

Mathematical Subject Classification: 74B10, 42A48
УДК 539.1

Ю. С. Процеров

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ СО СВОБОДНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И УЧЕТОМ
СОБСТВЕННОГО ВЕСА**

Процеров Ю. С. Осесимметричні задачі теорії пружності для циліндра кінцевої довжини з вільною циліндричною поверхнею та за умов врахування власної ваги. Розглянуто пружний циліндр скінченної довжини з урахуванням власної ваги, на нижній основі якого задано умови гладкого контакту, до верхньої основи додано вісисиметричне нормальне навантаження, а бічна поверхня вільна від напружень. За допомогою скінченного інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до інтегро-диференціального рівняння 1-го роду відносно вертикальних переміщень верхньої основи циліндра. Розв'язок рівняння будується у вигляді ряду Фур'є за поліномами Якобі. Знайдено елементарний розв'язок для окремого випадку навантаження циліндра.

Ключові слова: пружний циліндр скінченної довжини, власна вага, вільна бічна поверхня, скінченне інтегральне перетворення Фур'є, інтегро-диференціальне рівняння 1-го роду.

Процеров Ю. С. Осесимметричные задачи теории упругости для цилиндра конечной длины со свободной цилиндрической поверхностью и учетом собственного веса. Рассматривается упругий цилиндр конечной длины с учетом собственного веса, на нижнем основании которого заданы условия гладкого контакта, к верхнему основанию приложена осесимметричная нормальная загрузка, а боковая поверхность свободна от напряжений. При помощи конечного интегрального преобразования Фурье задача сведена к интегро-дифференциальному уравнению 1-го рода относительно вертикальных смещений верхнего основания цилиндра. Решение полученного уравнения строится в виде ряда по многочленам Якоби. Найдено элементарное решение для частого случая загрузки цилиндра.

Ключевые слова: упругий цилиндр конечной длины с учетом собственного веса, свободная боковая поверхность, конечное интегральное преобразование Фурье, интегро-дифференциальное уравнение 1-го рода.

Protserov Yu. S. Axisymmetric problems of elasticity theory for a cylinder of finite length with free cylindrical surface and with taking into account its own weight. The finite elastic cylinder with regard of its dead weight is considered. The conditions of the smooth contact are given on the lower base, the axisymmetrical normal loading is applied to the upper base, the lateral surface is free from the stress. With the help of the finite integral Fourier's transformation the problem is reduced to the integro-differential equation of the 1-st kind with regard to the vertical displacement of the cylinder's upper base. The solution of the obtained equation is constructed as the Fourier's series by the Jacobi's polynomials. The elementary solution is found for the one case of the cylinder's loading.

Key words: elastic finite cylinder, dead weight, free lateral surface, finite integral Fourier transformation, integro-differential equation of 1-st kind.

ВВЕДЕНИЕ. Осесимметричным задачам для упругих цилиндров конечной длины, сплошных и полых, посвящена довольно обширная литература. Состояние проблемы до 1963 года освещено в обзоре [1]. Этим же задачам посвящена значительная часть монографии [5], где приводится обзор работ, опубликованных после 1963 года. Однако, если не касаться приближенных численных методов решения осесимметричных задач для цилиндров конечной длины, аналитических методов, позволяющих построить решение в виде явной функциональной зависимости от вида нагрузки и параметров цилиндра, явно недостаточно. К направлению получения точных решений относятся работы [2] и [3], где решение строится в виде разложений по тригонометрическим или гиперболическим функциям Бесселя, что приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов этих разложений. Однако ни в одной из этих работ не приводится численная реализация предложенных алгоритмов решения. Из последних работ следует упомянуть работы [4] и [8], где с использованием методов суперпозиции и разложений в ряды Фурье—Бесселя решение задач не только сведено к бесконечным системам, но и получены числовые значения напряжений в цилиндре. В работах [9]–[11] решение задачи о напряженном состоянии кругового цилиндра, нагруженного по торцам или по цилиндрической боковой поверхности, также строится в виде рядов Фурье—Бесселя и приводятся численные результаты для определенных видов нагрузок. Во всех публикациях, в том числе и выполненных в последнее время, не учитывается действие объемных сил в виде собственного веса материала цилиндра, что приводит к решению неоднородных уравнений Ламе.

