

МАТЕМАТИКА

Mathematical Subject Classification: 47F05, 47A10

УДК 517.94

Г. А. Закирова, Е. В. Кириллов

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ L-СЛЕД ОДНОГО ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

Закирова Г. А., Кириллов Е. В. Регуляризованный L-след одного возмущенного оператора. В работе за допомогою модифікованого резольвентного методу отримано формулу відносного регуляризованого сліду збуреного дискретного самоспряженого оператора.

Ключові слова: відносний регуляризований слід, дискретний оператор.

Закирова Г. А., Кириллов Е. В. Регуляризованный L-след одного возмущенного оператора. В данной работе с помощью модифицированного резольвентного метода получена формула относительного регуляризованного следа возмущенного дискретного самосопряженного оператора.

Ключевые слова: относительный регуляризованный след, дискретный оператор.

Zakirova G. A., Kirillov E. V. L-regularized trace of one of the perturbed operator. In this paper, using the modified method of the resolvent, getting a formula of relative regularized trace for an perturbed discrete and self-adjoint operator.

Key words: relative regularized trace, discrete operator.

ВВЕДЕНИЕ. Истоки теории регуляризованных следов относят к работе И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана 1953 г. [1], в которой была найдена асимптотика собственных чисел оператора Штурма-Лиувилля. В 60-е годы эта теория была практически завершена для обыкновенных дифференциальных операторов работами В. Б. Лидского, В. А. Садовниченко [2, 3, 4].

Вычисление регуляризованных следов является одной из важнейших задач спектрального анализа. Не всегда удается напрямую найти асимптотику собственных чисел операторов или же это сопровождается большими трудностями. Метод регуляризованных следов позволяет значительно упростить поиск асимптотики собственных чисел.

При работе с сингулярными операторами или операторами с неядерной резольвентой вычислить регуляризованный след удается не всегда. В связи с этим в 2005 году в работе [5] А. И. Седовым была выдвинута идея использования так называемых относительных регуляризованных следов. Терминология и основные утверждения были взяты из теории уравнений соболевского типа, разработанной Г. А. Свиридьюком [6] и его учениками.

Имеет место и практическая значимость. Например, формула регуляризованного следа оператора Штурма-Лиувилля описывает закон сохранения энергии динамической системы, описываемой уравнением Кортевега—Де Фриза [7]. Формулы регуляризованных следов, вычисленные И. М. Лифшицом в работе [8],

имеют следующий физический смысл: с их помощью было найдено изменение свободной энергии кристалла при внедрении в него чужеродной примеси.

Рассмотрим уравнение Дзекцера

$$(a^2 - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f,$$

моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [9]. Здесь параметры $\alpha, \beta > 0$, $a^2 \in \mathbb{R}$ характеризуют среду, свободный член $f = f(x)$ соответствует источникам (стокам) жидкости.

В данной работе рассматривается одномерный случай, т. е. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Зададим операторы $T, L : U \rightarrow F$ формулами

$$T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2}, \quad L = a^2 - \Delta, \quad (1)$$

причем

$$\begin{aligned} F &= W_2^k(0, \pi), k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \\ U &= \{W_2^{k+2}(0, \pi) : u(0) = u(\pi) = 0\}, \\ \text{dom} T &= \{u \in W_2^{k+2}(0, \pi) : u''(0) = u''(\pi) = 0\} \cap U. \end{aligned}$$

Пусть P — оператор умножения на, вообще говоря, комплекснозначную функцию $p \in C^2(0, \pi)$, удовлетворяющую условию:

$$p'(0) = p'(\pi).$$

Рассмотрим оператор $T + P$. Обозначим через $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty = \sigma^L(T + P)$ — где ν_n занумерованы в порядке невозрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Введем необходимые определения:

Определение 1. [10] $\rho^L(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - T)^{-1} \in \mathcal{L}(F; U)\}$ — резольвентное множество оператора T относительно оператора L .

Определение 2. [10] Множество $\sigma^L(T) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(T)$.

Определение 3. [10] $R_0(\mu) = (\mu L - T)^{-1}$ — L -резольвента оператора T .

