Mathematical Subject Classification: 49N25
УДК: 517.9

Г. С. Зима
Донбаський державний педагогічний університет

ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Зима Г. С. Існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Для деяких класів імпульсних систем отримано умови існування оптимальних керувань в термінах правих частин та критерію якості.
Ключові слова: оптимальне керування, імпульсна дія, момент імпульсу, стрибок.

Зима А. С. Существование оптимального управления для некоторых классов систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Для некоторых классов импульсных систем получены условия существования оптимальных управлений в терминах правых частей и критерия качества.
Ключевые слова: оптимальное управление, импульсное воздействие, момент импульса, скачок.

Zima G. S. Existence of optimal controls for some classes of the systems of differential equations with an impulsive action. It is showed the conditions of existence of optimal controls for some classes of the systems of differential equations in terms of their right parts and cost function.
Key words: optimal controls, impulsive action, moment of impulse, jump.

Вступ. В даній роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t,x) + B(t,x)u, \quad t \neq t_i, \\ \triangle\, x|_{t=t_i} = g_i(x)w_i, \\ x(0) = x_0 \end{gathered} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$\begin{gathered} C(u,w) = \int\limits_0^T [A^0(t,x) + B^0(t,u)]dt + A^1(x(t_1),...,x(t_N),t_1,...,t_N) + \\ + B^1(w_1,...,w_N,t_1,...,t_N) \to inf, \end{gathered} \tag{2}$$

де $T > 0$ фіксоване, $t \in [0,T]$, $t_i \in (0,T]$ — моменти імпульсної дії, $N = N(T) < \infty$ — кількість моментів імпульсної дії на $(0,T]$.

Більш точна постановка задачі буде зроблена в основній частині роботи.

Подібні задачі раніше розглядалися в роботах багатьох авторів. Так, в монографії [1] така задача розглядалася з точки зору оптимальних імпульсних керувань. Це означає, що керування присутнє лише в імпульсній частині. Автори запропонували розв'язання такої задачі методом квазіваріаційних нерівностей.

Методи розв'язання такої задачі з точки зору розривних динамічних систем з подальшим застосуванням принципу максимума розвивалися в роботах Л. Т. Ащепкова та його учнів (див. наприклад [2]), де є широка бібліографія.

В монографії [3] для імпульсних систем розвиваються варіаційні підходи в комбінації з принципом максимума. Відзначимо також роботи [4], [5], [6], де отримано принцип максимума для систем з нефіксованими моментами імпульсів.

В роботі [7] задача оптимального керування імпульсними системами зводиться до задачі оптимального керування для рівнянь з мірами в деякому банаховому просторі, при цьому в ролі керування виступають скінченні міри. В результаті задача набуває вигляду

$$dx = Axdx + f(t,x)dt + g(t,x)v(dt) + C(t,x)u(dt),$$

$$x(0) = x_0, \quad t \in I,$$

$$J(u) = \int_I l(t,x(t))dt + \Psi(x(T)) + \varphi(u) \to inf,$$

тут $u(dt)$ — міра, що є параметром керування. При досить серйозних припущеннях, а саме:

1) ліпшицевість і лінійний ріст функцій f, g, C за змінною x;

2) слабка компактність множини допустимих керувань;

3) демінеперервність оператора $L_t(u) = \int\limits_0^t e^{A(t-s)}C(s,x(s))u(ds), \quad t \in I,$

тут доводиться існування оптимальних керувань для такої задачі.

В роботі [8] розглянута задача оптимального керування імпульсною системою при нелокальних крайових умовах. За допомогою варіації керування тут отримані різні необхідні умови оптимальності другого порядку.

Однак відзначимо, що отримані в перерахованих вище роботах результати носять в основному характер необхідних умов існування оптимального керування. Виключення складає лише лінійний випадок, для якого з принципу максимума можна отримати достатні умови існування оптимальності. Тому актуальною є задача отримання достатніх умов оптимальності для нелінійних імпульсних систем в термінах їх правих частин та критерія якості, без застосування принципу максимума. Результати, отримані в роботі, є узагальненням результатів роботи [9] на імпульсний випадок.

Робота складається зі вступу, постановки задачі, основного результату та прикладу.

