

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74S05  
УДК 539.3

С. М. Гребенюк, В. З. Юречко, А. А. Бова  
Запорізький національний університет

**ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ  
ГУМОВОГО БУФЕРА НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ  
СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА**

Гребенюк С. М., Юречко В. З., Бова А. А. **Визначення напружено-деформованого стану гумового буфера на основі моментної схеми скінченного елемента.** Робота присвячена розробці та чисельній реалізації підходів при дослідженні напружено-деформованого стану пористого та непористого гумового буфера з урахуванням слабкої стисливості на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента в умовах в'язкопружного деформування.

**Ключові слова:** еластомери, слабка стисливість, кубічна апроксимація, пористість, метод скінчених елементів, ядро релаксації, в'язкопружність.

Гребенюк С. Н., Юречко В. З., Бова А. А. **Определение напряженно-деформированного состояния резинового буфера на основе моментной схемы конечного элемента.** Работа посвящена разработке и численной реализации подходов при исследовании напряженно-деформированного состояния пористого и непористого резинового буфера с учетом слабой сжимаемости на основе уточненной моментной схемы конечного элемента в условиях вязкоупругого деформирования.

**Ключевые слова:** эластомеры, слабая сжимаемость, кубическая аппроксимация, пористость, метод конечных элементов, ядро релаксации, вязкоупругость.

Grebenyuk S. N., Iurichko V. Z., Bova A. A. **Determination of stress-strain state of rubber buffer on the basis of finite element moment scheme.** This work is devoted to elaboration and numerical realization of approaches at research of the stress-strain state of the porous and non-porous rubber buffer taking into account weak compressibility on the basis of the precise finite element moment scheme under viscoelastic deformation conditions.

**Key words:** the elastomer, a weak compressibility, cubic approximation, porosity, finite element method, relaxation core, viscoelasticity.

**Вступ.** На сьогодні важко знайти таку галузь сучасної техніки і науки, в якій не використовувалися б конструкції на основі еластомерів. Особливо широко застосування вони отримали в машинобудуванні, гірській промисловості, сільськогосподарській техніці як амортизатори, віброізолятори, буфери, шини, підвіски, демпфери та інші деталі.

Згадані елементи, як правило, знаходяться в складному тривимірному напружено-деформованому стані (НДС). Описання такого стану вимагає побудови адекватних математичних моделей досліджуваних об'єктів, розробки спеціальних методів і алгоритмів розв'язку задач задля того, щоб враховувати відмінні

риси еластомерів, зокрема слабку стисливість, високу механічну міцність з високою еластичністю, реологічні характеристики, наявність пористості.

Аналітичний розрахунок для більшості конструкцій є дуже складною, а інколи і неможливою процедурою, тому великого значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів (МСЕ).

Дослідженню поведінки еластомерних елементів конструкцій за допомогою аналітичних, емпіричних, експериментальних методів присвячені роботи [1, 2, 3].

Розвиток і особливості використання МСЕ та його модифікації в механіці слабкостисливих еластомерів розглянуто в роботах [4, 5, 6, 7].

В роботах [8, 9, 10, 11, 12] розроблені методи чисельного моделювання і аналізу НДС пористих середовищ і конструкцій з пористих матеріалів (ПМ) в умовах в'язкопружного деформування.

Аналізуючи дослідження НДС еластомерів, можна зробити такі висновки: більшість методів мають теоретичний характер; розраховувалися об'єкти простої геометричної форми; враховувалась гіпотеза про нестисливість еластомера; розрахунок, як правило, проводився в двовимірній постановці; представлені тільки теоретичні співвідношення для ПМ без розрахунків конкретних конструкцій з ПМ; не враховувалися реологічні властивості ПМ; практично відсутні роботи, в яких описується в'язкопружна поведінка пористих еластомерів.

Зроблені висновки підтверджують необхідність проведення дослідження в обраному напрямку для отримання розв'язання поставленої задачі.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.

### 1. Постановка задачі

Розв'язується статична задача пружності в тривимірній постановці для циліндричного гумового буфера (ГБ) з круглим отвором, в якому  $d$  – діаметр буфера,  $d_0$  – діаметр отвору,  $L$  – висота буфера,  $t$  – висота виточки,  $h$  – відстань від нижньої основи буфера до виточки,  $Q$  – розподілене поверхневе навантаження (рис. 1). Такий ГБ використовують для амортизації кабіни ліфта, встановлюючи його в приямку ліфтової шахти (ідентифікаційний номер MOS09121152198-1, ліфтовий пристрій марки "SCHINDLER EUROLIFT").

