x, y, h) = f(x, y), \quad x \in [0, A], \quad y \in [-B, B]. \quad (3)$$

Требуется построить в области (1) убывающее на бесконечности решение уравнения Лапласа

$$\Delta T(x, y, z) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4)$$

удовлетворяющее краевым условиям (2), (3).

2. Построение решения исходной задачи методом интегральных преобразований.

Введем обозначения:

$$T''(x, y, z) = \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial x^2}, \quad T^{\cdot\cdot}(x, y, z) = \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial y^2}, \quad T^{\cdot\cdot\cdot}(x, y, z) = \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial z^2}.$$

Применим к (2)–(4) косинус преобразование Фурье по переменной x [4]

$$T_\alpha(y, z) = \int_0^\infty T(x, y, z) \cos \alpha x dx, \quad T(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T_\alpha(y, z) \cos \alpha x d\alpha. \quad (5)$$

Задача (2)–(4) в трансформантах примет вид

$$-\alpha^2 T_\alpha(y, z) + T_\alpha^{\cdot\cdot}(y, z) + T_\alpha^{\cdot\cdot\cdot}(y, z) = 0, \quad T_\alpha^{\cdot\cdot}(y, 0) = 0, \quad T_\alpha(y, h) = f_\alpha(y), \quad (6)$$

где

$$f_\alpha(y) = \int_0^\infty f(x, y) \cos \alpha x dx. \quad (7)$$

Преобразование Фурье по переменной y применим к задаче (6) ([4]).

$$T_{\alpha\beta}(z) = \int_{-\infty}^\infty T_\alpha(y, z) e^{i\beta y} dy, \quad T_\alpha(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty T_{\alpha\beta}(z) e^{-i\beta y} d\beta. \quad (8)$$

Окончательно в пространстве трансформант обоих интегральных преобразований исходная задача запишется в форме

$$T_{\alpha\beta}''(z) - N^2 T_{\alpha\beta}(z) = 0, \quad z \in (0, h), \quad (9)$$

$$T_{\alpha\beta}'(0) = 0, \quad T_{\alpha\beta}(h) = f_{\alpha\beta}, \quad (10)$$

где

$$f_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^\infty f_\alpha(y) e^{i\beta y} dy, \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Общее решение уравнения (9) строится в форме

$$T_{\alpha\beta}(z) = C_1 \sinh Nz + C_2 \cosh Nz.$$

Удовлетворив граничные условия (10), найдем постоянные

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{f_{\alpha\beta}}{\cosh Nh}.$$

Решение задачи (9)–(10) в трансформантах преобразований (5), (8) имеет вид

$$T_{\alpha\beta}(z) = f_{\alpha\beta} \cdot \frac{\cosh Nz}{\cosh Nh}. \quad (11)$$

Применяя последовательно обратные преобразования (5), (8) к формуле (11), построим точное решение исходной задачи

$$T(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_{\alpha\beta} \cdot \frac{\cosh Nz}{\cosh Nh} \cdot \cos \alpha x \cdot e^{-i\beta y} d\alpha d\beta. \quad (12)$$

Учитывая представление (10), перепишем решение в виде

$$T(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \cos \alpha \xi \cdot e^{i\beta \eta} d\xi d\eta \right] \cdot \frac{\cosh Nz}{\cosh Nh} \cdot \cos \alpha x \cdot e^{-i\beta y} d\alpha d\beta. \quad (13)$$

В формуле (13) изменим порядок интегрирования.

$$T(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \cdot \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh Nz}{\cosh Nh} \cdot \cos \alpha \xi \cdot \cos \alpha x \cdot e^{i\beta \eta} \cdot e^{-i\beta y} d\alpha d\beta \right] d\xi d\eta.$$

Применение формулы (1.314(3), [6]) позволяет записать построенное решение

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh Nz}{\cosh Nh} \cdot \right. \\ \left. \cdot [\cos \alpha(x - \xi) + \cos \alpha(x + \xi)] \cdot e^{-i\beta(y-\eta)} d\alpha d\beta \right] d\xi d\eta. \quad (14)$$

Рассмотрим внутренние интегралы и воспользуемся четностью подынтегральной функции по переменной α . Используя тот факт, что интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, вычтем в формуле (14) под знаком интеграла слагаемые.

$$T(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh Nz}{\cosh Nh} \cdot [\cos \alpha(x - \xi) + \cos \alpha(x + \xi) - \\ - i \sin \alpha(x - \xi) - i \sin \alpha(x + \xi)] \cdot e^{-i\beta(y-\eta)} d\alpha d\beta.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим выражение для температуры

$$T(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \left[\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh Nz}{\cosh Nh} \cdot \right. \\ \left. \cdot [e^{-i\alpha(x+\xi)} + e^{-i\alpha(x-\xi)}] \cdot e^{-i\beta(y-\eta)} d\alpha d\beta \right] d\xi d\eta. \quad (15)$$

Воспользуемся формулой [5], учитывая, что $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = \int_0^\infty t F(t) J_0(t\sqrt{x^2 + y^2}) dt, \quad (16)$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя.