Постановка задачі. Розглядається задача оптимального керування (1), (2), де $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — фіксований вектор, $T > 0$ фіксоване, $t \in [0,T]$, $t_i \in (0,T]$ — моменти імпульсної дії, $N = N(T) < \infty$ — кількість моментів імпульсної дії на $(0,T]$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, U — замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^m$, що містить точку 0, $w_i \quad (i = \overline{1,N}) \subset V$, V — замкнена множина в $\mathbb{R}^r$, що містить точку 0. Тут $A(t,x)$ — n-мірна вектор-функція, $B(t,x)$ — $n \times m$-мірна матриця, g_i — $n \times r$-мірні матриці.

Функції $A(t,x), B(t,x)$ вважаються неперервними за сукупністю змінних $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g_i(x)$ — неперервні за $x \in \mathbb{R}^n$. Будемо вважати також, що для них виконана умова лінійного по x росту, тобто існує стала $K > 0$ така, що для $t \in [0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered} | A(t,x) | \leq K(1+ | x |), \\ \| B(t,x) \| \leq K(1+ | x |), \quad | g_i | \leq K(1+ | x |), \end{gathered} \tag{3}$$

тут $|\cdot|$ — евклідова норма вектора, а $\|\cdot\|$ — норма матриці, узгоджена з нормою вектора.

Відносно функцій A^0, B^0, A^1, B^1, що входять до критерію якості (2), будемо вважати, що вони є неперервними за сукупністю змінних, причому $A^0 \geq 0, A^1 \geq$ ≥ 0, а B^0 та B^1 задовольняють умови:

$$\begin{gathered} B^0(t,u) \text{ — опукла по } u \text{ та } \quad B^0(t,u) \geq a|u|^p \\ \text{для деяких} \quad a > 0 \quad \text{і} \quad p > 1; \end{gathered} \tag{4}$$

$$B^1(w_1, ..., w_N, t_1, ..., t_N) \geq a(| w_1 |^p + ... + | w_N |^p). \tag{5}$$

Допустимими для задачі (1), (2) вважаються керування $u = u(t)$ та вектори $w_1, ..., w_N$ такі, що:

а) $u(t) \in L_p[0,T], u(t) \in U, t \in [0,T]$;

б) $w_i \in V \ i = 1, ..., N$;

в) розв'язок задачі Коші (1) $x(t) = x(t, u, w, x_0)$ визначений на $[0,T]$.

Основні результати. Основним результатом даної роботи є наступна теорема

Теорема 1. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються перераховані вище умови, тоді задача оптимального керування (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань.*

Доведення. Спочатку відзначимо, що множина допустимих керувань непорожня, оскільки вона містить точку (0, 0), відповідна даному керуванню система (1) при цьому має вигляд

$$\dot{x} = A(t,x),$$

$$x(0) = x_0,$$

і в силу неперервності функції $A(t,x)$ і умови (3) розв'язок такої задачі Коші існує на відрізку $[0,T]$.

Оскільки критерій якості $C(u,w) \geq 0$, то існує невід'ємна нижня границя m значень $C(u,w)$. Нехай $u^{(n)}$, $w^{(n)}$ — послідовність допустимих керувань таких, що відповідна послідовність $C(u^{(n)}, w^{(n)}) \to m$ при $n \to \infty$. Відначимо, що при досить великих n виконується нерівність

$$C(u^{(n)}, w^{(n)}) \leq m + 1.$$

Звідси, та з (5) випливає оцінка $a \sum\limits_{i=1}^{N} | w_i^{(n)} |^p \leq m + 1$. Останнє означає обмеженість послідовності $w_i^{(n)}$, $i = \overline{1,N}$. А тому з неї можна виділити збіжну підпослідовність. Без обмеження загальності будемо вважати, що сама $w_i^{(n)}$ збіжна для $i = \overline{1,N}$, отже $w_i^{(n)} \to w_i^{(*)}$. При цьому в силу замкнутості V $w_i^{(*)} \in V$, $i = \overline{1,N}$. З умови (3) також випливає, що при досить великих n

$$\int\limits_0^T | u^{(n)}(t) |^p \, dt \le \frac{m+1}{a}. \qquad (6)$$

Отже з послідовності $u^{(n)}(t)$ можна виділити слабко збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності, також будемо вважати, що сама $u^{(n)}(t)$ слабко збігається до $u^{(*)}(t) \in L_p([0,T])$, яка задовольняє нерівність (6).