Определение 4. [10] $R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1}$ — L -резольвента оператора $T + P$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассмотрим операторы T и L , заданные формулой (1). Очевидно, что

$$\mu_n = \lambda_n \frac{\beta\lambda_n - \alpha}{\lambda_n - a^2}, \quad (2)$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty = \sigma(\Delta)$ — собственные числа оператора Лапласа, порожденного краевой задачей Дирихле:

$$\Delta u = a^2 u, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Известно, что

$$\lambda_n = -n^2.$$

Для оператора L имеем:

$$L\varphi_s = (a^2 - \Delta)\varphi_s = (a^2 - \lambda_s)\varphi_s = \begin{cases} (a^2 - \lambda_s)\varphi_s, & a^2 \neq \lambda_s \\ 0, & a^2 = \lambda_s \end{cases},$$

поэтому:

$$R_0^L(\mu)\varphi_s = \begin{cases} \frac{\varphi_s}{\mu - \mu_s}, & a^2 \neq \lambda_s, \\ 0, & a^2 = \lambda_s, \end{cases} \quad (3)$$

$$R_0(\mu)\varphi_s = \begin{cases} \frac{\varphi_s}{\beta a^4 - \alpha a^2}, & a^2 = \lambda_s, \\ \frac{\varphi_s}{(\mu - \mu_s)(a^2 - \lambda_s)}, & a^2 \neq \lambda_s. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, что операторы $R_0(\mu), R_0^L(\mu), \mu \in \rho(T)$, являются ядерными, поскольку ряды из собственных чисел данных операторов сходятся.

Выберем $\gamma_n = \{\mu : |\mu - \mu_n| = r_n, \quad r_n = n\beta - \frac{\beta}{2}\}$.

1. Необходимые утверждения

Лемма 1. Если при $\mu \in \gamma_n$ $\|PR_0(\mu)\| = q < 1$, то справедливо равенство

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu). \quad (5)$$

Доказательство.

Рассмотрим тождество

$$\mu L - T - P = (\mathbb{I} - pR_0(\mu))(\mu L - T).$$

Так как $\|PR_0(\mu)\| < 1$, то существует линейный ограниченный оператор

$$R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1} = R_0(\mu)(\mathbb{I} - pR_0(\mu))^{-1}.$$

Из этого соотношения следует, что $R(\mu) = R_0(\mu)B(\mu)$, где $B(\mu)$ — некоторый ограниченный оператор. Поскольку T — дискретный оператор, то $R_0(\mu)$ является вполне непрерывным, следовательно, $R(\mu)$ есть также вполне непрерывный оператор, т. е. оператор $T + P$ является дискретным. Из последнего соотношения также следует, что $R(\mu)$ — ядерный оператор, для которого справедливо разложение в сходящийся по норме ряд:

$$R(\mu) = R_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_0(\mu)P]^k R_0(\mu),$$

отсюда, домножив предыдущее тождество на L слева, получим

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu).$$

Лемма 2. Пусть $\mu \in \rho^L(T)$, тогда выполняется следующая оценка:

$$\|LR_0(\mu)\| \leq \frac{1}{\rho(\mu, \sigma^L(T))}, \quad (6)$$

здесь $\rho(\mu, \sigma^L(T))$ означает расстояние от точки μ до L -спектра оператора T .
Доказательство.

Пусть $\lambda \in \rho^L(T)$. Известно представление L -резольвенты оператора T в виде ряда Неймана

$$R_0(\lambda) = R_0(\mu) \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k (LR_0(\mu)).$$

Очевидно, что ряд в правой части абсолютно сходится, по крайней мере для тех λ , которые удовлетворяют условию $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|LR_0(\mu)\|}$.