Обозначим

$$\mathbb{J}_0(t, x, y, \xi, \eta) = J_0(t\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) + J_0(t\sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}).$$

С учетом формулы (16) выражение для температуры (15) запишется в виде

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \left[\int_0^\infty t \frac{\cosh tz}{\cosh th} \cdot \mathbb{J}_0(t, x, y, \xi, \eta) dt \right] d\xi d\eta. \quad (17)$$

В результате, исходя из постановки задачи, для случая, когда в граничном условии (3) зададим $f(x, y) = C$, $C - \text{const}$, получим точное решение исходной задачи

$$T(x, y, z) = \frac{C}{2\pi} \int_0^A \int_{-B}^B \left[\int_0^\infty t \frac{\cosh tz}{\cosh th} \cdot \mathbb{J}_0(t, x, y, \xi, \eta) dt \right] d\xi d\eta. \quad (18)$$

3. Методика вычисления кратных интегралов в полученном решении.

Поменяем порядок интегрирования в интеграле (18)

$$T(x, y, z) = \frac{C}{2\pi} \int_0^\infty t \frac{\cosh tz}{\cosh th} \cdot \left[\int_0^A \int_{-B}^B \mathbb{J}_0(t, x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right] dt \quad (19)$$

и рассмотрим внутренние интегралы. Используя формулу Н. Я. Сонина [4], можно записать

$$J_0(t\sqrt{(x \pm \xi)^2 + (y - \eta)^2}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos[t \cos \psi (x \pm \xi)] \cos[t \sin \psi (y - \eta)] d\psi.$$

Подставим данное выражение в формулу (19), вычислим входящие повторные интегралы и проделаем некоторые элементарные преобразования.

$$T(x, y, z) = C \frac{4AB}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty t \frac{\cosh tz}{\cosh th} S_t^{A,B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) d\psi dt. \quad (20)$$

Здесь принято обозначение

$$S_t^{A,B}(\psi) = (tA \cos \psi)^{-1} \sin(tA \cos \psi) (tB \sin \psi)^{-1} \sin(tB \sin \psi).$$

Рассмотрим интеграл

$$J_t^{A,B}(x, y) = \frac{4AB}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} S_t^{A,B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) d\psi, \quad (21)$$

$S_t^{A,B}(\psi)$ – бесконечно дифференцируемая по переменной ψ функция. Кроме того она является четной, что позволяет путь интегрирования в интеграле принять равным $(-\pi/2, \pi/2)$, уменьшив его значение в 2 раза. Выбрав замену переменной

$$\sin \psi = \tau, \quad (22)$$

получим вместо соотношения (21)

$$J_t^{A,B}(x, y) = \frac{2AB}{\pi^2} \int_{-1}^1 F_{t,\tau}^{A,B}(x, y) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

где

$$F_{t,\tau}^{A,B}(x, y) = \frac{\sin(tA\sqrt{1-\tau^2}) \sin(tB\tau)}{tA\sqrt{1-\tau^2} tB\tau} \cos(tx\sqrt{1-\tau^2}) \cos(ty\tau).$$

Полагая в интеграле $x = 0$, $y = 0$, получим

$$J_t^{A,B}(0, 0) = \frac{2AB}{\pi^2} \int_{-1}^1 F_{t,\tau}^{A,B}(0, 0) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{2AB}{\pi} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F_{t,\tau_k}^{A,B}(0, 0), \quad (23)$$

$$\tau_k^{(N)} = \cos \frac{2k-1}{2N} \pi, \quad k = \overline{1, N}, \quad (24)$$

$\tau_k^{(N)}$ – нули многочлена Чебышева 1-го рода.