Тоді за лемою Мазура [10, с. 173] знайдеться опукла комбінація

$$b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$$

елементів $u_i(t) \in U$ ($\alpha_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1$), що $b_k \to u^*$, $k \to \infty$ за нормою L_p. Отже, існує збіжна майже скрізь на $[0,\infty)$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l}, що $b_{k_l} \to u^*(t)$, $l \to \infty$ для майже всіх t. Оскільки U опукла і замкнена множина, то $\sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$. Тоді із замкненості множини U випливає, що $u^*(t) \in U$ майже для всіх $t \in [0,T]$.

Проведемо тепер оцінку розв'язків $x^{(n)}(t)$, що відповідають керуванням ($u^{(n)}(t)$, $w_i^{(n)}$). Для $q = \dfrac{p}{p-1}$ маємо

$$\begin{aligned} |x^{(n)}(t)|^q &\le (| x_0 | + \int\limits_0^t | A(x^{(n)}(s),s) + B(x^{(n)}(s),s) || u^{(n)}(s) | ds + \\ &\quad + \sum_{0 \le i < t} |g_i(x^{(n)}(t_i)), w_i^{(n)}|)^q \le \\ &\le 3^{q-1}(| x_0 |^q + (\int\limits_0^t [K(1+|x^n(s)|) + K(1+|x^n(s)|) \,| u^{(n)}(s) |]ds)^q + \\ &\quad + (\sum_{0<i<t} K(1+|x^{(n)}(t_i)|)|w_i|)^q. \end{aligned} \qquad (7)$$

Оцінимо окремо кожний з доданків:

$$\begin{aligned} &(\int\limits_0^t [K(1+|x^{(n)}(s)|) + K(1+|x^n(s)|) \,| u^{(n)}(s) |]ds)^q = \\ &= K^q(\int\limits_0^t (1+|x^{(n)}(s)|)(1+ | u^{(n)}(s) |)ds)^q \le \\ &\le K^q \int\limits_0^t (1+|x^{(n)}(s)|)^q ds \cdot (\int\limits_0^t (1+ | u^{(n)}(s) |)^p ds)^{\frac{q}{p}} \le \\ &\le K^q \int\limits_0^t 2^{q-1}(1+|x^{(n)}(s)|)^q ds (2^{p-1} \int\limits_0^t (1+ | u^{(n)}(s) |)^p ds)^{\frac{q}{p}} \le \\ &\le (2K)^q (T + \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds)(T + \int\limits_0^t | u^{(n)}(s) |^p \, ds)^{\frac{q}{p}}) \le \\ &\le ((2K)^q T + (2K)^q \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds)(T + \int\limits_0^t | u^{(n)}(s) |^p \, ds)^{\frac{q}{p}}). \end{aligned} \qquad (8)$$

Позначимо $(2K)^qT = C_1$. Оскільки $(T + \int\limits_0^t \mid u^{(n)}(s) \mid^p ds)^{\frac{q}{p}} \leq (T + \frac{m}{a})^{\frac{q}{p}} = C_2$, то, продовжуючи нерівність (8), матимемо, що другий доданок в ній оцінюється величиною

$$C_1 + C_2(2K)^q \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds. \tag{9}$$

Для оцінки сумарного члена в (7) матимемо

$$(\sum_{0<i<t} K(1 + |x^{(n)}(t_i)|)|w_i^{(n)}|)^q \leq K^q \sum_{0<t_i<t} (1 + |x^{(n)}(t_i)|)^q (\sum_{0<i<t} |w_i^{(n)}|^p)^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\leq K^q \sum_{0<t_i<t} 2^{q-1}(1 + |x^{(n)}(t_i)|^q)(\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\leq K^q(\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}}(\sum_{0<t_i<t} 2^{q-1} + 2^{q-1} \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q) \leq$$

$$\leq K^q(\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}}(2^{q-1}N + 2^{q-1} \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q) \leq C_4 + C_5 \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q,$$

$$\text{де} \quad C_4 = K^q(\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} 2^{q-1}N, \quad C_5 = K^q(\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} 2^{q-1}. \tag{10}$$