Целью данной работы является определение полей смещений и напряжений в конечном упругом цилиндре со свободной боковой поверхностью под действием осесимметричной нагрузки и с учетом собственного веса цилиндра.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Рассматриваем осесимметричную задачу для упругого цилиндра, заданного в цилиндрической системе координат соотношениями $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$. Искомые функции являются смещения $u_r(r, z)$ и $u_z(r, z)$, которые должны удовлетворять осесимметричным уравнениям Ламе с объемными силами в виде собственного веса

$$\begin{aligned} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u_r \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} &= 0, \\ \frac{2}{\kappa+1} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= \frac{(\kappa-1)\gamma}{(\kappa+1)G}, \end{aligned}$$

где $\kappa = 3 - 4\mu$, μ — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига и γ — удельный вес материала цилиндра.

Напряжения выражаются через смещения формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{4G}{\kappa-1} [(1-\mu) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} +$$

$$+\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r \right)],$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Будем считать, что цилиндр опирается на абсолютно жесткое гладкое основание, т. е. при $z=0$ заданы условия скользящей заделки

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

К верхнему основанию $z=h$ приложена осесимметричная нормальная нагрузка

$$\sigma_z|_{z=h} = -p(r); \quad \tau_{rz}|_{z=h} = 0.$$

Боковая поверхность цилиндра $r=a$ свободна от напряжений

$$\sigma_r|_{r=a} = 0; \quad \tau_{rz}|_{r=a} = 0.$$

Перейдем к безразмерным координатам $\rho = a^{-1}r$ и $\zeta = h^{-1}z$ и величинам $u(\rho, \zeta) = u_r(a\rho, h\zeta)$, $w(\rho, \zeta) = u_z(a\rho, h\zeta)$, $\sigma_\rho(\rho, \zeta) = \sigma_r(a\rho, h\zeta)$, ... Система уравнений Ламе примет вид

$$\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} u \right] + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{2\alpha}{\kappa-1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \zeta} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{2\alpha}{\kappa+1} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\gamma a^2 (\kappa-1)}{G(\kappa+1)},$$

где $\alpha = a^{-1}h$.

Краевые условия на нижнем и верхнем основаниях цилиндра примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad w|_{\zeta=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \alpha \bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=1} = -\frac{a(\kappa-1)}{4G\mu} P(\rho); \quad \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{\mu} = \mu^{-1}(1-\mu) = (3-\kappa)^{-1}(\kappa+1)$, $P(\rho) = p(a\rho)$.

Краевые условия на боковой поверхности цилиндра имеют вид

$$\left(\bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} u + \alpha \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{\rho=1} = 0; \quad \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (4)$$

2. Сведение поставленной краевой задачи к одномерной. Для сведения поставленной краевой задачи к одномерной воспользуемся конечными преобразованиями Фурье по переменной ζ

$$u_n(\rho) = \int_0^1 u(\rho, \zeta) \cos \lambda_n \zeta d\zeta; \quad u(\rho, \zeta) = u_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho) \cos \lambda_n \zeta,$$

$$w_n(\rho) = \int_0^1 w(\rho, \zeta) \sin \lambda_n \zeta d\zeta; \quad w(\rho, \zeta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\rho) \sin \lambda_n \zeta, \quad \lambda_n = \pi n. \quad (5)$$

Применяя их к системе уравнений Ламе (1) с учетом краевых условий (2) и второго из условий (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\rho u'_n(\rho) \right)' - \frac{1}{\rho^2} u_n(\rho) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} u_n(\rho) + \frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} w'_n(\rho) &= \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha (-1)^n \chi'(\rho), \quad (6) \\ -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\rho} (\rho u_n(\rho))' + \frac{1}{\rho} \left(\rho w'_n(\rho) \right)' - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} w_n(\rho) &= \\ &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \alpha \lambda_n^* (-1)^n \chi(\rho) + \frac{1 - (-1)^n \gamma \alpha a^2}{\lambda_n^* G}, \end{aligned}$$

где $\lambda_n^* = \alpha \lambda_n$, а $\chi(\rho) = w|_{\zeta=1}$ — неизвестная функция.

Применив интегральное преобразование (5) к краевым условиям (4), получим

$$\bar{\mu} u'_n(1) + u_n(1) + \lambda_n^* w_n(1) = \alpha (-1)^{n+1} \chi(1); \quad w'_n(1) - \lambda_n^* u_n(1) = 0. \quad (7)$$