Отсюда получим

$$\|LR_0(\mu)\| \leq \frac{1}{\rho(\mu, \sigma^L(T))}.$$

2. Вычисление относительного регуляризованного следа возмущенного оператора $T + P$

Рассмотрим норму разности проекторов Рисса:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R(\mu) - R_0(\mu)) d\mu \right\| &\leq \int_{\gamma_n} \|R_0(\mu)P\| \cdot \|R(\mu)\| |d\mu| < \\ &< \int_{\gamma_n} \|R_0(\mu)L\| \cdot \|R(\mu)\| |d\mu| < 1. \end{aligned}$$

Поэтому все корневые подпространства оператора $T + P$ имеют такую же размерность, что и оператор T , следовательно, спектр оператора $T + P$ в данном случае будет однократным. Рассмотрим ряд (5)

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu).$$

Умножим правую и левую части данного равенства на $\frac{\mu}{2\pi i}$ и проинтегрируем полученное равенство по контуру γ_n . Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu LR(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu LR_0(\mu) d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu [R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu) d\mu.$$

Найдем матричный след от обеих частей полученного равенства, при этом воспользуемся ядерностью операторов T и $T + P$.

$$\begin{aligned} Sp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu L R_0(\mu) d\mu &= Sp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\mu - \mu_k} d\mu = \mu_n Sp P_n = \mu_n \sum_{s=1}^{\infty} (P_n \varphi_s, \varphi_s) = \\ &= \mu_n \sum_{s=1}^{\infty} ((\varphi_s, \varphi_n) \varphi_n, \varphi_s) = \mu_n \sum_{s=1}^{\infty} ((\varphi_s, \varphi_n) (\varphi_n, \varphi_s)) = \mu_n. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$Sp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu L R(\mu) d\mu = \nu_n.$$

Для оценок поправок теории возмущений используем следующую лемму, известную из [11]:

Лемма 3. При $\mu \in \gamma_n$ справедлива следующая оценка

$$\|R_0(\mu)\| = O(n^{-2}).$$

Оценим l -ю поправку теории возмущений.

$$\begin{aligned} |\alpha_n^l| &= |Sp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu (R_0(\mu) P)^l L R_0(\mu) d\mu| = \frac{1}{2\pi l} \left| \int_{\gamma_n} Sp (P R_0)^l d\mu \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi l} \int_{\gamma_n} |Sp (P R_0)^l| * |d\mu| \leq \frac{1}{2\pi l} \int_{\gamma_n} \max_{\mu \in \gamma_n} \|(P R_0)^l\|_1 |d\mu| = \\ &= \frac{1}{2\pi l} \max_{\mu \in \gamma_n} \|(P R_0)^l\|_1 \int_{\gamma_n} |d\mu| \leq \frac{r_n}{l} \max_{\mu \in \gamma_n} \|(P R_0)^{l-2}\| * \max_{\mu \in \gamma_n} \|(P R_0)^2\|_1 \leq \\ &\leq \frac{r_n}{l} \max_{\mu \in \gamma_n} \|(P R_0)^{l-2}\| \cdot \max_{\mu \in \gamma_n} \|(P R_0)\|_2^2 \leq \frac{r_n \|P\|^l}{l} \max_{\mu \in \gamma_n} \|R_0\|^{l-2} \cdot \max_{\mu \in \gamma_n} \|R_0\|_2^2 = \\ &= \frac{r_n \|P\|^l}{l} \cdot \frac{1}{r_n^{l-2}} \cdot \max_{\mu \in \gamma_n} \|R_0\|_2^2 = O(n^{1-l}). \end{aligned}$$

Вычислим первую поправку теории возмущений, используя равенства (3), (4):

$$\begin{aligned} \alpha_n^1 &= Sp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu R_0(\mu) P L R_0(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu Sp (R_0(\mu) P L R_0(\mu)) d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu \sum_{s=1}^{\infty} (R_0(\mu) P L R_0 \varphi_s, \varphi_s) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu \sum_{s=1}^{\infty} (P R_0^2(\mu) L \varphi_s, \varphi_s) d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \mu \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(P \varphi_s, \varphi_s)}{(\mu - \mu_s)^2 (a^2 - \lambda_s)} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\infty} (P \varphi_s, \varphi_s) \int_{\gamma_n} \frac{\mu}{(\mu - \mu_s)^2 (a^2 - \lambda_s)} d\mu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} (P\varphi_n, \varphi_n) \int_{\gamma_n} \frac{\mu}{(\mu - \mu_n)^n (a^2 - \lambda_n)} d\mu = \\
&= \frac{1}{2\pi i} (P\varphi_n, \varphi_n) \int_{\gamma_n} \frac{\mu d\mu}{(\mu - \mu_n)^2 (a^2 - \lambda_n)} = \frac{(P\varphi_n, \varphi_n)}{a^2 - \lambda_n}.
\end{aligned}$$

