Mathematical Subject Classification: 34A60
УДК 517.9

О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ И ИХ СВОЙСТВА

Кічмаренко О. Д., Плотніков А. А. Нелінійні диференціальні включення зі змінною розмірністю та їх властивості. В статті введено поняття диференціального включення з змінною розмірністю та отримані деякі властивості їх розв'язків.
Ключові слова: диференціальні включення, розв'язок, існування.

Кичмаренко О. Д., Плотников А. А. Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью и их свойства. В статье введено понятие дифференциального включения с переменной размерностью и получены некоторые свойства их решений.
Ключевые слова: дифференциальное включение, решение, существование.

Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A. Nonlinear differential inclusions with variable dimension and their properties. In paper the concept of differential inclusion with variable dimension is introduced and some properties of their solutions are received.
Key words: differential inclusion, solution, existence.

Введение. Теория дифференциальных включений начала свое развитие в начале тридцатых годов 20-го века с публикаций А. Маршо и С. Заремба. Однако бурное развитие данной теории началось с 60-х годов прошлого века благодаря работам Т. Важевского и А. Ф. Филиппова, которые обосновали ее тесную связь с теорией оптимального управленния и дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Основные результаты теории дифференциальных включений изложены в работах [1, 2, 3, 7, 8].

В данной статье мы рассмотрим дифференциальные включения с переменной размерностью, к которым сводятся, например, управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания [4, 5, 6], а также импульсные дифференциальные включения [3, 8].

Основные определения и обозначения. Пусть $\theta > 0$ произвольное действительное число, N — множество натуральных чисел, а $N_0 = N \bigcup 0$.

Обозначим через Σ_θ множество функций $n(\cdot) : R_+ \to N$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $n(\cdot)$ — кусочно-постоянные и кусочно-непрерывные справа;

2) если $n((t+0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всех $\tau \in [t, t+\theta]$.

Очевидна справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Для любой функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ полупрямую R_+ можно разбить не более чем на счетное число множеств $I_i = [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, ...$ таких, что $R_+ = \bigcup\limits_i I_i$ и $I_i \bigcap I_j = \varnothing$, если $i \neq j$, где $n(t) - n(t_i) = 0$ для всех $t \in I_i$.*

Обозначим через M_n множество матричных функций, соответствующих функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ таких, что

1) $M(t)$ — матрица $(n(t-0) \times n(t))$;

2) $M(t) = \begin{cases} E, & n(t) - n(t-0) = 0 \\ M(t), & n(t) - n(t-0) \neq 0 \end{cases}$ и $M(0) = E$.

Возьмем произвольную функцию $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ и $M(\cdot) \in M_n$.

Определение 1. *Функцию $x(\cdot, n, M)$ назовем функцией переменной размерности, соответствующей паре (n, M), если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $x(t, n, M) \in R^{n(t)}$ для всех $t \geq 0$;

2) $x(t, n, M) = M(t)x(t-0, n, M)$ для всех $t > 0$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $x(\cdot, n, M)$ непрерывна на интервале $(t', t'') \subset R_+$, если она непрерывна в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ и непрерывна справа в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Определение 3. *Будем говорить, что функция $x(\cdot, n, M)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[t', t''] \subset R_+$, если она непрерывна на (t', t'') и абсолютно непрерывна на любом сегменте $[\tau', \tau''] \subset [t', t'']$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ для всех $t \in [\tau', \tau'']$.*

Замечание 1. *Аналогично, можно ввести определение измеримости (дифференцируемости, интегрируемости, липшицевости и др.) функции $x(\cdot, n, M)$.*

Определение 4. *Многозначное отображение $F(\cdot, n)$ назовем отображением с переменной размерностью, если множество $F(t, n) \subset R^{n(t)}$ для всех $t \in R_+$.*

Определение 5. *Будем говорить, что многозначное отображение $F(\cdot, n)$ непрерывно на интервале $(t', t'') \subset R_+$, если оно непрерывно в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$, и непрерывно справа в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Определение 6. *Будем говорить, что многозначное отображение $F(\cdot, n)$ удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[t', t''] \subset R_+$ с постоянной $L > 0$, если оно непрерывно на (t', t'') и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L на любом сегменте $[\tau', \tau''] \subset [t', t'']$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ для всех $t \in [\tau', \tau'']$.*

Основные результаты. Рассмотрим следующую систему с переменной размерностью:

$$\dot{x} \in F(t, x, n), \ x(0, n, M) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in R_+$ — время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $M(\cdot) \in M_n$; $x(t, n, M)$ — фазовый вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \to comp(R^{n(t)})$ — многозначное отображение с переменной размерностью.

Замечание 2. *Если $n(t) \equiv n$, то система (1) будет обычным дифференциальным включением.*

Предположение А. Пусть функция $n(\cdot)$ ограничена $\overline{n} > 0$ для всех $t \geq 0$.

