

Mathematical Subject Classification: 35Q35, 65M60
УДК 517.9

А. А. Замышляева, А. С. Муравьев
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

Замышляева А. О., Муравйов А. С. Чисельне дослідження математичної моделі Буссінеска – Лява. Стаття присвячена дослідженню математичної моделі Буссінеска – Лява. У статті наведена теорема про існування та єдиності розв'язку рівняння Буссінеска – Лява і опис алгоритму для чисельного вирішення поставленого завдання.

Ключові слова: модель Буссінеска – Лява, рівняння соболевського типу.

Замышляева А. А., Муравьев А. С. Численное исследование математической модели Буссинеска – Лява. Статья посвящена исследованию математической модели Буссинеска – Лява. В статье приведена теорема о существовании и единственности решения уравнения Буссинеска – Лява и описание алгоритма для численного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: модель Буссинеска – Лява, уравнения соболевского типа.

Zamyshlyayeva A. A., Muravyov A. S. Numerical study of mathematical models of Boussinesq – Love. The article is devoted to the study of the Boussinesq – Love mathematical model. In this paper we present a theorem on the existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq – Love equation and description of the algorithm for the numerical solution of the problem.

Key words: Boussinesq – Love model, Sobolev type equations.

ВВЕДЕНИЕ. Интерес к уравнениям соболевского типа обусловлен тем, что многие физические процессы и явления, такие как фильтрация вязкоупругой жидкости [1], выпучивание двутавровых балок [2], колебания в молекулах ДНК [3], распространение волн на мелкой воде [4], ионно-звуковых волн в плазме [5], фазовые переходы в рамках мезоскопической теории [6] и др. описываются такими уравнениями. В нашем случае речь пойдет о частном случае уравнения соболевского типа, а именно об уравнении Буссинеска – Лява.

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\lambda' - \Delta)u_t + \beta(\lambda'' - \Delta)u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (1)$$

с начальными

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), & 0 < x < \pi \end{aligned} \quad (2)$$

и краевыми

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3)$$

условиями. Здесь $u = u(x, t)$ – неизвестная функция, φ, ψ – заданные функции, подлежат дальнейшему определению, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – одномерный оператор Лапласа. Математическая модель (1) – (3) описывает продольные колебания упругого

стержня с учетом поперечной инерции. Математическая теория упругости наиболее полно отражена в монографии [7].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Теорема о существовании и единственности решения.

Теорема 1. Пусть функции φ, ψ непрерывны и имеют кусочно-непрерывную производную на $[0, \pi]$, причём $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \psi(0) = \psi(\pi) = 0$. Тогда

(i) если $\lambda \neq -l^2, l \in \mathbb{N}$, то задача (1)–(3) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\varphi_k - \frac{\psi_k - \mu_{k_1} \varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} \right) e^{\mu_{k_1} t} + \frac{\psi_k - \mu_{k_1} \varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_2} t} \right) \sin kx;$$

(ii) если $\lambda = -l^2$ и $\lambda' \neq -l^2$ и выполняется

$$\varphi_l = \frac{\psi_l}{\mu_l},$$

то задача (1)–(3) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\varphi_k \mu_{k_2} - \psi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_1} t} + \frac{\psi_k - \mu_{k_1} \varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_2} t} \right) \sin kx \right) + \varphi_l \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\mu_l t} \sin lx,$$

(iii) если $\lambda = \lambda' = -l^2$, то при условии выполнения

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin lxdx = 0 \Leftrightarrow \varphi_l = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin lxdx = 0 \Leftrightarrow \psi_l = 0, \end{cases}$$

задача (1)–(3) имеет решение, представимое в виде:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_k \mu_{k_2} - \psi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_1} t} + \frac{\psi_k - \mu_{k_1} \varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_2} t} \right) \sin kx.$$

2. Алгоритм численного решения. Описание программы для ЭВМ.

На основании полученной теоремы была разработана и реализована в среде Maple 15.0 для Windows программа для численного решения задачи Буссинеска – Лява (1)–(3) на языке программирования Maple. Для разработки алгоритма программы был применен модифицированный метод Галеркина. В программе можно управлять точностью нахождения решения в виде количества слагаемых галеркинской суммы. Блок-схема алгоритма представлена на рисунке 1.

Опишем алгоритм подробнее. Каждому блоку алгоритма соответствует один шаг.

Шаг 1. После начала выполнения программы необходимо ввести количество слагаемых галеркинской суммы N , коэффициенты $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$, начальные

условия u_0, u_1 , отрезок $[s_0, s_1]$, на котором ищется решение, и промежуток времени $t \in [0, \tau]$.

Шаг 2. В цикле от 1 до N составляется искомое приближенное решение V в виде галеркинской суммы $\sum_{m=1}^N a_m(t) \sin mx$.

Шаг 3. Выражения для V подставляются в уравнение.

Шаг 4. В цикле по i от 1 до N уравнение умножается на собственную функцию $\varphi_m(x)$ и интегрируется на отрезке $[s_0, s_1]$.

Шаг 5. Проверка принадлежности λ спектру оператора Лапласа, то есть представимо ли λ в виде $-k^2$.

Если на пятом шаге истина:

Шаг 6. Проверка условия $\lambda = \lambda_1$.

Если на шестом шаге истина:

Шаг 7. Проверка условия из третьего пункта теоремы 3 для начальных условий, а именно, что $a_k(0) = 0$ и $a_k'(0) = 0$.

Если на седьмом шаге истина:

Шаг 8. В цикле от 1 до N согласно третьему пункту теоремы 3 составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений, исключая k -е уравнение.

Шаг 9. Начальные функции раскладываются в галеркинскую сумму, исходя из них определяются начальные условия для системы уравнений, полученной на предыдущем шаге, исключая условия с номером k .

Шаг 10. Отдельно решается алгебраическое уравнение относительно $a_k(t)$. Таким образом будет найдено k -е слагаемое галеркинской суммы. Далее выполняется шестнадцатый шаг.

Если на шестом шаге ложь:

Шаг 11. В соответствии со вторым пунктом теоремы 3 проверяется условие для начальных данных, что $a_k(0) = \frac{a_k(0)}{\mu_k}$. Где μ_k — корень характеристического уравнения для уравнения Буссинеска – Лява (1).

Если на одиннадцатом шаге истина:

Шаг 12. В цикле от 1 до N составляется однородная система дифференциальных уравнений, особенностью которой является, что k -е уравнение этой системы будет однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Далее выполняется четырнадцатый шаг.

Если на пятом шаге ложь:

Шаг 13. В цикле от 1 до N составляется система однородных дифференциальных уравнений.

Шаг 14. Начальные условия раскладываются в галеркинскую сумму, исходя из них определяются начальные условия для системы уравнений, полученной ранее. Далее выполняется шестнадцатый шаг.

Если на седьмом или одиннадцатом шаге ложь:

Шаг 15. В соответствии с третьим пунктом теоремы 3 программа выводит сообщение, что решений нет.

Шаг 16. Полученная система однородных дифференциальных уравнений с начальными данными решается методом, встроенным в пакет Maple 15.

Шаг 17. Полученное решение выводится на экран в виде функции и в виде графика.

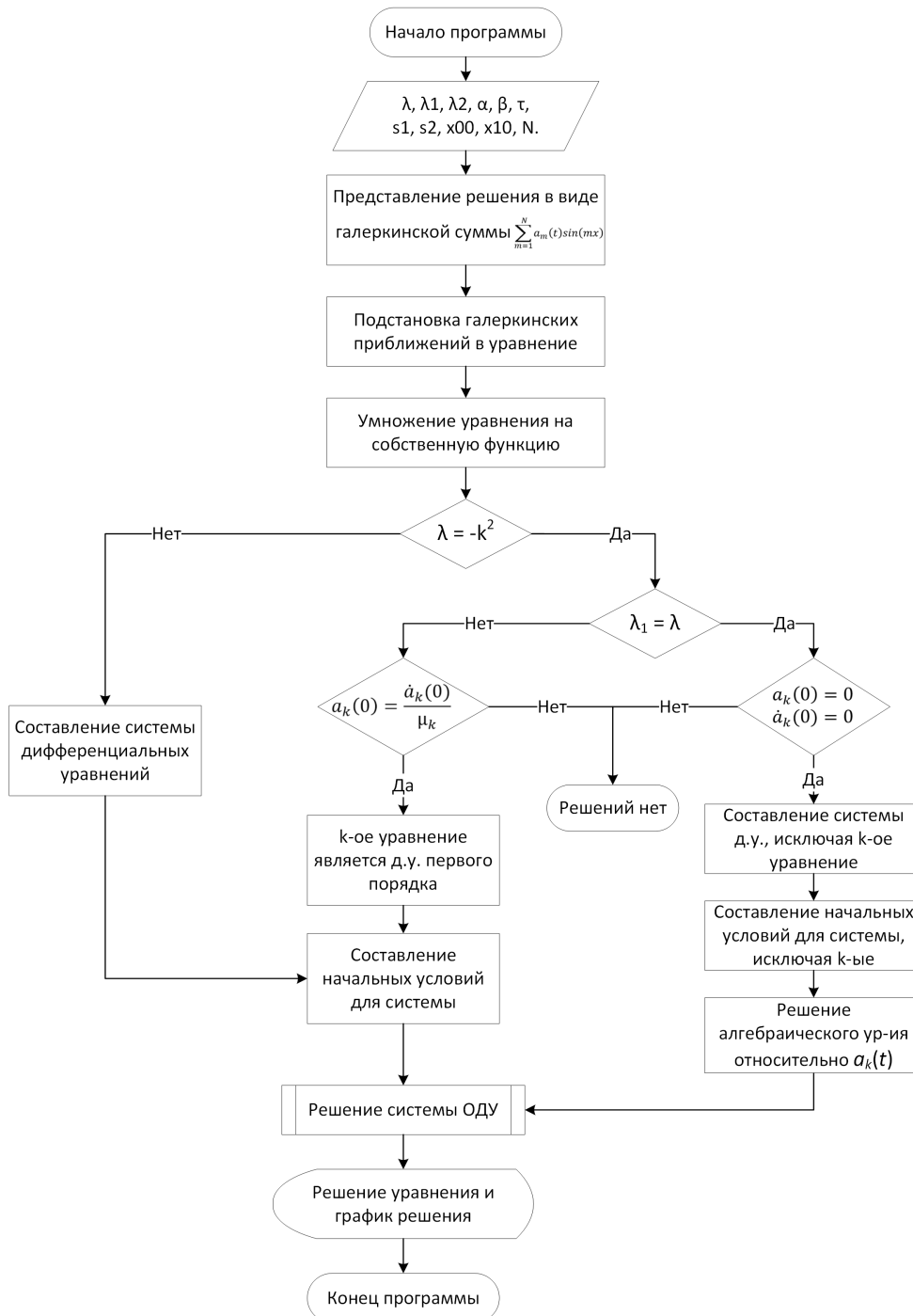


Рис. 1. Блок-схема алгоритма метода решения задачи (1) – (3)

3. Вычислительный эксперимент.

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява (1)

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\lambda' - \Delta)u_t + \beta(\lambda'' - \Delta)u, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\lambda = -1$, $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$, $\alpha = \beta = 1$, с граничными $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ и начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin 2x, \\ u_t(x, 0) &= \sin 3x. \end{aligned}$$

При помощи алгоритма, описанного выше, было получено приближенное решение при $N = 6$:

$$u(x, t) = \left(\frac{3}{4}e^{-\frac{2t}{3}} + \frac{1}{4}e^{2t} \right) \sin 3x + \left(\frac{8}{123}\sqrt{41}e^{\frac{3(3+\sqrt{41})t}{16}} - \frac{8}{123}\sqrt{41}e^{-\frac{3(-3+\sqrt{41})t}{16}} \right) \sin 4x.$$

График решения представлен на рисунке 2.

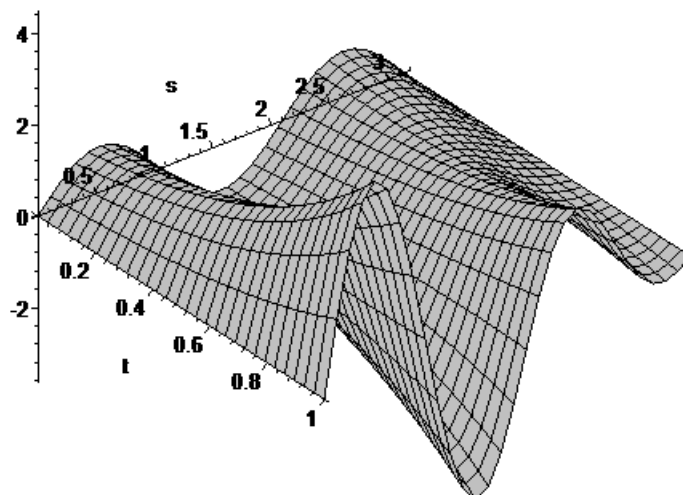


Рис. 2. Решение уравнения Буссинеска – Лява

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Теоретические результаты, представленные в теореме 1, были применены для разработки и реализации в среде Maple 15.0 программы для численного решения задачи (1) – (3) на языке программирования Maple. Данная программа позволяет находить численное решение для задачи (1) – (3) с произвольными параметрами $\lambda, \lambda', \lambda'', \alpha$ и β , а также с произвольными начальными условиями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

1. **Баренблатт Г. И.** Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Прикл. мат. и механ. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

2. **Hoff N. J.** Creep buckling / N. J. Hoff // *Aeron.* – 1956. – V. 7, № 1. – P. 1–20.
3. **Muto V.** Toda lattice model for DNA: thermally generated solitons / V. Muto, Ac. Scott, Pl. Christiansen // *Physica D.* – 1990. – № 44. – P. 75–91.
4. **Уизем Д.** Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977.
5. **Инези И.** Экспериментальное исследование солитонов в плазме : Солитоны в действии. – М.: Мир, 1981. – С. 161–184.
6. **Плотников П. И.** Уравнение фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П. И. Плотников, А. В. Клепачева // *Сиб. мат. журн.* – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651–669.
7. **Ляв А.** Математическая теория упругости / А. Ляв; пер. с англ. Б. В. Булгаков, В. Я. Натанзон. – М. : ОНТИ, 1935. – 674 с.