Второе равенство в соотношении (23) записано на основании квадратурной формулы наивысшей степени точности [5]. Подставив полученное равенство (23) в выражение для температуры (20), получим

$$\begin{aligned} T(0, 0, h) &= \frac{2C}{\pi N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty t F_{t,\tau}^{A,B}(0, 0) dt = \\ &= \frac{2C}{\pi N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{\sin(tA\sqrt{1-\tau_k^2}) \sin(tB\tau_k)}{tA\sqrt{1-\tau_k^2} tB\tau_k} dt, \end{aligned} \quad (25)$$

или в общем случае

$$T(x, y, z) = \frac{2C}{\pi N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{\cosh tz}{\cosh th} \frac{\sin(tA\sqrt{1-\tau_k^2}) \sin(tB\tau_k)}{tA\sqrt{1-\tau_k^2} B\tau_k} \cdot \cos(tx\sqrt{1-\tau_k^2}) \sin(ty\tau_k) dt. \quad (26)$$

Воспользуемся формулой (3.741(1), [6]):

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx \sin nx}{x} dx = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{m+n}{m-n} \right]^2, \quad m > 0, n > 0, m \neq n. \quad (27)$$

Заметим, что при $m = 0, n \neq 0$ или $n = 0, m \neq 0$ формула не противоречива, также возможно $n < 0$ ($m < 0$).

Для вычисления по формуле (27) существенным условием является требование $m \neq n$, т. е. $A\sqrt{1-\tau_k^2} \neq B\tau_k$. Если $B/A = 1$, то для определенности необходимо выполнение условия $\sqrt{1-\tau^2} - \tau \neq 0$, или исходя из произведенной замены (22), $\cos \psi \neq \sin \psi$, т. е. $\psi \neq \frac{\pi}{4}$ или $\tau \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим случай $A \neq B$. Учитывая формулу (25), получим

$$T(0, 0, h) = \frac{C}{2\pi N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \ln \left[\frac{\sqrt{1-\tau_k^2} + (B/A)\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2} - (B/A)\tau_k} \right]^2. \quad (28)$$

Если N – четное число, то исходя из свойств логарифма, выражение для температуры примет вид

$$T(0, 0, h) = \frac{C}{\pi N} \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \ln \left[\frac{\sqrt{1-\tau_k^2} + (B/A)\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2} - (B/A)\tau_k} \right]^2. \quad (29)$$

Здесь также использовано свойство нулей многочлена (24):

$$\tau_N = -\tau_1, \tau_{N-1} = -\tau_2, \dots,$$

т. е. имеется ровно N корней, расположенных симметрично в промежутке $(-1, 1)$. Можно заметить, что при нечетном N будет существовать корень $\tau_{(N+1)/2}$, что приведет к сингулярности в формуле (28). Для данного случая рассмотрен предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\tau_k = \tau_k + \varepsilon$, $\tau_k = 0$, $k = (N+1)/2$. Используя правило Лопиталья имеем

$$T(0, 0, h) = \frac{C}{\pi N} \left[2\frac{B}{A} + \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq \frac{N+1}{2}}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \ln \left[\frac{\sqrt{1-\tau_k^2} + (B/A)\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2} - (B/A)\tau_k} \right]^2 \right]. \quad (30)$$

4. Анализ численных результатов.

Рассмотрим три случая локального распределения температуры по участкам различного размера [4]: 1) $B/A = 1/2$ – температура распределена по квадрату; 2) $B/A = 2$ – по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси y ; 3) $B/A = 1/4$ – по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси x . Для случая, когда число узлов N в

формуле (29) выбиралось равным $N = 70$, а $C = 1$, значение температуры в угловой точке слоя для трех случаев было равно соответственно:

$$T(0, 0, h) = 0,999445; \quad T(0, 0, h) = 0,999444; \quad T(0, 0, h) = 0,998545.$$

Достоверность полученных результатов проверялась на основании формулы 3.364 (2), [6]. Также обосновать результат можно непосредственно, рассматривая граничное условие (3) задачи. Исходя из применяемых интегральных преобразований (5), (8), можно найти трансформанту заданной функции:

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(y) &= \int_0^{\infty} f(x, y) \cos \alpha x dx = C \cdot \int_0^A \cos \alpha x dx = C \cdot \frac{\sin \alpha A}{\alpha}, \\ f_{\alpha\beta} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(y) e^{i\beta y} dy = C \cdot \frac{\sin \alpha A}{\alpha} \int_{-B}^B e^{i\beta y} dy = \\ &= C \cdot \frac{\sin \alpha A}{\alpha} \cdot \frac{2(e^{i\beta B} - e^{-i\beta B})}{2i\beta} = 2C \cdot \frac{\sin \alpha A}{\alpha} \cdot \frac{\sin \beta B}{\beta}. \end{aligned}$$

Подставим полученную трансформанту в формулу (12) и найдем значение в угловой точке слоя, т. е.

$$\begin{aligned} T(0, 0, h) &= \frac{2C}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha A}{\alpha} \frac{\sin \beta B}{\beta} d\alpha d\beta = \\ &= \frac{4C}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha A}{\alpha} \frac{\sin \beta B}{\beta} d\alpha d\beta = \frac{4C}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = C, \end{aligned}$$

здесь воспользовались четностью подынтегральной функции по переменной β и формулой (3.721(1), [6]).