Замечание 3. *Предположение А не дает рост размерности на бесконечности к бесконечности (это условие может быть необязательным, если система (1) рассматривается на конечном промежутке).*

Обозначим через $Q_i = \{ (t, x) \, : \, t \in I_i, \, x \in R^{n(t)} \}$, где I_i соответствуют лемме 1.

Определение 7. *Абсолютно непрерывная функция* $x(\cdot, n, M)$ *называется обычным решением системы (1) на отрезке* $[0, T]$, *если*

1) $\dot{x}(t, n, M) \in F(t, x(t, n, M), n)$ *для почти всех* $t \in (0, T)$,

2) $x(0, n, M) = x_0$.

Предположение Б. Многозначное отображение $F(t, x, n)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $F(\cdot, x, n)$ — непрерывно по t на R_+;

b) $F(t, \cdot, n)$ — липшицево с постоянной L по x на $Q_i, \; i = 0, 1, ...$;

c) существует такая постоянная $K > 0$, что $\|F(t, x, n)\| \le K(1 + \|x\|)$ для всех $(t, x) \in Q_i, \; i = 0, 1, ...$

Теорема 1. *Если для некоторого* $\theta > 0$ $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $M(\cdot) \in M_n$ *и* $F(t, x, n)$ *удовлетворяют условиям предположений А и Б, то на некотором отрезке* $[0, T]$ *у системы (1) существует обычное решение* $x(\cdot, n, M)$.

Доказательство. Очевидно, что $(0, x_0) \in Q_0 \subset R_+ \times R^{n(0)}$. Доопределим многозначное отображение $F(t, x, n(0))$ на все пространство $R_+ \times R^{n(0)}$ так, чтобы оно удовлетворяло условиям предположения Б, и возьмем $M^0(t) = E$ для всех $t \in R_+$. Тогда из [2] следует, что существует $r_0 > 0$ такое, что на отрезке $[0, r_0]$ существует обычное решение системы

$$\dot{x}(t, n(0), M^0(t)) \in F(t, x(t, n(0), M^0(t)), n(0)), \;\; x(0, n(0), M^0(0)) = x_0.$$

Очевидно, что далее возможны два случая:

Случай 1. Для всех $t \in [0, r_0]$ справедливо условие $n(t) - n(0) = 0$. Тогда теорема доказана и $T = r_0$.

Случай 2. Существует $t_1 \in (\theta, r_0)$ такое, что $n(\tau) - n(0) = 0$ для всех $\tau \in [0, t_1)$ и $n(t_1 - 0) - n(t_1) \neq 0$. Тогда обозначим через $x_1 = M(t_1) x(t_1 - -0, n(0), M^0(t_1))$. Очевидно, что $(t_1, x_1) \in Q_1 \subset [t_1, = \infty) \times R^{n(t_1)}$. Теперь доопределим многозначное отображение $F(t, x, n(t_1))$ на все пространство $[t_1, = \infty) \times R^{n(t_1)}$ так, чтобы оно удовлетворяло условиям предположения Б, и возьмем $M^1(t) = \begin{cases} M(t_1), & t = t_1 \\ E, & t > t_1 \end{cases}$. Тогда, аналогично, получим, что существует $r_1 > 0$ такое, что на отрезке $[t_1, t_1 + r_1]$ существует обычное решение системы

$$\dot{x}(t, n(t_1), M^1(t)) \in F(t, x(t, n(t_1), M^1(t)), n(t_1)), \;\; x(t_1, n(t_1), M^1(t_1)) = x_1.$$

И так далее.

В итоге мы получаем существование обычного решения либо на некотором отрезке $[0, T]$, либо на всей полупрямой R_+. Теорема доказана.

Обозначим через $X(t, n, M)$ сечение множества обычных решений системы (1) в момент времени $t \ge 0$.

Теорема 2. *Если для некоторого $\theta > 0$ $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $M(\cdot) \in M_n$ и $F(t,x,n)$ удовлетворяют условиям предположений А и Б и многозначное отображение $F(t,x,n) : R_+ \times R^{n(t)} \to conv(R^{n(t)})$, то $X(t,n,M) \in comp(R^{n(t)})$ для всех $t \in \in [0,T]$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что система (1) имеет хотя бы одно обычное решение на отрезке $[0,T$. Из [2] следует справедливость утверждения данной теоремы.