3. Построение решения одномерной краевой задачи. При $n=0$ краевая задача (6) – (7) имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \left(\rho u'_0(\rho) \right)' - \frac{1}{\rho^2} u_0(\rho) = \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha \chi'(\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (8)$$

$$\bar{\mu} u'_0(1) + u_0(1) = -\alpha \chi(1), \quad |\chi(0)| < \infty.$$

Общее решение однородного уравнения из (8), ограниченное в нуле, имеет вид $u_0(\rho) = C\rho$. Для получения решения неоднородного уравнения надо построить функцию Грина этой краевой задачи. Поскольку первое краевое условие сильно усложняет процесс построения функции Грина, то заменим его на $u_0(1) = 0$. Тогда при помощи конечного интегрального преобразования Ханкеля

$$u_{0k} = \int_0^1 u_0(\rho) J_1(\beta_k \rho) \rho d\rho; \quad u_0(\rho) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \frac{J_1(\beta_k \rho)}{J_0^2(\beta_k)},$$

где β_k — корни уравнения $J_1(\beta) = 0$, несложно построить билинейное разложение функции Грина этой измененной краевой задачи

$$G_0(\rho, t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k)}.$$

Решение краевой задачи (8) имеем в виде

$$u_0(\rho) = C\rho + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha \int_0^1 G_0(\rho, t) \chi'(t) dt.$$

Удовлетворив краевому условию из (8), получим

$$u_0(\rho) = \frac{\alpha}{2}(\kappa - 3)\rho \int_0^1 \chi(t) dt - 2\alpha \frac{\kappa - 3}{\kappa + 1} \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k)} \right] t dt.$$

При $n \geq 1$ запишем краевую задачу (6) – (7) в векторном виде, для чего введем матричный дифференциальный оператор

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} & \frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} \frac{d}{d\rho} \\ -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho) & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^* \end{pmatrix},$$

векторы $y(\rho) = \begin{pmatrix} u_n(\rho) \\ w_n(\rho) \end{pmatrix}$, $f(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha (-1)^n \chi'(\rho) \\ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \alpha \lambda_n^* (-1)^n \chi(\rho) + \frac{1-(-1)^n}{\lambda_n^*} \frac{\gamma \alpha a^2}{G} \end{pmatrix}$,
 $g = \begin{pmatrix} \alpha (-1)^{n+1} \chi(1) \\ 0 \end{pmatrix}$ и матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_n^* \\ -\lambda_n^* & 0 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда данная краевая задача запишется в виде

$$Ly(\rho) = f(\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (9)$$

$$U[y(\rho)] = Ay(1) + By'(1) = g.$$

При ее решении будем придерживаться схемы работы [6].

Найдем сначала решение однородного векторного уравнения $Ly(\rho) = 0$, ограниченное при $\rho = 0$. Для этого надо построить ограниченное при $\rho = 0$ решение матричного уравнения $LY(\rho) = 0$, $0 < \rho < 1$, где $Y(\rho)$ – матрица второго порядка.

Введем матрицу $H(\rho, s) = \begin{pmatrix} J_1(s\rho) & 0 \\ 0 & J_0(s\rho) \end{pmatrix}$.

Учитывая, что $LH(\rho, s) = -H(\rho, s)M(s)$, где матрица

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} & \frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} s \\ \frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} s & s^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix},$$

решением матричного уравнения будет матрица

$$Y(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C H(\rho, s) M^{-1}(s) ds,$$

где C – замкнутый контур, охватывающий полюса обратной матрицы

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{(s^2 + \lambda_n^{*2})^2} \begin{pmatrix} s^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} & -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} s \\ -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} s & s^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix}.$$

Рассматривая замкнутые контуры C^\pm , охватывающие полюсы второго порядка $s = \pm \lambda_n^*$, и используя теорему о вычетах, получим два комплексно-сопряженных решения

$$Y^\pm(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa-1} \left[\frac{\kappa+1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) \right] & \mp \frac{i}{\kappa+1} \left[\frac{1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) \right] \\ \frac{\rho}{\kappa-1} I_1(\lambda_n^* \rho) & \mp \frac{i}{\kappa+1} \left[\frac{\kappa}{\lambda_n^*} I_0(\lambda_n^* \rho) + \rho I_1(\lambda_n^* \rho) \right] \end{pmatrix},$$

где $I_k(z)$ ($k = 0, 1$) — модифицированные функции Бесселя.
В качестве решения матричного уравнения можно взять

$$Y(\rho) = 2 [ReY^\pm(\rho) \mp I_m Y^\pm(\rho)].$$

Общим же решением однородного векторного уравнения будет

$$y(\rho) = Y_0(\rho) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где $Y_0(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) & \frac{1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) \\ \rho I_1(\lambda_n^* \rho) & \frac{\kappa}{\lambda_n^*} I_0(\lambda_n^* \rho) + \rho I_1(\lambda_n^* \rho) \end{pmatrix}$, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Для нахождения частного решения неоднородного векторного уравнения (9) построим матрицу Грина. Однако краевые условия (7) сильно затрудняют процесс построения, поэтому поступим следующим образом. Заменяем их на однородные краевые условия скользящей заделки при $\rho = 1$