Із (7) – (10) отримуємо нерівність

$$\begin{gathered} |x^{(n)}(t)|^q \leq C_1 + C_2(2K)^q \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds + C_4 + C_5 \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q = \\ = C_6 + C_7 \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\text{де} \quad C_6 = C_1 + C_4, \quad C_7 = C_2(2K)^q.$$

З аналога нерівності Гроноулла — Беллмана [11, с. 30] маємо:

$$|x^{(n)}(t)|^q \leq C_6 e^{C_7 T} \prod_{0<t_i<t} (1 + C_5) \leq C_6 e^{C_7 T}(1 + C_5)^N = C_8 \tag{12}$$

$$\text{для} \quad t \in [0, T].$$

Останнє означає рівномірну обмеженість розв'язків $x^{(n)}(t)$ для $t \in [0, T]$.

На інтервалі $[0, t_1]$ для будь-яких двох моментів часу t', t'' $(0 \leq t' \leq t'' \leq t_1)$ маємо

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int\limits_0^t A(x^{(n)}(s), s) + B(x^{(n)}(s), s)u^{(n)}(s)ds,$$

$$|x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'')| \leq \int\limits_{t'}^{t''} |A(x^{(n)}(s), s)| + |B(x^{(n)}(s), s)||u^{(n)}(s)|ds. \tag{13}$$

З (12) та умови лінійного росту випливає існування сталої $C > 0$, що для всіх n

$$|A(x^{(n)}(t),t)| \le C, \quad |B(x^{(n)}(t),t)| \le C \quad t \in [0,T].$$

А тому з (13), в силу неперервності функцій A і B, отримуємо

$$|x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'')| \le C|t'' - t'| + C(\int\limits_{t'}^{t''} |u^{(n)}(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} |t'' - t'|^{\frac{1}{q}},$$

$$|x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'')| \le C|t'' - t'| + C(\frac{m+1}{a})^{\frac{1}{p}} |t'' - t'|^{\frac{1}{q}}. \tag{14}$$

Нерівність (14) означає рівностепеневу неперервність послідовності функцій $x^{(n)}(t)$. Тоді з (12) і (14) випливає існування рівномірно збіжної підпослідовності $x^{k_1}(t)$ послідовності $x^{(n)}(t)$ на $[0,t_1]$. Нехай $x_1(t)$ — її границя. Позначимо $x^{k_1}(t_1+0) = x^{k_1}(t_1) + g_1(x^{k_1}(t_1))w_1^{(k_1)}$. При $t \in [t_1,t_2]$ розглянемо рівняння

$$x^{k_1}(t) = x^{k_1}(t_1+0) + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x^{k_1}(s),s) + B(x^{k_1}(s),s)u(s)]ds.$$

Аналогічно попередньому доводиться компактність послідовності $x^{k_1}(t)$ на $[t_1,t_2]$ в рівномірній метриці. Отже існує підпослідовність $x^{k_2}(t)$ послідовності $x^{k_1}(t)$ така, що $x^{k_2}(t)$ збігається рівномірно до $x_2(t)$ при $t \in [t_1,t_2]$. При $k_2 \to \infty$ маємо, що $x_2(t_1+0) = x_1(t_1) + g_1(x_1(t_1))w_1^*$. Далі на інтервалі $[t_2,t_3]$ розглядаємо рівняння

$$x^{k_2}(t) = x^{k_2}(t_2+0) + \int\limits_{t_2}^{t} [A(x^{k_2}(s),s) + B(x^{k_2}(s),s)u(s)]ds.$$

Аналогічно, існує підпослідовність $x^{k_3}(t)$ послідовності $x^{k_2}(t)$ така, що $x^{k_3}(t)$ збігається рівномірно до $x_3(t)$ при $t \in [t_2,t_3]$.

Покажемо тепер, що функція

$$x^*(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0,t_1] \\ x_2(t), & t \in [t_1,t_2] \\ ... \\ x_{N+1}(t), & t \in [t_N,T] \end{cases} \tag{15}$$

є розв'язком вихідної задачі (1) для керувань (u^*, w^*), тобто що $x^*(t)$ задовільняє рівняння

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t [A(x^*(s),s) + B(x^*(s),s)u^*(s)]ds + \sum_{0<t_i<t} g_i(x^*(t_i))w_i^*. \tag{16}$$

На відрізку $[0, t_1]$ твердження очевидне. Покажемо, що при $t \in [t_1, t_2]$ справедливе рівняння

$$x_2(t) = x_1(t_1) + g_1(x_1(t_1))w_1^* + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x_2(s), s) + B(x_2(s), s)u^*(s)]ds. \qquad (17)$$

Оскільки $\lim\limits_{k_2 \to \infty} x^{k_2}(t) = x_2(t)$ рівномірно за $t \in [t_1, t_2]$ і

$$x^{k_2}(t) = x^{k_2}(t_1 + 0) + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x^{k_2}(s), s) + B(x^{k_2}(s), s)u^{k_2}(s)]ds \qquad (18)$$

($\{k_2\}$ — підпослідовність послідовності $\{k_1\}$), то $x^{k_2}(t_1 + 0) \to x_2(t_1 + 0)$ і

$$x^{k_2}(t_1 + 0) = x^{k_2}(t_1) + g_1(x^{k_2}(t_1))w_1^{k_2} \to x_1(t_1) + g_1(x(t_1))w_1^*.$$

Перейдемо тепер у (18) до границі при $k_2 \to \infty$.

$$x_2(t) = x_1(t_1) + g_1(x(t_1))w_1^* + \lim_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} [A(x^{k_2}(s), s) + B(x^{k_2}(s), s)u^{k_2}(s)]ds.$$

$\lim\limits_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} A(x^{k_2}(s), s)ds = \int\limits_{t_1}^{t} A(x_2(s), s)ds$ в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність, лінійного росту функції $A(x, t)$ і оцінки (12).

Користуючись граничним співвідношенням $\lim\limits_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} B(x_2(s), s)[u^{k_2}(s) - u^*(s)]ds = 0$, а також співвідношенням $\lim\limits_{k_2 \to \infty} B(x^{k_2}(t), t) = B(x_2(t), t)$, що виконується рівномірно, поза деякої множини S довільної малої міри, і нерівністю $\int\limits_S |u^{k_2}|ds \leq \left(\int\limits_{t_1}^{t} |u^{k_2}(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} |S|^{\frac{1}{q}}$, можна довести, що

$$\lim_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} |B(x^{k_2}(s), s) - B(x_2(s), s)||u^{k_2}(s)| = 0,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t} B(x^{k_2}(s), s)u^{k_2}(s) \to \int\limits_{t_1}^{t} B(x_2(s), s)u^*(s).$$

Отже, $x_2(t) = x_1(t_1) + g_1(x_1(t_1))w_1^* + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x_2(s), s) + B(x_2(s), s)u^*(s)]ds$.

Аналогічні міркування проводяться на інших інтервалах $[t_k, t_{k+1}]$. Значить, функція $x^*(t)$, побудована за формулою (15), є розв'язком імпульсної системи

$$\frac{dx^*}{dt} = A(x^*(t), t) + B(x^*(t), t)u^*(t), \quad t \neq t_i,$$

$$\triangle\, x|_{t=t_i} = g_i(x^*(t_i))w_i^*.$$

Залишилось показати, що керування (u^*, w^*) — оптимальне, тобто що $C(u^*, w^*) = = m$.

Маємо, що $\lim\limits_{k_N \to \infty} C(u^{k_N}, w^{k_N}) = m$. Отже,

$$\lim_{k_N \to \infty} C(u^{k_N}, w^{k_N}) =$$

$$= \lim_{k_N \to \infty} \int_0^T [A^0(x^{k_N}(t), t) + B^0(u^{k_N}(t), t)]dt + B^1(w_1^{k_N}, ..., w_N^{k_N}) +$$

$$+ A^1(x^{k_N}(t_1), ..., x^{k_N}(t_N), t_1, ..., t_N).$$

Оскільки функція $A^0(x, t)$ неперервна, то в силу теореми Вейєрштрасса і оцінки (12) функції $A^0(x^{k_N}(t), t)$ і $A^0(x^*(t), t)$ рівномірно за k_N і $t \in [0, T]$ обмежені деякою сталою. А тому з теореми Лебега випливає можливість граничного переходу

$$\lim_{k_N \to \infty} \int_0^T A^0(x^{k_N}(t), t)dt \to \int_0^T A^0(x^*(t), t)dt. \tag{19}$$