Пример 1. *Рассмотрим следующую линейную систему:*

$$\dot{x} \in x + S_t(0), \;\; x(0,n,M) = 0, \tag{2}$$

где $t \in [0, \frac{3\pi}{4}]$, $n(t) = \left[1 + |\sqrt{2}sin(t)|\right]$,
$M(t) = \begin{cases} E, & n(t-0) - n(t) = 0 \\ m_{ij} = \frac{1}{n(t)}, & n(t-0) - n(t) \neq 0 \end{cases}$ *для* $t > 0$, $M(0) = E$, $[\cdot]$ *— целая часть.*

Очевидно, что $n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ 2, & t \in [\frac{\pi}{4} + \pi i, \frac{3\pi}{4} + \pi i), \\ 1, & t \in [\frac{3\pi}{4} + \pi i, \frac{5\pi}{4} + \pi i), \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots .$

$$M(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup \bigcup\limits_i (\frac{3\pi}{4} + \pi i, \frac{5\pi}{4} + \pi i), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in (\frac{\pi}{4} + \pi i, \frac{3\pi}{4} + \pi i), \\ (1,1), & t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi i, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & t = \frac{\pi}{4} + 2\pi i, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots ,$$

$$S(t) = \begin{cases} [-t, t] \subset R, & t \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup \bigcup\limits_i (\frac{3\pi}{4} + \pi i, \frac{5\pi}{4} + \pi i), \\ \{(s_1, s_2) \in R^2 \,:\, \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \leq t\}, & t \in \bigcup\limits_i (\frac{\pi}{4} + \pi i, \frac{3\pi}{4} + \pi i), \end{cases}$$

$i = 0, 1, \ldots .$

Тогда сечения множества решений системы (2) будут иметь вид

$$X(t,n,M) = [t + 1 - e^t, e^t - t - 1], \;\; t \in [0, \frac{\pi}{4}),$$

$$X(\frac{\pi}{4}, n, M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} X(\frac{\pi}{4} - 0, n, M) =$$

$$= \left\{ (x_1(\alpha), x_2(\alpha)) \,:\, x_i(\alpha) = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \right) \alpha, \;\; \alpha \in [-1, 1], \;\; i = 1, 2 \right\},$$

$$X(t,n,M) = e^{t - \frac{\pi}{4}} X(\frac{\pi}{4}, n, M) + S_{e^{-\frac{\pi}{4}}(1 + \frac{\pi}{4})e^t - t - 1}(0), \;\; t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}),$$

$$X(\frac{3\pi}{4}, n, M) = (1,1) X(\frac{3\pi}{4} - 0) =$$

$$= \left[-\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{2} - \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} - 1\right), \right.$$

$$\left. \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{2} + \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} - 1\right) \right].$$

Далее приведен график сечения множества решений системы (2) для $t \in \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

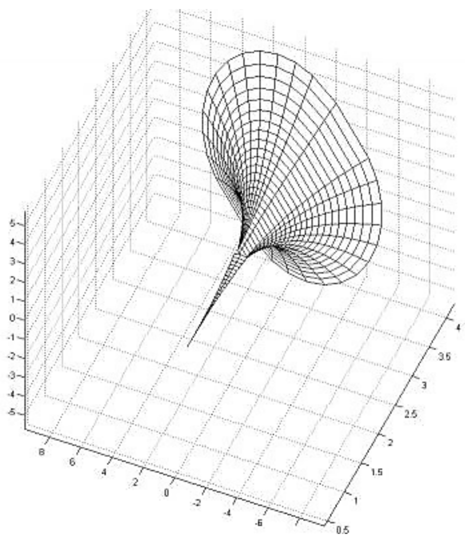

Рис. 1

Заключение. Можно также рассмотреть более общий вид дифференциальных включений с переменной структурой

$$\dot{x} \in F(t, x, n), \; x(0, n(0), \varphi(0)) = x_0, \tag{3}$$

где $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $x(t, n, \varphi)$ — фазовый вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \to comp(R^{n(t)})$ — многозначное отображение с переменной размерностью; $\varphi(x) : R^{n(t-0)} \to R^{n(t)}$ такое, что $\varphi(x) = x$, если $n(t-0) - n(t) = 0$, и $\varphi(x) = y$, если $n(t-0) - n(t) \neq 0$ для $t > 0$, и получить аналогичные результаты.

1. **Благодатских В. И.** Теория дифференциальных включений / В. И. Благодатских. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 88 с.
2. **Благодатских В. И.** Дифференциальные включения и оптимальное управление / В. И. Благодатских, А. Ф. Филлипов // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. Сборник обзорных статей. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР. – 1985. – 169. – С. 194–252.

3. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 352 с.
4. **Романенко А. В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. – 1993. – Т. 33, № 8. – С. 1155–1165.
5. **Федосеев А. В.** Исследование методами оптимального управления одной модели разработки группы месторождений полезного ископаемого с ограниченными запасами / А. В. Федосеев // Методы системного анализа и пробл. рационального использования ресурсов. – М.: ВЦ АН СССР. – 1977. – С. 117–134.
6. **Хачатуров В. Р.** Имитационное моделирование и задачи оптимального управления при долгосрочном планировании производства многолетних сельскохозяйственных культур / В. Р. Хачатуров, Р. Босолейль, А. В. Федосеев. – М.: ВЦ АН СССР, 1985.
7. **Aubin J.-P.** Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. – Springer-Verlag, 1984.
8. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math.: 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH&Co., 2011.