$$u_n'(1) = 0; \quad w_n(1) = 0,$$

т.е. оператор краевых условий в (9) заменим на

$$U[y(\rho)] = y(1) + y'(1) = 0, \quad (10)$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для построения билинейного разложения матрицы Грина этой измененной краевой задачи введем матричное интегральное преобразование

$$y_n = \int_0^1 H(\rho, \beta_k) y(\rho) d\rho$$

с ядром $H(\rho, \alpha_k) = \begin{pmatrix} J_1(\beta_k \rho) & 0 \\ 0 & J_0(\beta_k \rho) \end{pmatrix}$, где β_k — корни уравнения $J_1(\beta) = 0$.

Применив его к неоднородному уравнению (9) и удовлетворив при этом краевому условию (10), получим

$$M_0(\beta_k) y_k = -f_k, \quad \text{где } M_0(\beta_k) = \begin{pmatrix} \beta_k^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_k^{*2} & 2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa+1} \\ 2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} & \beta_k^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $y_k = -M_0^{-1}(\beta_k) f_k$, где $M_0^{-1}(\beta_k) = \frac{1}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \begin{pmatrix} \beta_k^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} & -2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} \\ -2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} & \beta_k^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix}$

при $k \geq 1$ и $y_0 = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\lambda_n^{*2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_0$ при $k = 0$.

Воспользовавшись далее формулой обращения

$$y(\rho) = 2y_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\beta_k)} H(\rho, \beta_k) y_k,$$

получим следующее выражение для частного решения неоднородного уравнения при измененных краевых условиях

$$y_k = \int_0^1 G(\rho, t) f(t) dt,$$

где матрица Грина $G(\rho, t)$ имеет вид

$$G(\rho, t) = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{2}{\lambda_n^{*2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2 J_0^2(\beta_k)} \begin{pmatrix} G_{11}(\rho, t) & G_{12}(\rho, t) \\ G_{21}(\rho, t) & G_{22}(\rho, t) \end{pmatrix},$$

$$G_{11}(\rho, t) = \left(\beta_k^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} \right) J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t);$$

$$G_{12}(\rho, t) = -\frac{2\lambda_n^* \beta_k}{\kappa+1} J_1(\beta_k \rho) J_0(\beta_k t),$$

$$G_{21}(\rho, t) = -\frac{2\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t);$$

$$G_{22}(\rho, t) = \left(\beta_k^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} \right) J_0(\beta_k \rho) J_0(\beta_k t).$$

Таким образом построено общее решение неоднородного уравнения (9)

$$y(\rho) = Y_0(\rho) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_0^1 G(\rho, t) f(t) dt.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из удовлетворения краевому условию краевой задачи (9). Таким образом найдены выражения для трансформант смещений при $n \geq 1$

$$u_n(\rho) = -2\alpha (-1)^n \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{*2} + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \beta_k^2}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \right] t dt -$$

$$-\frac{\kappa-3}{2(\kappa-1)} M_n(\rho) K_n,$$

$$w_n(\rho) = 2\alpha (-1)^n \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{*2} + \frac{\kappa+5}{\kappa+1} \beta_k^2}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \right] t dt +$$

$$+\frac{\kappa-3}{2(\kappa-1)} N_n(\rho) K_n - \frac{2\alpha}{\lambda_n^*} (-1)^n \int_0^1 \chi(t) t dt - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} [1 - (-1)^n] \frac{\gamma \alpha a^2}{G \lambda_n^{*3}},$$

$$\text{где } M_n(\rho) = \Delta^{-1}(\lambda_n^*) \left[I_0(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_1(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) + \frac{\kappa+1}{2\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) \right],$$

$$N_n(\rho) = \Delta^{-1}(\lambda_n^*) \left[I_0(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_1(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - \frac{\kappa + 1}{2\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) \right],$$

$$\Delta(\lambda_n^*) = \lambda_n^* I_0^2(\lambda_n^*) - (\lambda_n^* + \frac{\kappa + 12}{2\lambda_n^*}) I_1^2(\lambda_n^*),$$

$$K_n = -\frac{16\alpha(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)(\kappa - 3)} (-1)^n \lambda_n^{*2} \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] t dt +$$

$$+ \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\gamma \alpha a^2}{G \lambda_n^{*2}} [1 - (-1)^n].$$