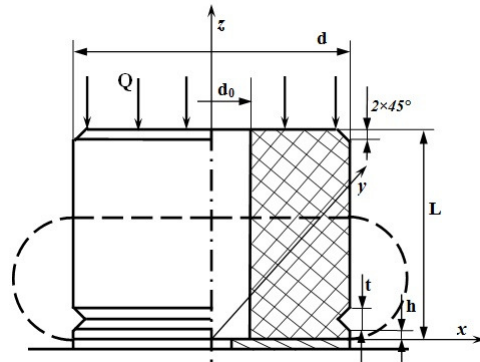


Рис. 1. Циліндричний гумовий буфер з круглим отвором

ГБ знаходиться під осьовим навантаженням, знизу до нього привулканізована металева пластина, що спирається на абсолютно жорстку основу. Бічна грань вільна від навантажень та зацемлена. Граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{u}|_{z=0} &= 0, \\ \sigma_{zz}|_{z=L} &= -Q, \end{aligned}$$

де  $\bar{u}$  – вектор переміщень,  $\sigma_{zz}$  – нормальне напруження.

Розв'язок задачі будується на основі варіаційного принципу з використанням співвідношень Коші, як закони стану використовуються закон Гука та закон Больцмана — Вольтерра.

**2. Уточнена моментна схема скінченного елемента.** Стандартний МСЕ у формі методу переміщень не дозволяє враховувати жорсткі зміщення скінченного елемента (СЕ) і іншу негативну властивість матриці жорсткості (МЖ), пов'язану з появою фіктивних зсувних деформацій, – «ефект хибного зсуву». Крім того, для еластомерних матеріалів, більшість з яких є слабкостисливими, традиційний МСЕ не дозволяє отримувати адекватні результати. Щоб усунути перераховані недоліки, використовують моментну схему скінченного елемента (МССЕ) [5], яка полягає у введенні потрібної апроксимації компонент вектора переміщень, компонент тензора деформацій та функції зміни об'єму.

Але безпосереднє застосування МССЕ для отримання МЖ за заданими інтерполяційними поліномами для апроксимації переміщень СЕ в ряді випадків призводить до відкидання значної кількості членів розкладу деформацій, особливо для СЕ з високим ступенем апроксимуючих поліномів.

Вирішити цю проблему можна за допомогою уточненої моментної схеми скінченного елемента (УМССЕ), яка по суті є модифікацією МССЕ [13]. Цей підхід передбачає отримання виразів для деформацій на базі доповнення вихідних апроксимуючих поліномів СЕ до повного кубічного поліному з подальшим виключенням «зайвих» коефіцієнтів при додаткових доданках.

Використання УМССЕ дозволяє зменшити кількість членів розкладу деформацій, що відкидаються, не порушуючи принципи МССЕ, забезпечуючи при цьому більш високу точність та ефективність процесу розв'язання широкого класу задач механіки деформівного твердого тіла.

Для побудови розв'язуючих рівнянь МССЕ компоненти тензора напружень визначаються на основі узагальненого закону Гука [5]:

$$\sigma^{ij} = 2G_0 \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta \right) + K_0 g^{ij} \theta, \quad (1)$$

де  $K_0$  – модуль об'ємного стиску;  $G_0$  – модуль зсуву гуми;  $\theta = \varepsilon_{ii}$  – функція об'ємного стиску;  $g^{ij}$  – компоненти метричного тензора.

Компоненти вектора переміщень  $\tilde{u}_i$  СЕ апроксимуємо у вигляді розкладу:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_i^{(pqr)} \frac{(x_1)^p}{p!} \frac{(x_2)^q}{q!} \frac{(x_3)^r}{r!} = \omega_i^{000} + \omega_i^{100} x_1 + \omega_i^{010} x_2 + \\ + \omega_i^{110} x_1 x_2 + \omega_i^{001} x_3 + \omega_i^{101} x_1 x_3 + \omega_i^{011} x_2 x_3 + \omega_i^{111} x_1 x_2 x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\omega_i^{pqr}$  – коефіцієнти розкладу переміщень;  $l, m, n$  – максимальні степені апроксимуючих поліномів відносно осей місцевої системи координат  $x_1, x_2, x_3$  відповідно ( $p = \overline{0, l}; q = \overline{0, m}; r = \overline{0, n}$ ).

Зведемо (2) до повного кубічного поліному, при цьому через  $V_i^{(\dots)}$  позначимо додаткові коефіцієнти:

$$u_i = \tilde{u}_i + \Delta u_i, \quad (3)$$

де

$$\Delta u_i = \frac{1}{2} (V_i^{200} x_1^2 + V_i^{020} x_2^2 + V_i^{002} x_3^2 + V_i^{210} x_1^2 x_2 + V_i^{201} x_1^2 x_3 +$$

$$+V_i^{120}x_1x_2^2 + V_i^{102}x_1x_3^2 + V_i^{021}x_2^2x_3 + V_i^{012}x_2x_3^2) + \\ + \frac{1}{6}(V_i^{300}x_1^3 + V_i^{030}x_2^3 + V_i^{003}x_3^3).$$

Для СЕ у формі прямокутного паралелепіпеда всі компоненти деформацій, отримувані на основі (2), представляються у вигляді повних квадратичних поліномів:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij}^{000} + e_{ij}^{100}x_1 + e_{ij}^{010}x_2 + e_{ij}^{001}x_3 + \frac{1}{2}e_{ij}^{200}x_1^2 + \\ + e_{ij}^{110}x_1x_2 + \frac{1}{2}e_{ij}^{020}x_2^2 + e_{ij}^{101}x_1x_3 + e_{ij}^{011}x_2x_3 + \frac{1}{2}e_{ij}^{002}x_3^2,$$

де всі моменти деформацій  $e_{ij}$  задовольняють умовам МССЕ.

Далі визначаються ті компоненти, які містять  $V_i^{(\dots)}$ :

$$e_{11}^{100} = V_1^{200}; e_{11}^{110} = V_1^{210}; e_{11}^{101} = V_1^{201}; e_{11}^{020} = V_1^{120}; e_{11}^{002} = V_1^{102}; e_{11}^{200} = V_1^{300}; \\ e_{22}^{010} = V_2^{020}; e_{22}^{200} = V_2^{210}; e_{22}^{110} = V_2^{120}; e_{22}^{011} = V_2^{021}; e_{22}^{002} = V_2^{012}; e_{22}^{020} = V_2^{030}; \\ e_{33}^{001} = V_3^{002}; e_{33}^{200} = V_3^{201}; e_{33}^{101} = V_3^{102}; e_{33}^{020} = V_3^{021}; e_{33}^{011} = V_3^{012}; e_{33}^{002} = V_3^{003}; \\ e_{12}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{110} + V_2^{200}); e_{12}^{010} = \frac{1}{2}(\omega_2^{110} + V_1^{020}); e_{12}^{101} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_2^{201}); \\ e_{12}^{011} = \frac{1}{2}(\omega_2^{111} + V_1^{021}); e_{12}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + V_2^{102}); e_{12}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{210} + V_2^{300}); \\ e_{12}^{110} = \frac{1}{2}(V_1^{120} + V_2^{210}); e_{12}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{030} + V_2^{120}); e_{13}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{101} + V_3^{200}); \\ e_{13}^{001} = \frac{1}{2}(\omega_3^{101} + V_1^{002}); e_{13}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_3^{210}); e_{13}^{011} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + \omega_3^{111}); \\ e_{13}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{021} + V_3^{120}); e_{13}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{201} + V_3^{300}); e_{13}^{101} = \frac{1}{2}(V_1^{102} + V_3^{201}); \\ e_{13}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{003} + V_3^{102}); e_{23}^{010} = \frac{1}{2}(\omega_2^{011} + V_3^{020}); e_{23}^{001} = \frac{1}{2}(V_2^{002} + \omega_3^{011}); \\ e_{23}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_2^{111} + V_3^{120}); e_{23}^{101} = \frac{1}{2}(\omega_3^{111} + V_2^{102}); e_{23}^{200} = \frac{1}{2}(V_2^{201} + V_3^{210}); \\ e_{23}^{011} = \frac{1}{2}(V_2^{012} + V_3^{021}); e_{23}^{020} = \frac{1}{2}(V_2^{021} + V_3^{030}); e_{23}^{002} = \frac{1}{2}(V_2^{003} + V_3^{012}).$$

Уточнення схеми зводиться до мінімізації тих коефіцієнтів розкладу деформацій, які згідно МССЕ повинні відкидатися. А саме, з моментів деформацій, які представлені через переміщення та мають «зайві» коефіцієнти, складається сума квадратів. Шляхом її мінімізації отримаємо систему рівнянь, розв'язавши яку, визначимо додаткові коефіцієнти:

$$V_1^{200} = V_1^{210} = V_1^{201} = V_1^{120} = V_1^{102} = V_1^{300} = V_1^{030} = 0; \\ V_1^{003} = V_2^{020} = V_2^{021} = V_2^{012} = V_2^{030} = V_2^{210} = V_2^{120} = 0; \\ V_2^{300} = V_2^{003} = V_3^{003} = V_3^{021} = V_3^{002} = 0;$$

$$\begin{aligned}
V_3^{300} &= V_3^{030} = V_3^{201} = V_3^{102} = V_3^{012} = 0; \\
V_1^{021} &= V_3^{120} = -\omega_2^{111}/3; V_1^{020} = -\omega_2^{110}; V_3^{200} = -\omega_1^{101}; \\
V_1^{012} &= V_2^{102} = -\omega_3^{111}/3; V_1^{002} = -\omega_3^{101}; V_2^{200} = -\omega_1^{110}; \\
V_2^{201} &= V_3^{210} = -\omega_1^{111}/3; V_2^{002} = -\omega_3^{011}; V_3^{020} = -\omega_2^{011}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Таким чином, виходячи з формул (2) та (3), допоміжний закон розподілення переміщень тривимірного СЕ матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_1^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_2^{110} x_2^2 + \omega_3^{101} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_2^{111} x_2^2 x_3 + \omega_3^{111} x_2 x_3^2); \\
u_2 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_2^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_1^{110} x_1^2 + \omega_3^{011} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_3 + \omega_3^{111} x_1 x_3^2); \\
u_3 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_3^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_1^{101} x_1^2 + \omega_2^{011} x_2^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_2 + \omega_2^{111} x_1 x_2^2).
\end{aligned}$$

Функція зміни об'єму:

$$\theta = e_{11}^{000} g^{11} + e_{22}^{000} g^{22} + e_{33}^{000} g^{33},$$

де  $e_{ij}^{pqr}$  – коефіцієнти розкладу деформацій.

Детальне виведення співвідношень МЖ для еластомерних конструкцій з використанням запропонованих апроксимацій представлено в роботі [14].

**3. Урахування пористості матеріалу.** Для отримання пружних сталих пористої гуми (ПГ) використовувалися метод самоузгодження і варіаційний метод Хашина—Штрікмана [15]. В рамках методу самоузгодження для пор сферичної форми:

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \alpha_0 \rho}; \frac{G}{G_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \beta_0 \rho}, \tag{5}$$

де  $\alpha_0 = \frac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)}$ ;  $\beta_0 = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu_0}{1 - \nu_0}$ ;  $K$ ,  $G$ ,  $K_0$ ,  $G_0$  – модулі об'ємного стиску та зсуву пористого матеріалу і матриці відповідно;  $\nu_0$  – коефіцієнт Пуассона матриці;  $\rho = 1 - P$ ,  $P$  – пористість.

Для випадкового просторового розподілення пор:

$$\frac{K}{K_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} p\right)^{-1}; \frac{G}{G_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} q\right)^{-1}. \tag{6}$$

Для пор голкоподібної форми:

$$p = \frac{5 - 4\nu_0}{3(1 - 2\nu_0)}; q = \frac{8}{15}(5 - 3\nu_0). \tag{7}$$

Для пор дискової форми:

$$p = \frac{4}{3} \frac{1 - \nu_0^2}{1 - 2\nu_0} \frac{1}{\pi l}; q = \frac{8}{15} \frac{(1 - \nu_0)(5 - \nu_0)}{2 - \nu_0} \frac{1}{\pi l}, \tag{8}$$

де  $l = t/d$ ,  $t$  — товщина,  $d$  — діаметр пори.

Варіаційний метод Хашина—Штрікмана має вигляд:

$$\frac{K}{K_0} = \rho \left( 1 + (1 - \rho) \frac{3K_0}{4G_0} \right)^{-1}; \quad \frac{G}{G_0} = \left( 1 + \frac{2}{3}(1 - \rho) \left( \frac{10G_0}{9K_0 - G_0} \right) \right)^{-1}. \quad (9)$$

**4. В'язкопружне деформування пористого ГБ.** Реологічні складові параметрів НДС пористого гумового буфера (ПГБ) ураховуються введенням вектора додаткового навантаження, для визначення якого розв'язуючі рівняння МСЕ будуються на основі варіації повної потенціальної енергії системи [16]. Основний закон спадкової в'язкопружності представляється в операторній формі Гука на основі принципу Больцмана—Вольтерра.