На рисунках 1, 2 и 3 приведены значения температуры (26) на поверхности $z = h/2$, $0 < x < 2A$, $-2B < y < 2B$ при толщине слоя $h = 1$ для $C = 1$. Эти три случая соответствуют участкам $B/A = 1/2$, $B/A = 2$, $B/A = 1/4$. Как видно из анализа полученных графиков, максимальное значение температуры, равное 0,7, достигается при размере участка нагрева $B/A = 2$. При размере $B/A = 1/4$ достигается минимальное значение температуры на исследуемой поверхности. Для всех трех случаев характерно расположение экстремальных значений на границе области. При увеличении толщины слоя ($h = 2$) общая картина распределения температуры на рассматриваемой поверхности сохраняется при уменьшении ее абсолютных значений (см. рис. 4, случай $B/A = 1/2$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Получено точное решение задачи стационарной теплопроводности для слоя.
2. Исследовано значение температуры при различных параметрах площадки распределения температуры, приведены численные результаты.
3. Приведена методика вычисления кратных интегралов, содержащих цилиндрическую функцию.
4. Построенное решение используется в дальнейшем решении задачи несвязной термоупругости.

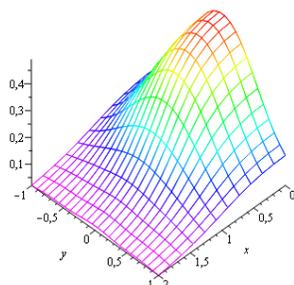


Рис. 1

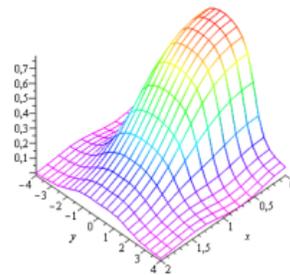


Рис. 2

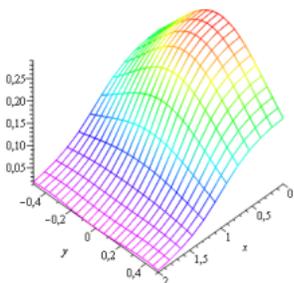


Рис. 3

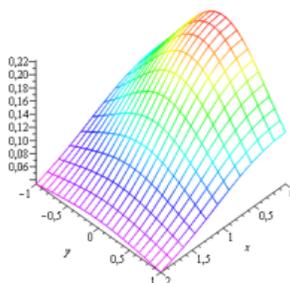


Рис. 4

1. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости / Новацкий В. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
2. **Кіт Г. С.** Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) / Кіт Г. С. // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – 51, № 4. – С. 120–128.
3. **Немировский Ю. С.** Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных пластин методом начальных функций / Немировский Ю. С., Янковский А. П. // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 2008. – 51, № 2. – С. 222–238.
4. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Попов Г. Я. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
5. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов / Крылов В. И. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
6. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Градштейн И. С., Рыжик И. М. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
7. **Povstenko Y. Z.** Thermoelasticity which uses fractional heat conduction equation / Povstenko Y. Z. // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – 51, № 2. – С. 239–246.

-
8. **Takhar H. S.** Unsteady flow and heat transfer on a semi-infinite flat plate with an aligned magnetic field / H. S. Takhar, A. J. Chamkha, G. Nath // *International Journal of Engineering Science*. – 1999. – 37. – С. 1723–1736.
 9. **Kulchytsky-Zhyhailo R.** On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer / R. Kulchytsky-Zhyhailo, S. J. Matysiak // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 2005. – 32. – С. 123–132.
 10. **Matysiak S. J.** On heat conduction in a semi-infinite laminated layer. Comparative results for two approaches / S. J. Matysiak, D. M. Perkowski // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 2010. – 37. – С. 343–349.
 11. **Haji-Sheikh A.** Temperature field in a moving semi-infinite region with a prescribed wall heat flux / A. Haji-Sheikh, Donald E. Amos, J. V. Beck // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2009. – 52. – С. 2092–2101.
 12. **Rabinovich A.** Heat conduction in a semi-infinite medium with a spherical inhomogeneity and time-periodic boundary temperature / A. Rabinovich, G. Dagan, T. Miloh // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2012. – 55. – С. 618–628.