Mathematical Subject Classification: 35Q55, 35Q56
УДК 517.9

М. А. Сагадеева, А. Н. Шулепов
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОТНОСИТЕЛЬНО РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Сагадєєва М. А., Шулєпов А. М. Про одну нелінійну модель на основі відносно радіального рівняння соболєвського типу. У статті розглядається рівняння в частинних похідних з комплексними коефіцієнтами. До рівнянь подібного типу можна віднести рівняння Шредінгера, комплексне рівняння Гінзбурга—Ландау та інші. Доведена розв'язність зазначеного рівняння методом вироджених операторно–диференціальних рівнянь.
Ключові слова: рівняння соболєвського типу, відносно радіальний випадок, рівняння Шредінгера, комплексне рівняння Гінзбурга – Ландау.

Сагадеева М. А., Шулепов А. Н. Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа. В статье рассматривается уравнение в частных производных с комплексными коэффициентами. К уравнениям подобного вида можно отнести уравнения Шредингера, комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау и другие. Доказана разрешимость указанного уравнения методами вырожденных операторно-дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: уравнения соболевского типа, относительно радиальный случай, уравнение Шредингера, комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау.

Sagadeyeva M. A., Shulepov A. N. About one nonlinear model based on relatively radial equation of Sobolev type. The article deals with the partial differential equation with complex coefficients. Equations of this type include the Schrodinger equation, complex Ginzburg—Landau and others. We prove the solvability of this equation by methods degenerate operator-differential equations.
Key words: Sobolev type equations, relatively radial case, the Schrodinger equation, the complex Ginzburg – Landau equation.

Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times [0,T]$ рассмотрим задачу Дирихле

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{1}$$

для уравнения в частных производных вида

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu\Delta u - id\Delta^2 u + \beta u|u|^2, \tag{2}$$

которое в частном случае используется при изучении слабонелинейных эффектов в гидродинамике [1]. Здесь коэффициенты $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, при этом $\nu > 0$ описывают параметры системы. Кроме того из этого уравнения может быть получен частный случай классического уравнения Гинзбурга – Ландау (Курамото – Цузуки)

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^2 + (d_1 + id)\Delta u,$$

если учтена дифракция, но отсутствует диффузионный член ($d_1 = 0$). Такая ситуация возникает при описании процессов, протекающих в лазерных резонаторах и других нелинейных оптических средах, и тогда уравнение описывает пространственную эволюцию электромагнитного пакета в этих средах. Само уравнение Гинзбурга – Ландау описывает широкий круг физических явлений, таких как нелинейные волны, фазовые переходы второго рода, сверхпроводимость, сверхтекучесть, конденсацию Бозе – Эйнштейна [2]. Кроме того, частным случаем рассматриваемого уравнения, очевидно, является кубическое уравнение Шредингера, возникающее во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамики [3], [4].

Исследование решений данного уравнения будем проводить в рамках теории уравнений соболевского типа ([5]–[9]). Опишем абстрактную схему.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен, замкнут и плотно определен), $N \in C^1(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$. Здесь $\mathfrak{U}_\alpha$ – банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{U}$ плотно и непрерывно. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{4}$$

Нашей целью является изучение однозначной разрешимости задачи (3), (4). При выборе цели мы руководствовались не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить начально-краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, возникающих в последнее время в приложениях [1]–[4]. При этом заметим, что решения задачи Коши для уравнения (4) при любых начальных данных пусть даже из плотного в $\mathfrak{U}$ множества существуют не всегда (см. например, [10], [11]).

Несуществование решений объясняется тем, что уравнение (4) необходимо рассматривать не на всем пространстве $\mathfrak{U}$, а на некотором его подмножестве, понимаемом как фазовое пространство. Изучение линейного случая

$$L\dot{u} = Mu \tag{5}$$

упрощается в силу того, что фазовым пространством уравнения (5) служит подпространство в $\mathfrak{U}$. Поэтому для полулинейных уравнений вида (4), фазовые пространства которых диффеоморфны некоторому подпространству в $\mathfrak{U}$, удается перенести результаты о существовании решений. Следует заметить, что конкретные модели, описываемые полулинейными уравнениями соболевского типа в относительно радиальном случае, рассматриваются в рамках теории уравнений соболевского типа, по-видимому, впервые (можно отметить по этому поводу [12]).