Теперь следует воспользоваться формулами обращения (5) для преобразований Фурье. После упрощения и суммирования по n некоторых из рядов получим

$$u(\rho, \zeta) = -\frac{\kappa - 3}{\kappa + 1} \frac{\gamma \alpha a^2}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^{*2}} M_n(\rho) \cos \lambda_n \zeta + \frac{\alpha}{2} (\kappa - 3) \rho \int_0^1 \chi(t) t dt +$$

$$+ \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} A_k(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{16\alpha}{\kappa + 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n^{*2} M_n(\rho) \cos \lambda_n \zeta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] t dt,$$

$$w(\rho, \zeta) = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\gamma h^2}{2G} \zeta (1 - \zeta) + \frac{\kappa - 3}{\kappa + 1} \frac{\gamma \alpha a^2}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^{*2}} N_n(\rho) \sin \lambda_n \zeta +$$

$$+ 2\zeta \int_0^1 \chi(t) t dt + \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} B_k(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{16\alpha}{\kappa + 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n^{*2}(\rho) N_n(\rho) \sin \lambda_n \zeta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] t dt,$$

где

$$A_k(\zeta) = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{ch\beta_k^* \zeta}{\beta_k sh\beta_k^*} - \frac{\alpha(\kappa - 3)}{(\kappa + 1)\beta_k^2} + 2 \frac{ch\beta_k^* \zeta ch\beta_k^* - \zeta sh\beta_k^* \zeta sh\beta_k^*}{\alpha(\kappa + 1) sh^2 \beta_k^*},$$

$$B_k(\zeta) = -2 \frac{sh\beta_k^* \zeta}{\beta_k sh\beta_k^*} - 4 \frac{sh\beta_k^* \zeta ch\beta_k^* - \zeta ch\beta_k^* \zeta sh\beta_k^*}{\alpha(\kappa + 1) sh^2 \beta_k^*}, \quad \beta_k^* = \beta_k/\alpha.$$

4. Получение интегро-дифференциального уравнения и его решение. Полученные выражения для смещений содержат неизвестную функцию

$\chi(\zeta)$ — вертикальные смещения точек верхнего основания цилиндра и ее производную $\chi'(\zeta)$. Для их нахождения следует воспользоваться нереализованным ранее первым краевым условием из (3). В результате приходим к интегро-дифференциальному уравнению I-го рода, которое после выделения сингулярной части ядра имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \sqrt{\rho} \int_0^1 \chi'(t) \ln \frac{1}{|\rho-t|} \sqrt{t} dt + \int_0^1 \chi'(t) R(\rho, t) t dt + \quad (11)$$

$$+ \frac{\alpha(\kappa+1)(\kappa+7)}{\kappa+5} \int_0^1 \chi(t) dt = \frac{a(\kappa+1)}{G(\kappa+5)} P(\rho) + F_\gamma(\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (12)$$

где $R(\rho, t)$ — регулярная часть интегрального уравнения, а $F_\gamma(\rho)$ — правая часть, отвечающая за учет собственного веса цилиндра (приведены в приложении А).

Решение полученного уравнения будем разыскивать в виде разложений по многочленам Якоби

$$\chi(t) = -2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_m}{2m-1} P_m^{(-\frac{1}{2}, -1)}(1-2t), \quad (13)$$

откуда $\chi'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi_{m+1} P_m^{(\frac{1}{2}, 0)}(1-2t)$.

Данное представление обусловлено наличием следующего соотношения [7]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \sqrt{\rho} \int_0^1 \ln \frac{1}{|\rho-t|} P_m^{(\frac{1}{2}, 0)}(1-2t) \sqrt{t} dt = \\ & = \frac{2\Gamma(m)}{3 \left(\frac{5}{2}\right)_m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(m\right)_j \left(-m-\frac{3}{2}\right)_j}{\left(-\frac{1}{2}\right)_j \cdot j!} \rho^{j-3/2}, \quad m > 0, \end{aligned}$$

при $m=0$ в правой части равенства будет стоять

$$\frac{8}{3\sqrt{\rho}} + \frac{2}{9\rho\sqrt{\rho}} - \frac{1}{3\rho\sqrt{\rho}} \ln|1-\rho| - \frac{4}{3} \ln \left| \frac{1+\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}} \right|.$$

После подстановки представлений (12) в уравнение (11) умножим полученное соотношение на $\rho P_s^{(1/2, 0)}(1-2\rho)$ и проинтегрируем по ρ от 0 до 1. В результате приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов χ_m разложений (12)

$$\sum_{m=0}^{\infty} [A_{sm}\chi_{m+1} + B_{sm}\chi_m] = F_s + F_s^\gamma, \quad s = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Выражения для коэффициентов системы и правых частей приведены в приложении В. