

Mathematical Subject Classification: 74B20, 74C05, 74G70
УДК 539.375

М. В. Дудик, Ю. В. Дихтяренко, Г. А. Хазин
Уманский государственный педагогический университет

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
У ВЕРШИН ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА,
ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД**

Дудик М. В., Дихтяренко Ю. В., Хазин Г. А. Напружено-деформований стан біля вершин тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу середовищ. Методом Вінера—Хопфа в умовах плоскої деформації знайдено розв'язок задачі про напружено-деформований стан біля вершин тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу двох різних пружних середовищ. Отримані вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в обох вершинах в загальному і частинних випадках розподілу навантаження вздовж берегів тріщини. **Ключові слова:** кутова точка межі поділу середовищ, тріщина нормального відриву, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Дудик М. В., Дихтяренко Ю. В., Хазин Г. А. Напряженно-деформированное состояние у вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела сред. Методом Винера—Хопфа в условиях плоской деформации найдено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии вблизи вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела двух различных упругих сред. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений у обеих вершин в общем и частных случаях распределения нагрузки вдоль берегов трещины. **Ключевые слова:** угловая точка границы раздела сред, трещина нормального отрыва, коэффициент интенсивности напряжений.

Dudyk M. V., Dikhtiarenko Yu. V., Khazin G. A. Stress-strain state near the tips of a mode I crack going out from angular point of an interface of media. The solution of the problem about the stress-strain state near the tips of a mode I crack going out from angular point of an interface of two different elastic media is founded by the Wiener—Hopf method for the plain strain conditions. The expressions for the stress intensity factor at the both tips in general and particular cases of stress distribution along the crack lips are obtained. **Key words:** angular point of an media interface, mode I crack, stress intensity factor.

ВВЕДЕНИЕ. В механике разрушения кусочно-однородных тел большое количество публикаций посвящено трещинам, расположенным на границе раздела сред, и гораздо меньше трещинам, выходящим на границу раздела, причем главным образом рассматриваются задачи о трещинах, выходящих на плоскую границу [1, 9, 16-20, 22, 23]. В то же время определенный интерес представляет более общий случай ломаной границы раздела с трещиной, выходящей из вершины излома. Отсутствие симметрии здесь существенно усложняет решение соот-

ветствующей задачи теории упругости, что требует применения для этих целей числовых методов или упрощения условий нагружения [4, 8, 11, 14, 15, 21].

В данной работе в условиях плоской деформации получено аналитическое решение симметричной задачи о трещине нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела, при нагружении ее берегов отрывным нормальным напряжением произвольного вида. Знание локального поля напряжений у вершин трещины необходимо для исследования зон предразрушения в их окрестности и предсказания направления дальнейшего распространения трещины [3, 5-7].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Постановка задачи. В условиях плоской деформации рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного тела, состоящего из двух линейно-упругих клиньев с упругими параметрами E_1, ν_1 и E_2, ν_2 , дополняющих друг друга до плоскости, жестко соединенных вдоль их граней $\theta = \pm\alpha$ (рис. 1). Из угловой точки границы раздела вдоль линии симметрии $\theta = \pm\pi$ выходит трещина длины L , к части берегов которой $a \leq r \leq b$ приложено отрывное нормальное напряжение $\sigma_\theta(r, \pm\pi) = -\sigma(r) < 0$, а какая-либо другая внешняя нагрузка отсутствует. Задача состоит в определении коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещины, для чего в силу симметрии достаточно получить решение статической краевой задачи теории упругости в полуплоскости $0 \leq \theta \leq \pi$ с граничными условиями:

$$\theta = 0 : \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = \pi : \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = \alpha : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = \pi, \quad 0 \leq a \leq r \leq b \leq L : \sigma_\theta = -\sigma(r);$$

$$\theta = \pi, \quad r \geq L : u_\theta = 0; \quad (2)$$

$$\forall \theta, \quad r \rightarrow \infty : \sigma_\theta(r, \theta) \sim o(1/r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) \sim o(1/r);$$

$\langle f \rangle$ – скачок величины f .

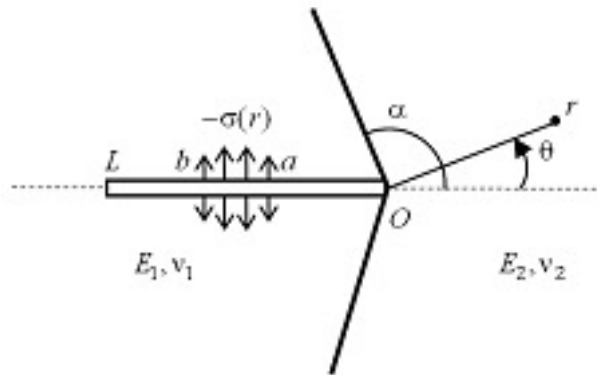


Рис. 1. Схема кусочно-однородного тела, состоящего из двух линейно-упругих клиньев

Построение решения задачи методом Винера—Хопфа. Применив к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций и закону Гука интегральное преобразование Меллина [13] $f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr$, где $f(r, \theta)$ – произвольная компонента тензора напряжений, p – комплексный параметр преобразования, получим следующие выражения для трансформант напряжений и производных от смещений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta^{k*}(p, \theta) &= a_1^k(p) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p) \sin(p-1)\theta + a_3^k(p) \cos(p+1)\theta + \\
 &\quad + a_4^k(p) \cos(p-1)\theta, \\
 \tau_{r\theta}^{k*}(p, \theta) &= \frac{1}{p-1} [a_1^k(p)(p+1) \cos(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta - \\
 &\quad - a_3^k(p)(p+1) \sin(p+1)\theta - a_4^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta], \\
 \sigma_r^{k*}(p, \theta) &= -\frac{1}{p-1} [a_1^k(p)(p+3) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta + \\
 &\quad + a_3^k(p)(p+3) \cos(p+1)\theta + a_4^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta], \\
 \left(\frac{\partial u_\theta^k}{\partial r}\right)^* &= \frac{1+\nu_k}{E_k(p-1)} [a_1^k(p)(p-\kappa_k) \cos(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta - \\
 &\quad - a_3^k(p)(p-\kappa_k) \sin(p+1)\theta - a_4^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta], \\
 \left(\frac{\partial u_r^k}{\partial r}\right)^* &= -\frac{1+\nu_k}{E_k(p-1)} [a_1^k(p)(p+\kappa_k) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta + \\
 &\quad + a_3^k(p)(p+\kappa_k) \cos(p+1)\theta + a_4^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta], \quad (3)
 \end{aligned}$$

где $a_j^k(p)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – неизвестные функции, определяемые в ходе решения задачи ($k = 1$ для первого и $k = 2$ для второго материала), $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$.

Подставив (3) в преобразованные по Меллину граничные условия (1), приходим к системе линейных алгебраических уравнений для $a_j^k(p)$, решение которой выразим через трансформанту $\sigma_\theta^*(p, \pi)$:

$$\begin{aligned}
 a_1^1(p) &= -\frac{(p-1)(1-e)}{D_0(p)} \{2d_1(p)d_2(p) + (1+\kappa_1) \sin p(\pi - 2\alpha)\Delta_4(p)\} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\
 a_2^1(p) &= -\frac{1}{D_0(p)} \{(1+\kappa_1)(e+\kappa_1-1-e\kappa_2) \sin p\pi \Delta_4(p) - \\
 &\quad - 2(1-e)(p+1)d_1(p)d_3(p) - \\
 &\quad - (1-e)(1+\kappa_1)(p+1) \sin p(\pi - 2\alpha)\Delta_4(p)\} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\
 a_3^1(p) &= \frac{(p-1)}{D_0(p)} \{2(1-e)d_1(p)d_4(p) + \\
 &\quad + (1+\kappa_1)[(1-e) \cos p(\pi - 2\alpha)\Delta_4(p) + e(1+\kappa_1) \sin p\pi]\} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\
 a_4^1(p) &= -\frac{1}{D_0(p)} \{(1+\kappa_1)(e+\kappa_1-1-e\kappa_2) \cos p\pi \Delta_4(p) + \\
 &\quad + 2(1-e)(p+1)d_1(p)d_5(p) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - e)(1 + \kappa_1)(p + 1) \cos p(\pi - 2\alpha) \Delta_4(p) + \\
& + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(p + 1) \sin p\pi \} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\
& a_1^2(p) = a_2^2(p) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3^2(p) &= \frac{(p-1)}{D_0(p)} (1 + \kappa_1) [(1 + \kappa_1) \sin p\pi + 2(1 - e)d_6(p)] \sigma_\theta^*(p, \pi), \\
a_4^2(p) &= -\frac{(p-1)}{D_0(p)} (1 + \kappa_1) [(1 + \kappa_1)d_7(p) + 2(1 - e)d_8(p) - \\
& - 2e(1 + \kappa_2)d_2(p)] \sigma_\theta^*(p, \pi); \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0(p) &= -4e^2 \Delta_1(p) \Delta_2(p) + e \{ (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \sin 2p\pi + 4\Delta_1(p) \Delta_2(p) - \\
& - \Delta_4(p) [(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) - 4\Delta_3(p)] \} + \Delta_4 [(1 + \kappa_1)^2 - 4\Delta_3(p)]
\end{aligned}$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha), \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \kappa_2 \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p(\pi - \alpha), \Delta_4(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha;$$

$$d_1(p) = (1 - e) \Delta_4(p) + e(1 + \kappa_2) \sin 2p\alpha,$$

$$d_2(p) = p \sin \alpha \cos(p\pi + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$d_3(p) = p \sin \alpha \cos(p\pi - \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$d_4(p) = p \sin \alpha \sin(p\pi + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha,$$

$$d_5(p) = p \sin \alpha \sin(p\pi - \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha,$$

$$d_6(p) = p \sin \alpha \cos(p\pi - 2p\alpha + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$d_7(p) = p \sin(p\pi + 2\alpha) - \sin p(\pi - 2\alpha),$$

$$\begin{aligned}
d_8(p) &= p \sin \alpha [p \cos(p\pi - 2p\alpha - \alpha) - \cos(p\pi + \alpha)] - \\
& - \sin p(\pi - \alpha) [p \cos(p + 2)\alpha - \cos p\alpha],
\end{aligned}$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}.$$

Выразив с помощью (3-4) трансформанту $\left(\frac{\partial u_\theta^1}{\partial r}\right)^*$ через $\sigma_\theta^*(p, \pi)$ и используя условия (2), приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа задачи в полосе $-\varepsilon_2 < \text{Re} p < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достаточно малые положительные числа):

$$\Phi^+(p) - \tilde{\sigma}(p) = -ctgp\pi G(p) \Phi^-(p), \tag{5}$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho L, \pi) \rho^p d\rho, \Phi^-(p) = \frac{E_1}{2(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \frac{\partial u_\theta(\rho L, \pi)}{\partial r} \rho^p d\rho,$$

$$\tilde{\sigma}(p) = \int_{a/L}^{b/L} \sigma(\rho L) \rho^p d\rho, G(p) = \frac{D_0(p)}{2D(p)} \frac{\sin p\pi}{\cos p\pi};$$

$$D(p) = e^2 \Delta_2(p) \Delta_6(p) - e(\Delta_2(p) \Delta_6(p) + \Delta_4(p) \Delta_5(p) - \Delta_7(p)) + \Delta_4(p) \Delta_5(p),$$

$$\Delta_5(p) = p \sin 2\alpha + \kappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha), \Delta_6(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_7(p) = (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \sin^2 p\pi.$$

Функция $G(it)$ является вещественной положительной четной функцией, которая стремится к 1 при $t \rightarrow \pm\infty$, поэтому можно факторизовать $G(p)$ по формуле Гахова [2]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (Re p = 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & Re p < 0, \\ G^-(p), & Re p > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Также имеет место факторизация

$$pctgp\pi = K^+(p)K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)}, \quad (7)$$

($\Gamma(p)$ – гамма-функция Эйлера), где $K^+(p)$ аналитична и не имеет нулей в области $Re p < 0,5$, а $K^-(p)$ – в области $Re p > -0,5$. Тогда уравнение (5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{\bar{\sigma}(p)}{K^+(p)G^+(p)} = -\frac{K^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)} \quad (Re p = 0). \quad (8)$$

Заменим функцию $\frac{\bar{\sigma}(p)}{K^+(p)G^+(p)}$ разностью крайних значений аналитических функций [2]:

$$\frac{\bar{\sigma}(p)}{K^+(p)G^+(p)} = \bar{\sigma}^+(p) - \bar{\sigma}^-(p) \quad (Re p = 0),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\bar{\sigma}(z) dz}{K^+(z)G^+(z)(z-p)} = \begin{cases} \bar{\sigma}^+(p) & (Re p < 0), \\ \bar{\sigma}^-(p) & (Re p > 0). \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получим:

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} - \bar{\sigma}^+(p) = -\frac{K^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)} - \bar{\sigma}^-(p) \quad (Re p = 0). \quad (10)$$

Левая часть уравнения (10) аналитична в полуплоскости $Re p < 0$, а правая – в полуплоскости $Re p > 0$. Тогда, в соответствии с принципом аналитического продолжения, должна существовать единая функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, которая равна левой и правой частям этого уравнения в соответствующих полуплоскостях.

У левой вершины трещины напряжения и смещения имеют асимптотики, соответствующие полубесконечной трещине нормального отрыва в однородном материале:

$$\sigma_\theta(r, \pi) \sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-L)}} \quad (r > L), \quad \frac{\partial u_\theta(r, \pi)}{\partial r} \sim -\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(L-r)}} \quad (r < L).$$

Отсюда с помощью теоремы абелева типа [12] получим:

$$\Phi^+(p) \sim \frac{K_I}{\sqrt{-2pL}}, \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{K_I}{\sqrt{2pL}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (11)$$

В силу (6) и (9) имеем $G^\pm(p) \rightarrow 1$, $\tilde{\sigma}^\pm(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, а формула Стирлинга для гамма-функции дает асимптотики

$$\begin{aligned} K^+(p) &\sim \sqrt{-p} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p < 0, 5), \\ K^-(p) &\sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p > -0, 5). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая приведенные выше асимптотики, находим, что левая и правая части уравнения (10) обращаются на бесконечности в ноль. Поэтому, согласно теореме Лиувилля [10], единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей комплексной плоскости p . Отсюда следует искомое решение исходного уравнения Винера—Хопфа (5):

$$\Phi^+(p) = K^+(p) G^+(p) \tilde{\sigma}^+(p), \quad \Phi^-(p) = -\frac{pG^-(p)}{K^-(p)} \tilde{\sigma}^-(p). \quad (13)$$

В соответствии с (6), (9), (12) и (13), при $p \rightarrow \infty$ имеем

$$\Phi^+(p) \sim \frac{1}{2\pi i \sqrt{-p}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{\sigma}(z) dz}{K^+(z) G^+(z)}.$$

Сравнивая эту асимптотику с (11), получим выражение для коэффициента интенсивности напряжений у левой вершины трещины:

$$K_I = \sqrt{2L} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{\sigma}(z) dz}{K^+(z) G^+(z)}. \quad (14)$$

Для определения коэффициента интенсивности напряжений у правой вершины найдем, используя полученное решение (13) и первую формулу в (3), трансформанту нормального напряжения на продолжении трещины во втором материале:

$$\sigma_\theta^{2*}(p, 0) = \frac{2(1 + \kappa_1)}{D_0(p)} F(p) [K^+(p) G^+(p) \tilde{\sigma}^+(p) - \tilde{\sigma}(p)] L^{p+1},$$

$$F(p) = (1 + \kappa_1) f_1(p) + (1 - e) f_2(p) - e(1 + \kappa_2) d_2(p),$$

$$f_1(p) = p \cos \alpha \sin(p\pi + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$\begin{aligned} f_2(p) &= p^2 \sin 2\alpha \cos(p\pi - 2\alpha) - p [\cos 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) + \sin(p\pi + 2\alpha)] + \\ &\quad + 2 \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha. \end{aligned}$$

Применив к этой трансформанте обратное преобразование Меллина $f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f^*(p, \theta) r^{-p-1} dp$ (γ – произвольная прямая в полосе $-\varepsilon_2 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_1$, параллельная мнимой оси), с использованием теоремы о вычетах найдем главный член разложения напряжения в ряд при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2(r, 0) &= \frac{2(1 + \kappa_1)}{D'_0(-1 - \lambda)} F(-1 - \lambda) [K^+(-1 - \lambda) G^+(-1 - \lambda) \tilde{\sigma}^+(-1 - \lambda) - \\ &\quad - \tilde{\sigma}(-1 - \lambda)] \left(\frac{r}{L}\right)^\lambda, \end{aligned} \quad (15)$$

где $D'_0(p) = \frac{dD_0(p)}{dp}$; λ – наименьший на интервале $(-1, 0)$ корень уравнения $D_0(-1 - \lambda) = 0$, определяющий степень сингулярности напряжений у вершины трещины, заканчивающейся в угловой точке. Зависимость λ от упругих параметров соединенных материалов и угла раствора границы раздела сред была исследована ранее в [4]. Определение производной $D'_0(p)$ не составляет проблем, поэтому выражение для нее не приводится.

Полагая, что у вершины трещины напряжение имеет вид $\sigma_\theta^2(r, 0) \sim \tilde{K}_I(2\pi r)^\lambda \times F(-1 - \lambda)$, найдем из его сравнения с (15) выражение для коэффициента интенсивности:

$$\tilde{K}_I = \frac{2(1 + \kappa_1)(2\pi L)^{-\lambda}}{D'_0(-1 - \lambda)} [K^+(-1 - \lambda)G^+(-1 - \lambda)\tilde{\sigma}^+(-1 - \lambda) - \tilde{\sigma}(-1 - \lambda)]. \quad (16)$$

Частные случаи нагружения. Применим полученные результаты к некоторым частным случаям распределения нагрузки по берегам трещины.

а) Пусть на отрезке (a, b) действует постоянное напряжение σ_0 . Согласно (5)

$$\tilde{\sigma}(p) = \frac{\sigma_0}{p+1} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{p+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{p+1} \right]. \quad (17)$$

Подстановка (17) в (14) дает:

$$K_I = \sqrt{2L}\sigma_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{(z+1)K^+(z)G^+(z)} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{z+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{z+1} \right] dz. \quad (18)$$

С учетом (5–7) формулу (18) перепишем следующим образом:

$$K_I = -\sqrt{2L}\sigma_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2D(z)K^-(z)}{z(z+1)G^-(z)D_0(z)} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{z+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{z+1} \right] dz.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о вычетах, получим:

$$K_I = \sqrt{2L}\sigma_0 \sum_k \frac{2D(z_k)K^-(z_k)}{z_k(z_k+1)G^-(z_k)D'_0(z_k)} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{z_k+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{z_k+1} \right], \quad (19)$$

где z_k – корни уравнения $D_0(z) = 0$, удовлетворяющие условию $Re z_k > 0$.

При $a = 0$ и $b = L$ интегрирование в (18) приводит к полученному ранее результату [8]

$$K_I = \frac{\sqrt{2L}\sigma_0}{K^+(-1)G^+(-1)}.$$

Коэффициент интенсивности напряжений \tilde{K}_I у правой вершины трещины при заданных условиях нагружения определяется из формулы (16) после вычисления $\tilde{\sigma}^+(-1 - \lambda)$ согласно (9) с учетом (17) и использованием теоремы о вычетах. В результате получим:

$$\tilde{K}_I = \frac{\sigma_0}{(2\pi)^\lambda} \frac{2(1 + \kappa_1)}{\lambda D'_0(-1 - \lambda)} \left\{ b^{-\lambda} - a^{-\lambda} + \right.$$

$$+ \sum_k \frac{2\lambda D(z_k) K^-(z_k) K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{z_k(z_k+1)(z_k+1+\lambda) G^-(z_k) D'_0(z_k) L^\lambda} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{z_k+1} - \left(\frac{a}{L}\right)^{z_k+1} \right]. \quad (20)$$

В частности, при $a = 0$ и $b = L$ имеем

$$\tilde{K}_I = \frac{\sigma_0}{(2\pi L)^\lambda} \frac{2(1+\kappa_1)}{\lambda D'_0(-1-\lambda)} \frac{K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{K^+(-1) G^+(-1)}.$$

б) Найдем коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины при действии на ее берега в точках с координатами $(a, \pm\pi)$ нормальных сосредоточенных сил одинаковой интенсивности P . С этой целью в формулах (19) и (20) выполним предельные переходы $a \rightarrow b$, требуя постоянства полной нагрузки $P = \sigma_0(b-a)$. В результате получим:

$$K_I = \frac{\sqrt{2LP}}{a} \sum_k \frac{2D(z_k) K^-(z_k)}{z_k G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left(\frac{a}{L}\right)^{z_k+1},$$

$$\tilde{K}_I = \frac{P}{a(2\pi a)^\lambda} \frac{2(1+\kappa_1)}{D'_0(-1-\lambda)} \times$$

$$\times \left[\sum_k \frac{2D(z_k) K^-(z_k) K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{z_k(z_k+1+\lambda) G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left(\frac{a}{L}\right)^{z_k+1+\lambda} - 1 \right].$$

в) Формулы (19) и (20) могут быть легко обобщены на случай действия на отрезке (a, b) нормального напряжения с полиномальной зависимостью от расстояния:

$$\sigma(r) = \sum_{n=0}^m \sigma_n \left(\frac{r}{L}\right)^n \quad (\sigma_n = const).$$

Вычисления, аналогичные проведенным выше для постоянного напряжения, приводят к следующим выражениям:

$$K_I = \sqrt{2L} \sum_{n=0}^m \sum_k \frac{2\sigma_n D(z_k) K^-(z_k)}{z_k(n+z_k+1) G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{n+z_k+1} - \left(\frac{a}{L}\right)^{n+z_k+1} \right],$$

$$\tilde{K}_I = \frac{2(1+\kappa_1)(2\pi L)^{-\lambda}}{D'_0(-1-\lambda)} \sum_{n=0}^m \sigma_n \left\{ \frac{-1}{n-\lambda} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{n-\lambda} - \left(\frac{a}{L}\right)^{n-\lambda} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_k \frac{2D(z_k) K^-(z_k) K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{z_k(n+z_k+1)(z_k+1+\lambda) G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{n+z_k+1} - \left(\frac{a}{L}\right)^{n+z_k+1} \right] \right\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В условиях плоской деформации найдено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного тела вблизи трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела двух различных упругих изотропных сред. Вершина, совпадающая с угловой точкой, оказывается концентратором напряжений со степенной особенностью, отличной от корневой, тогда как у другой вершины, расположенной в одном из соединенных материалов, сохраняется корневая особенность. Для коэффициентов интенсивности напряжений у обеих вершин при симметричном действии на части берегов трещины отрывного напряжения произвольного вида получены выражения в

форме двукратных интегралов, которые вычислены в частных случаях постоянного напряжения, напряжения с полиномальной зависимостью от расстояния до угловой точки и действия на берега трещины сосредоточенных сил одинаковой интенсивности.

В заключение авторы выражают глубокую признательность проф. Л. А. Кипнису за плодотворные обсуждения настоящей работы.

1. **Боджи Д.** Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов / Д. Боджи // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – Т. 32, № 2. – С. 186–192.
2. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. **Дудик М. В.** Разветвление трещины нормального отрыва в угловой точке границы раздела сред / М. В. Дудик, Ю. В. Дихтяренко // Теор. и прикл. механика. – 2012. – Вып. 5. – С. 101–111.
4. **Каминский А. А.** О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред / А. А. Каминский, М. В. Дудик, В. Н. Дякон // Теор. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 103–108.
5. **Каминский А. А.** О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред / А. А. Каминский, М. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, № 106. – С. 28–41.
6. **Каминский А. А.** О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова, М. В. Дудик // Доповіді НАН України. – 2006. – № 7. – С. 43–46.
7. **Камінський А. О.** Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ / А. О. Камінський, Л. А. Кіпніс, М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 111–119.
8. **Кипнис Л. А.** Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины / Л. А. Кипнис // ПММ. – 1986. – Т. 50, Вып. 2. – С. 334–336.
9. **Кулиев В. Д.** О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред / В. Д. Кулиев, Ю. Н. Работнов, Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР, Механика тв. тела. – 1978. – № 4. – С. 120–128.
10. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 678 с.
11. **Махоркін М.** Асимптотики і поля напружень у клиновій системі за умов антиплоскої деформації / М. Махоркін, Г. Сулим // машинознавство. – 2007. – № 1. – С. 8–13.
12. **Нобл Б.** Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
13. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

14. **Bardzokas D. I.** About a stress deformation condition of a piecewise-uniform wedge with a system of collinear cracks at an antiplane deformation / D. I. Bardzokas, S. H. Gevorgyan, S. M. Mkhitarian // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2005. – № 2. – P. 245–268.
15. **Carpinteri A.** Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems / A. Carpinteri, M. Paggi // *Eng. Fracture Mechanics*. – 2007. – Vol. 74. – P. 59–75.
16. **Chen S.** Finite boundary effects in problem of a crack perpendicular to and terminating at a bimaterial interface / S. Chen, T. Wang, S. Kao-Walter // *Acta Mech. Sinica*. – 2005. – Vol. 21. – P. 56–64.
17. **Cook T. S.** Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface / T. S. Cook, F. Erdogan // *Int. J. Eng. Sciences*. – 1972. – Vol. 10. – P. 677–697.
18. **He M.Y.** Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials / M. Y. He, J. M. Hutchinson // *Int. J. of Solids and Structures*. – 1989. – Vol. 25. – P. 1053–1067.
19. **Leguillon D.** Crack deflection by an interface – asymptotics of the residual thermal stresses / D. Leguillon, C. Lacroix, E. Martin // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – P. 7423–7445.
20. **Li J.** Investigation of an arbitrarily oriented crack meeting an interface between two elastic materials / J. Li, X. B. Zhang, N. Recho // *Eur. J. Mech. A – Solid*. – 1997. – Vol. 16, № 5. – P. 795–821.
21. **Linkov A. M.** Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution / A. M. Linkov, V. F. Koshelev // *Int. J. Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 5909–5930.
22. **Zak A. R.** Crack point stress singularities at bi-material interface / A. R. Zak, M. L. Williams // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* – 1963. – Vol. 30, №1. – P. 142–143.
23. **Zhang Z.** Split singularities and the competition between crack penetration and debond at a bimaterial interface / Z. Zhang, Z. Suo // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 4559–4573.