Статья состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы, который не претендует на полноту и отражает лишь личные пристрастия авторов. Во второй части введения приведены необходимые сведения для построения решения в абстрактной постановке, а именно приводятся сведения из [8], касающиеся относительно радиальных операторов. В основной части сначала приводится доказательство существования решения для уравнения (4), а затем все абстрактные результаты применены для построения решений задачи (1), (2).

Относительно p-радиальные операторы.

Доказательства утверждений этого пункта можно найти в [8].

Обозначим

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}, \qquad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \quad \mu \in \rho^L(M),$$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M),\ L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M),\ \ \lambda_k \in \rho^L(M)\ (k = \overline{0,p}).$$

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (коротко, *(L,p)-радиальным*), если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in (a,+\infty)^{p+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - a)^n}.$$

Также введем обозначения

$$\mathfrak{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M),\ \mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),\ L_0 = L\Big|_{\mathfrak{U}^0},\ M_0 = M\Big|_{\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^0}.$$

Через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$), а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{F}}$) – замыкание линеала $\mathfrak{U}^0 \dot{+} \mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{F}^0 \dot{+} \mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$).

Определение 2. *Решением* уравнения (5) назовем вектор-функцию $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению на $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

Определение 3. Замкнутое множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (5), если

(i) любое решение $u(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathfrak{P}$ (поточечно);

(ii) для любого u_0 из некоторого линеала $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}$, плотного в $\mathfrak{P}$, существует единственное решение задачи Коши (3) для уравнения (5).

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда фазовым пространством уравнения (5) является множество* $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$).

Определение 4. Отображение $U(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется *разрешающей полугруппой* уравнения (5), если

(i) $U(s)U(t) = U(s+t)\ \forall s,t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(ii) $u(t) = U(t)u_0$ есть решение этого уравнения для любого u_0 из некоторого плотного в $\mathfrak{U}$ линеала;

(iii) сужение единицы полугруппы на фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения есть $U(0)\Big|_{\mathfrak{P}} = \mathbb{I}$.

Полугруппу $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ будем называть *экспоненциально ограниченной* с константами C, a, если
$$\exists C > 0 \ \ \exists a \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \le Ce^{at}.$$

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константами K, a из определения 1 и сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения (5), рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$.*

Замечание 1. Операторы разрешающей полугруппы уравнения (5) при $t > 0$ можно представить в виде
$$U(t) = s - \lim_{k\to\infty} \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^k = s - \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{t} R^L_{\frac{k}{t}}(M) \right)^k,$$
принимая во внимание поправки формулы, обсуждаемые в работе [13].

Замечание 2. Единицей полугруппы $\{U(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{F}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) является проектор P (Q) вдоль $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) на $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$).

Определение 5. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным*, если при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p > a$ выполняются условия

(i) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что для всех $f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$
$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathfrak{F}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{(\lambda - a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)};$$

(ii) $$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \le \frac{K}{(\lambda - a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)}.$$

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*
(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$;
(ii) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{U}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $\quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom} M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$,
$\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение соболевского типа
$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t) \tag{6}$$
с функцией $g : [0, T] \to \mathfrak{F}$. Обозначим $(\mathbb{I} - Q)g(t) = g^0(t)$ и $Qg(t) = g^1(t)$.

Теорема 4. *Пусть M — сильно (L,p)-радиален, а вектор-функция $g(t)$ такова, что $g^0 \in C^{p+1}([0,T], \mathfrak{F})$, $g^1 \in C([0,T], \mathrm{dom} M L_1^{-1})$. Тогда для любого начального значения $u_0 \in \mathcal{P}_g = \left\{ u \in \mathrm{dom} M : (\mathbb{I} - P)u = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{0(k)}(0) \right\}$ существует единственное решение $u \in C^1([0,T], \mathfrak{U})$ задачи (3), (6), вида*
$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s) L_1^{-1} Q g(s) ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{0(k)}(t).$$

Через $C([0,T];\mathrm{dom}ML_1^{-1})$ здесь обозначено пространство функций со значениями во множестве $\mathrm{dom}ML_1^{-1}$, непрерывных по норме графика оператора M.

Основные результаты. 1. Существование решений абстрактных уравнений.

Итак, пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда полагая $\mathfrak{U}_0^1 = \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{U}_1^1 = \mathrm{dom}\ M \cap \mathfrak{U}^1$ с "нормой графика", аналогично [11] построим интерполяционные пространства $\mathfrak{U}_\alpha^1 = [\mathfrak{U}_0^1, \mathfrak{U}_1^1]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$. Далее, положим $\mathfrak{U}_1^0 = \mathrm{dom}\ M \cap \mathfrak{U}^0$ с "нормой графика" и построим пространства $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_1^0 \oplus \mathfrak{U}_\alpha^1$, $\alpha \in [0,1]$. Имеют место непрерывное и плотное вложение $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{U}$, $\alpha \in [0,1]$, и равенство $\mathfrak{U}_1 = \mathrm{dom}\ M$ с "нормой графика". Фиксируем $\alpha \in [0,1)$, и пусть оператор $N \in C^1(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$.

Определение 6. Вектор-функцию $u \in C^1((0,T);\mathfrak{U}_1)$, удовлетворяющую при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ уравнению (4), назовем *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (4), удовлетворяющее соотношению $\lim\limits_{t\to 0+} ||u(t) - u_0||_{\mathfrak{U}_\alpha} = 0$ при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}_\alpha$, назовем *решением задачи Коши* (3) *для уравнения* (4) (коротко *решением задачи* (3), (4)).

Поскольку оператор M сильно (L,p)-радиален, то уравнение (4) эквивалентно следующей системе из двух уравнений

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u), \tag{7}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QN(u), \tag{8}$$

где оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени p, а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ радиален в силу теоремы 3. Для купирования трудностей, возникающих при решении уравнений (7), (8), введем новое понятие.

Определение 7. Решение $u = u(t)$ уравнения (4) называется *квазистационарной полутраекторией*, если

$$H\dot{u}(t) \equiv 0, \quad t \in (0,T). \tag{9}$$

Решение задачи (3), (4) называется *квазистационарной полутраекторией уравнения* (4), *выходящей из точки* u_0, если верно (9).

Это понятие естественным образом обобщает понятие квазистационарной траектории [10]. Если ограничиться рассмотрением только квазистационарных полутраекторий, то в силу (7) придем к рассмотрению множества

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U}_\alpha : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\},$$

на котором они лежат в силу (7).

Пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$; будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ является *банаховым C^1-многообразием*, если существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{U}_\alpha^1$ точек u_0 и $u_0^1 = Pu_0 \in \mathfrak{U}_\alpha^1$ соответственно и C^1-диффеоморфизм $G : \mathfrak{O}_1 \to \mathfrak{O}$ такой, что G^{-1} есть сужение проектора P на $\mathfrak{M}$.

Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым C^1-многообразием*, если оно является таковым в каждой своей точке.

Связное банахово C^1-многообразие называется *простым*.

Теорема 5. *Пусть в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^1-многообразием, тогда существует квазистационарная полутраектория уравнения* (4), *выходящая из точки u_0.*

Доказательство. В условиях теоремы уравнение (8) в окрестности $\mathfrak{O}_1 \hookrightarrow \mathfrak{U}^1_\alpha$ точки u^1_0 можно привести к виду

$$\dot{u}^1 = Su^1 + F(u^1), \tag{10}$$

где оператор $F = L_1^{-1}QNG \in C^1(\mathfrak{O}_1; \mathfrak{U})$. Пользуясь результатами [14], найдем решение $u^1 \in C^1((0,T); \mathfrak{U}^1_\alpha)$ задачи Коши $u^1(0) = u^1_0$ для уравнения (10) в виде $u^1(t) = U(t)u^1_0 + \int\limits_0^t U(t-s)F(u^1(s))ds$, в силу теоремы 4. Вектор-функция $u(t) = Gu^1(t) + u^1(t)$ будет решением задачи (3), (4), причем будет выполнено (9). Откуда следует утверждение теоремы.

Определение 8. Множество $\mathfrak{P}_F \subset \mathfrak{U}_\alpha$ называется *фазовым пространством* уравнения (4), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (4) лежит на $\mathfrak{P}_F$, то есть $u(t) \in \mathfrak{P}_F$, $t \in (0,T)$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}_F$ существует единственное решение задачи Коши (3) для уравнения (4).

В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда фазовое пространство $\mathfrak{P}_F$ уравнения (4) будет совпадать со множеством его квазистационарных полутраекторий $\mathfrak{M}$. Отметим, что это заведомо имеет место, если оператор $N \equiv \mathbb{O}$ (см. теорему 1), или если $p = 0$ [10], [11].

2. Локальные решения для нелинейной модели.

Вернемся к основной модели. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ рассмотрим задачу Дирихле (1)

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T]$$

для уравнения в частных производных вида (2)

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu\Delta u - id\Delta^2 u + \beta u|u|^2.$$

Для того, чтобы редуцировать уравнение (2) с граничным условием (1) к уравнению (4), возьмем функциональное пространство $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Заметим, что в силу теоремы вложения Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_2 \hookrightarrow L_p$ при $n \geq 3$ и $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$. В качестве пространства $\mathfrak{F}$ возьмем $W_2^{-1}(\Omega)$, наделенное сильной топологией пространства, сопряженного к $\mathfrak{U}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из L_2.

Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ определим формулами

$$L = \lambda - \Delta, \quad M = \nu\Delta - id\Delta^2.$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω. Последовательность $\{\lambda_k\}$ занумерована по невозрастанию с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *При любых $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$ оператор M сильно $(L,0)$-радиален.*

Доказательство. В силу условий теоремы $\ker L \cap \ker M \neq \oslash$. Ясно, что в противном случае $\sigma^L(M) = \mathbb{C}$.

Для того чтобы построить L-резольвенту оператора M рассмотрим при $\mu \in \mathbb{C}$ оператор $\mu L - M = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(\mu(\lambda - \lambda_k) - (\nu\lambda_k - id\lambda_k^2)\big)\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k$. Этот оператор имеет непрерывный обратный, при условии

$$\mu \neq \frac{\nu\lambda_k - id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} = \frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} - \frac{id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}.$$

Откуда ясно, что $\sigma^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu_k = \dfrac{\nu\lambda_k - id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}, \text{ при } k : \lambda_k \neq \lambda\right\}$. Относительная L-резольвента оператора M при $\mu \in \rho^L(M)$ имеет вид

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k\colon \lambda_k \neq \lambda} \frac{\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) - \nu\lambda_k + id\lambda_k^2}.$$

Выясним положение относительного спектра при $k \to \infty$

$$\frac{\nu\lambda_k - id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} = \frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} - \frac{id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} \sim -\nu + id\lambda_k.$$

Откуда ясно, что точки относительного спектра $\sigma^L(M)$ накапливаются к вертикальной прямой $\mathrm{Re}\mu = -\nu$. При этом оператор $R_\mu^L(M) =$

$$= \sum_{k\colon \lambda_k \neq \lambda} \frac{(\lambda - \lambda_k)\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) - (\nu\lambda_k - id\lambda_k^2)} = \sum_{k\colon \lambda_k \neq \lambda} \frac{\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu - (\nu\lambda_k - id\lambda_k^2)/(\lambda - \lambda_k)}.$$

Откуда следует выполнение неравенств

$$\max\left\{\|R_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\right\} \leq \frac{K}{|\mu - a|},$$

$$\|M(\eta L - M)^{-1} L_\mu^L(M) f\|_{\mathfrak{F}} \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{|\eta - a||\mu - a|},$$

$$\|R_\mu^L(M)(\eta L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{|\mu - a||\eta - a|},$$

где $a = \sup\limits_{k\colon \lambda_k \neq \lambda} \mathrm{Re}\mu_k = \sup\limits_{k\colon \lambda_k \neq \lambda} \mathrm{Re}\left(\dfrac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} - \dfrac{id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}\right) < +\infty.$
Таким образом, в рассматриваемой задаче M сильно $(L,0)$-радиален.

При этом $\mathfrak{U}^0 = \mathrm{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$, $\mathfrak{U}^1 = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k : \lambda_k \neq \lambda\}$.

Откуда следует утверждение леммы.

Перейдем к рассмотрению нелинейной части уравнения (2). Для этого возьмем в функциональных пространствах $p = 4$ и зададим оператор

$$\langle N(u), v\rangle = \beta \int\limits_\Omega u|u|^2 v dx \quad \forall u, v \in L_4.$$

Лемма 2. *При любых* $\beta \in \mathbb{C}$ *оператор* $N \in C^1(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем* $N(0) = 0$ *и* $N'_0 = \mathbb{O}$.

Доказательство. Действительно, поскольку

$$|\langle N(u), v\rangle| = \left|\beta \int\limits_\Omega u|u|^2 v\, dx\right| \le |\beta| \cdot \left(\int\limits_\Omega |u|^4\, dx\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |v|^4\, dx\right)^{\frac{1}{4}} \le$$

$$\le \mathrm{const}\|u\|^3_{L_4} \cdot \|v\|_L,$$

то $\|N(u)\|_{L_{\frac{4}{3}}} \le \mathrm{const}\|u\|^3_{L_4}$. В силу непрерывности вложений $L_4 \hookrightarrow (L_4)^* \cong L_{\frac{4}{3}} \hookrightarrow$ $\hookrightarrow W_2^{-1}$ оператор $N : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$.

Пусть $u \in \mathfrak{U}$, тогда производная Фреше N'_u оператора N в точке u имеет вид

$$\langle N'_u v, w\rangle = 3\beta \int\limits_\Omega |u|^2 vw dx \quad \forall u, v, w \in L_4.$$

В силу того, что

$$|\langle N'_u v, w\rangle| \le |3\beta| \cdot \left|\int\limits_\Omega |u|^2 vw\, dx\right| \le$$

$$\le |3\beta| \cdot \left(\int\limits_\Omega |u|^4\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |v|^4\, dx\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |w|^4\, dx\right)^{\frac{1}{4}} \le$$

$$\le \mathrm{const}\|u\|^2_{L_4} \cdot \|v\|_{L_4} \cdot \|w\|_{L_4},$$

получим $N \in C^1(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, что доказывает утверждение леммы.

В силу этих двух лемм и теоремы 5 справедлива

Теорема 6. (i) *Пусть* $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовое пространство задачи* (1), (2) *совпадает с пространством* $\mathfrak{U}$.

(ii) *Пусть* $\lambda \in \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовым пространством задачи* (1), (2) *является простое банахово* C^1 *— многообразие*

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \int\limits_\Omega (\nu\Delta u - id\Delta^2 u + \beta u|u|^2)\varphi_l dx = 0, \quad \lambda_l = \lambda\}$$

моделируемое подпространством $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l\rangle = 0,\ \lambda_l = \lambda\}$.

Заключение. Данное исследование посвящено вопросам разрешимости методами теории уравнений соболевского типа, причем последнее является специфически относительно радиальным, то есть это уравнение нельзя рассматривать в рамках других классов уравнений соболевского типа. Фазовым пространством задачи (1), (2) в любом случае является простое банахово C^1-многообразие

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \mathfrak{M}, & \lambda \in \{\lambda_k\}, \end{cases}$$

моделируемое подпространством

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \mathfrak{U}^1, & \lambda \in \{\lambda_k\}. \end{cases}$$

В дальнейшем предполагается всесторонне изучить это уравнение, как с точки зрения качественных исследований решений, так и с точки зрения численных решений.

1. **Дразин Ф.** Введение в теорию гидродинамической устойчивости / Ф. Дразин. – М.: Физматлит, 2005. – 287 с.
2. **Aranson I. S.** The world of the complex Ginzburg – Landau equation / I. S. Aranson, L. Kramer // Rev. Mod. Phys. – 2002. – V. 74, No 1. – P. 99–143.
3. **Уинзем Дж.** Линейные и нелинейные волны в приложении к электродинамике / Дж. Уинзем. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
4. **Скотт Э.** Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Э. Скотт. – М.: Физматлит, 2005. – 431 с.
5. **Demidenko G. V.** Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii. – New York – Basel – Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.
6. **Favini A.** Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1999. – 236 p.
7. **Pyatkov S. G.** Operator theory. Nonclassical problems / S. G. Pyatkov. – Utrecht – Boston – Köln – Tokyo: VSP, 2002. – 353 p.
8. **Sviridyuk G. A.** Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.
9. **Сагадеева М. А.** Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М. А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
10. **Свиридюк Г. А.** Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.
11. **Свиридюк Г. А.** Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г. А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.
12. **Сагадеева М. А.** Существование и устойчивость решений полулинейных уравнений соболевского типа в относительно радиальном случае / М. А. Сагадеева // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия Математика. – 2013. – № 1. – С. 78 – 88.
13. **Сагадеева М. А.** Аппроксимации вырожденных C_0-полугрупп / М. А. Сагадеева, А. Н. Шулепов // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 133 – 137.
14. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 446 p.