Із опуклості по u функції $B^0(u, t)$ отримуємо також, що

$$\lim_{k_N \to \infty} \int_0^T B^0(u^{k_N}(t), t)dt \geq \varliminf_{k_N \to \infty} \int_0^T B^0(u^{k_N}(t), t)dt \geq \int_0^T B^0(u^*(t), t)dt. \tag{20}$$

Очевидно також, що при $w_1^{k_N} \to w_1^*, ..., w_N^{k_N} \to w_N^*$

$$B^1(w_1^{k_N}, ..., w_N^{k_N}) \to B^1(w_1^*, ..., w_N^*),$$

$$A^1(x^{k_N}(t_1), ..., x^{k_N}(t_N), t_1, ..., t_N) \to A^1(x^*(t_1), ..., x^*(t_N), t_1, ..., t_N).$$

Отже, $m = \lim\limits_{k_N \to \infty} C(u^{k_N}, w^{k_N}) \geq C(u^*, w^*)$, тому $C(u^*, w^*) = m$ і (u^*, w^*) – оптимальне керування.

Теорема доведена.

Проілюструємо доведену теорему прикладом.

Приклад 1. *Нехай задача (1), (2) має вигляд*

$$\dot{x} = t\cos x + \sin tx \cdot u, \quad t \neq t_i,$$

$$x(0) = 0,$$

$$\triangle\, x|_{t=t_i} = i|x|w_i,$$

$$C(u,w)=\int\limits_0^3[x^4+2u^6(t)]dt+\sum_{0<t_i<3}[x^2(t_i)+w_i^6].$$

Тут $t\in[0,3]$, $t_i=\dfrac{i}{2}$, $i=\overline{1,5}$. $u\in U$ *— довільна опукла замкнена множина в* $\mathbb{R}^1$, *що* $0\in U$, $w_i\in V$ *— замкнена множина в* $\mathbb{R}^1$, $0\in V$, $x\in\mathbb{R}^1$.

Неважко бачити, що дана задача задовольняє умови теореми при $p=6$. *Отже, вона має розв'язок в класі допустимих керувань, де* $U(t)\in L_6(0,3)$.

Висновки. В статті отримані зручні для практичної перевірки достатні умови існування оптимального керування для імпульсних систем. Відзначимо, що ці умови виражаються лише через праві частини системи та функції, які входять в критерій якості. При цьому для розв'язання задачі не залучається ні принцип максимума, ні метод динамічного програмування.

1. **Бенсусан А., Лионс Ж.-А.** Импульсное управление и квазивариационные неравенства / Бенсусан А., Лионс Ж.-А. – М.: Наука, 1987. – 600с.
2. **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление разрывными системами / Ащепков Л. Т. – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.
3. **Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями / Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. – М.: Физматлит, 2000. – 256 с.
4. **Асланян А. А.** Необходимые условия оптимальности в задачах управления системами дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и нефиксированные моменты времени / Асланян А. А. // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 9. – С. 58–61.
5. **Асланян А. А.** Принцип максимума для разрывных динамических систем / Асланян А. А. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1982. – Вып. 37. – С. 132–137.
6. **Асланян А. А.** Условия оптимальности в задачах управления системами с импульсным воздействием / Асланян А. А. // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 11. – С. 3–6.
7. **Ahmed N. U.** Optimal Control for a General Class of Impulsive Systems on Banach Spaces. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA, December 2003. – P. 480–485.
8. **Шарифов Я. В.** Оптимальное управление для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях / Шарифов Я. В. // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 2. – С. 75–84.
9. **Станжицький О. М., Самойленко О. О.** Коефіцієнтні умови існування оптимального керування для систем диференціальних рівнянь / Станжицький О. М., Самойленко О. О. // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16., № 1. – С. 125–132.
10. **Иосида К.** Функциональный анализ/ Иосида К. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
11. **Samoilenko A. M., Perestyuk N.A.** Impulsive differential equations / Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. – Singapore: World Scientific, 1995. – 400 p.