Для побудови скінченно-елементної моделі інтегральні співвідношення в'язкопружності представляються в кінцево-різницевої формі. Вважаючи, що переміщення  $u(t)$  і деформації  $\varepsilon(t)$  змінюються лінійно всередині кожного інтервалу часу, вираз для компонентів тензора напружень запишеться у вигляді:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t_n) = C^{ijkl} \left( \varepsilon_{kl}(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_{kl}(t_m) R_m \right),$$

де  $C^{ijkl}$  — компоненти тензора пружних сталей,  $R_m = \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t - \tau) d\tau$ .

Як ядро релаксації ПГ використовуємо слабкосингулярне ядро Работнова

$$R(t - \tau) = (t - \tau)^\alpha \chi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(\alpha+1))} \quad (10)$$

і ядро Ржаніцина

$$R(t - \tau) = A e^{-\beta(t-\tau)} (t - \tau)^{\alpha-1}, \quad (11)$$

де  $\chi$ ,  $A$  — параметри релаксації,  $\alpha$ ,  $\beta$  — реологічні параметри.

На основі варіаційного принципу співвідношення для МЖ ПМ в умовах в'язкопружного деформування матимуть вигляд:

$$\left( M^{\mu\nu}(t_n) u_\mu(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} M^{\mu\nu}(t_m) u_\mu(t_m) R_m - F^\nu(t_n) \right) \delta u_\nu = 0.$$

Оскільки  $\delta u_\nu \neq 0$ , то нулю повинен дорівнювати вираз в дужках, який є лінеаризованою системою розв'язуючих рівнянь спадкової в'язкопружності:

$$M_n \bar{u}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{P}_m + \bar{Q}_{(n)}, \quad (12)$$

де  $\bar{u}^{(n)} = u_\mu(t_n)$  — вектор переміщень,  $\bar{P}_m = R_m M^{\mu\nu}(t_m) u_\mu(t_m)$  — вектор додаткового навантаження,  $\bar{Q}_{(n)} = F^\nu(t_n)$  — вектор розподілених поверхневих навантажень, діючих на момент часу  $t_n$ .

Розв'язок системи (12) будується на основі модифікованого методу Ньютона—Канторовича для розв'язання задачі в'язкопружності [16].

**5. Результати розрахунків.** Даний підхід розрахунку ГБ був реалізований в рамках програмного комплексу «МІРЕЛА+» [17].

Вихідні дані:  $d = 0,125$  м,  $d_0 = 0,035$  м,  $L = 0,1$  м,  $t = 0,005$  м,  $h = 0,00375$  м,  $Q = 10000$  Н, коефіцієнт Пуассона  $\nu_0 = 0,49$ , товщина буфера  $b = (d - d_0)/2 = 0,045$  м, модуль зсуву ПГ  $G_0 = 2 \times 10^6$  Па, модуль об'ємного стиску ПГ  $K_0 = 99,3 \times 10^6$  Па, реологічні параметри: ядра Работнова  $\alpha = -0,6$ ,  $\beta = 2,082$ ,  $\chi = 0,45$ , ядра Ржаніцина  $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $A = 0,0765$ . Припускається релаксація лише модуля зсуву  $G$  ПМ.

Розрахунки в лінійній постановці були проведені для низки марок гуми при різних сітках дискретизації. Результати представлені при сітці дискретизації  $7 \times 10 \times 13$ .

Розподілення переміщень  $u_1$  за товщиною ГБ при коефіцієнті Пуассона  $\nu = 0,4999$  і по висоті ГБ при  $\nu = 0,49999$ , отримані на основі УМССЕ, представлені на рис. 2 і на рис. 3 відповідно.

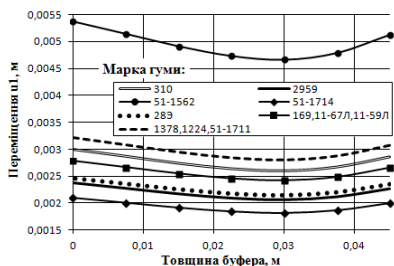


Рис. 2. Розподілення переміщень  $u_1$  за товщиною гумового буфера

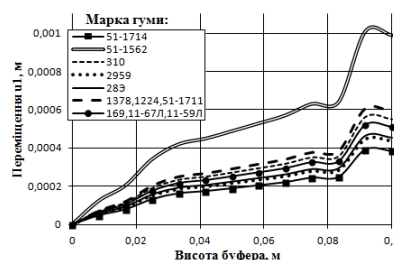


Рис. 3. Розподілення переміщень  $u_1$  по висоті гумового буфера

Залежність переміщень  $u_1$  від коефіцієнта Пуассона  $\nu$  і розподілення нормальних напружень за товщиною ГБ при  $L = 0,05$  м та  $\nu = 0,4999$ , отримані з використанням кубічної апроксимації переміщень (3), представлені на рис. 4 і на рис. 5 відповідно. На рис. 5: 1 –  $\sigma^{11}$ , 2 –  $\sigma^{22}$ , 3 –  $\sigma^{33}$ .

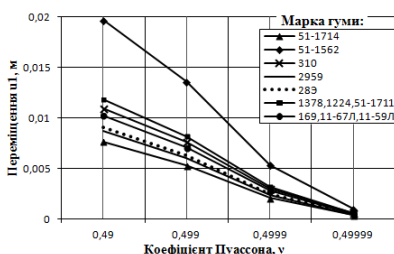


Рис. 4. Залежність переміщень  $u_1$  від коефіцієнта Пуассона  $\nu$

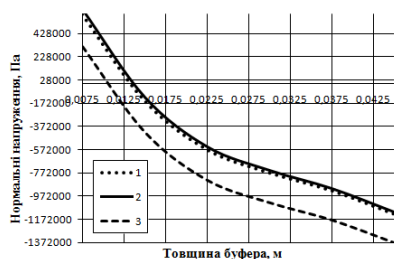


Рис. 5. Розподілення нормальних напружень за товщиною ГБ

На рис. 6–8: 1 – формула (1), 2 – формули (2) і (3), 3 – формули (2) і (4), 4 – формула (5).

На рис. 6 представлено розподілення нормальних напружень  $\tilde{\sigma}^{11}$  за товщиною ПГБ для ядра Работнова (10) в момент часу  $t = 1$  секунда при пористості  $P = 50\%$  для кожного з методів (5)–(9) при сітці дискретизації  $5 \times 8 \times 12$ .

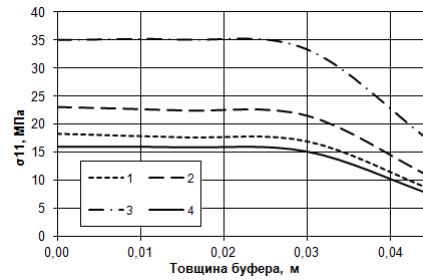


Рис. 6. Розподілення нормальних напружень  $\tilde{\sigma}^{11}$  за товщиною пористого буфера (формула (10))

Залежність переміщень  $u_1(t)$  від часу  $t \in [0; 1]$  секунди при пористості  $P = 50\%$  для кожного з методів (5)–(9) при сітці дискретизації  $5 \times 8 \times 12$  представлена для ядра Работнова (10) на рис. 7 та для ядра Ржаніцина (11) — на рис. 8.

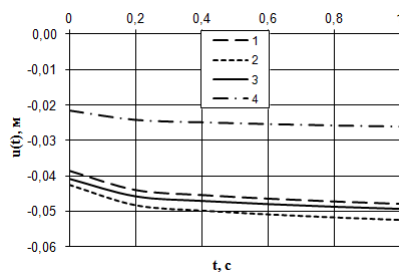


Рис. 7. Залежність переміщень від часу (формула (10))

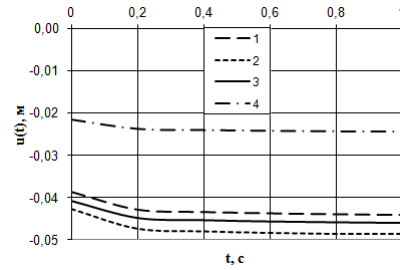


Рис. 8. Залежність переміщень від часу (формула (11))

**Висновки.** При дослідженні напружено-деформованого стану гумового буфера на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента отримані такі результати: збільшення коефіцієнта Пуассона посилює жорсткісні характеристики конструкції; на внутрішній частині буфера, по контуру отвору, діють розтягуючі напруження, а на зовнішній частині — стискальні напруження; при використанні гуми марки 51-1562 буфер зазнає найбільших деформацій, використання гуми марки 51-1714 дозволяє зменшити рівень деформації на 58%.

При дослідженні в'язкопружної поведінки пористого гумового буфера наявність пористості та урахування реологічних характеристик пористої гуми значно впливають на параметри напружено-деформованого стану. Найбільші переміщення отримані з використанням формул (5), (8), найменші — для формули (9). Переміщення в залежності від використання методів (5)–(9) збільшились на 13–15% для ядра Работнова і на 21–24% для ядра Ржаніцина.

Запропоновані підходи розв'язку задач механіки еластомерів на основі моментної схеми скінченного елемента дозволяють уточнити параметри напружено-деформованого стану слабкостисливих та пористих еластомерів, що доводить перспективність використання цих підходів. Надалі доцільним буде проводити розрахунок конструкцій більш складної геометричної форми в умовах геометрично



нелінійного деформування та з урахуванням нелінійності властивостей матеріалу.

1. **Дырда В. И.** Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей: монография / В. И. Дырда, С. Н. Гребенюк, С. И. Гоменюк. – Днепропетровск; Запорожье : Запорожский национальный университет, 2012. – 370 с.
2. **Прикладные** методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / С. И. Дымников, Э. Э. Лавендел, А. А. Павловскис, М. И. Сниегс. – Рига : Зинатне, 1980. – 238 с.
3. **Zhang S. W.** Studies on rubber wear / S. W. Zhang // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology. – 1998. – Vol. 212, 3. – P. 227–234.
4. **Големшток Г. М.** Реализация метода конечных элементов для расчета конструкций из несжимаемых и почти несжимаемых материалов / Г. М. Големшток // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1983. – № 23. – С. 47–56.
5. **Киричевский В. В.** Метод конечных элементов в механике эластомеров : [монография] / В. В. Киричевский. – К. : Наукова думка, 2002. – 655 с.
6. **Гребенюк С. Н.** Расчет напряженно-деформированного состояния резинового виброизолятора / С. Н. Гребенюк, А. А. Бова // Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте. – 2012. – Т. 3. – С. 30–34.
7. **Mankovits T.** Finite Element Analysis of Rubber Bumper Used in Air-springs / T. Mankovits, T. Szaby // Procedia Engineering. – 2012. – No. 48. – P. 388–395.
8. **Голованов А. И.** Расчет больших упругопластических деформаций трехмерных тел МКЭ / А. И. Голованов, Л. У. Султанов // Математическое моделирование систем и процессов. – 2004. – № 12. – С. 4–11.
9. **Гребенюк С. М.** Визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування / С. М. Гребенюк, В. З. Юречко // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 53–60.
10. **Дорняк О. Р.** Численное решение краевой задачи вязкоупругого деформирования ортотропного капиллярно-пористого материала при прессовании / О. Р. Дорняк // Вестник ВГУ. Серия: физ., мат. – 2005. – № 2. – С. 138–146.
11. **Chateau X.** Micro mechanics of saturated and unsaturated porous media / X. Chateau, L. Dormieux // International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2002. – Vol. 26. – P. 831–844.
12. **Coussy O.** Non-linear binding and the diffusion-migration test / O. Coussy, R. Eymard // Transport in Porous Media. – 2003. – Vol. 1770. – P. 1–24.
13. **Метод** конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислюцкий, В. В. Киричевский и др. / под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К. : Вища школа, 1982. – 480 с.
14. **Гребенюк С. Н.** Повышение точности моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов / С. Н. Гребенюк, А. А. Бова // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании. – 2009. – Т. 22. – С. 55–64.

15. **Ковальченко М. С.** Механические свойства изотропных пористых материалов / М. С. Ковальченко // Порошковая металлургия. – 2002. – № 5-6. – С. 105–127.
16. **Гребенюк С. М.** Визначення напружено-деформованого стану пористого гумового буфера в умовах нелінійного деформування / С. М. Гребенюк, В. З. Юречко // Вісник ТНТУ імені Івана Пулюя. Механіка та матеріалознавство. – 2013. – № 2. – С. 52–62.
17. **Метод** конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб и др. – К. : Наук. думка, 2005. – 416 с.