Вычислим $(P\varphi_n, \varphi_n)$. В качестве $\{\varphi_n\}$ возьмем ортонормированный набор собственных функций оператора Лапласа, занумерованный по невозрастанию собственных значений λ_k с учетом их кратности.

$$\begin{aligned}
(P\varphi_n, \varphi_n) &= \int_0^\pi p(x) \varphi_n^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(x) \sin^2(nx) dx = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(x) \left(\frac{1 - \cos(2nx)}{2} \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) \cos(2nx) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx + \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi p'(x) \sin(2nx) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx + \frac{1}{4\pi n^2} \int_0^\pi p''(x) \cos(2nx) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p''(x) \cos(2nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{pi} p(x) dx + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

С учетом произведенных вычислений получим

$$\alpha_n^1 = \frac{\frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx + \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^\pi p''(x) \sin(nx) dx}{a^2 - \lambda_n} = \frac{\frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx + O(n^{-2})}{a^2 - \lambda_n}.$$

Вычислим вторую поправку:

$$\begin{aligned}
\alpha_n^2 &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq a, \\ m \neq n}}^\infty \left[\frac{(Pv_m, v_n)(Pv_n, v_m)(\lambda_n - a^2)}{(\beta\lambda_n^2 - \alpha\lambda_m)(\lambda_n - a^2) - (\beta\lambda_n^2 - \alpha\lambda_n)(\lambda_m - a^2)} \right] - \\
&- \left[\frac{(Pv_n, v_a)(Pv_a, v_n)}{\beta a^4 - \alpha a^2} \right]_{n \neq a} \leq O(1) \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq a, \\ m \neq n}}^\infty \frac{1}{(n-m)^5 n} - O(n^{-4}) = O(n^{-4}).
\end{aligned}$$

Сводя воедино все вычисления, получим что ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \left[\nu_n - \mu_n - \frac{2}{\pi(a^2 - \lambda_n)} \int_0^\pi p(x) dx \right]$$

сходится.

Таким образом, доказана следующая:

Теорема 1. Если выполнены условия

- 1) $p'(0) = p'(\pi)$,
- 2) $\|P\| < \frac{\beta}{2}$,
- 3) $p(x) \in C_{[0,\pi]}^2$,

тогда справедлива формула относительного регуляризованного следа возмущенного оператора $T + P$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu_n - \mu_n - \frac{2}{\pi(a^2 - \lambda_n)} \int_0^{\pi} p(x) dx \right] = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Было показано, что в условиях поставленной задачи возмущенный оператор имеет дискретный спектр, и получена формула его относительного регуляризованного следа.

1. Гельфанд И. М. Об одном тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // ДАН СССР. – 1991. – Т. 84, № 4. – С. 593–596.
2. Лидский В. Б. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций / В. Б. Лидский, В. А. Садовничий // Функциональный анализ и его приложения. – 1967. – Т. 2. – С. 52–59.
3. Садовничий В. А. Следы операторов / В. А. Садовничий, В. Е. Подольский // УМН. – 2006. – Т. 61. – Вып. 5. – С. 89–156.
4. Садовничий В. А. Дзета-функция и собственные числа дифференциальных операторов // Дифф. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 1276–1285.
5. Седов А. И. Регуляризованный след оператора с неядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Вестник МаГУ. – 2005. – Вып. 8. – С. 173–177.
6. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equation and Degenerator Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov // Utrecht, Boston. – 2003.
7. Захаров В. Е. Уравнение Кортевега—де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система / В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев // Функциональный анализ и его приложения. – 1971. – Т. 5, вып. 8. – С. 18–27.
8. Лифшиц И. М. Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой / В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев // УМН. – 1952. – Т. 7, вып. 1. – С. 171–180.
9. Дзекцер И. М. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.
10. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. – 1994. – Т. 49, вып. 4. – С. 47–74.
11. Като Т. Теория возмущения линейных операторов / Като Т. – М.: Мир, 1972. – 739 с.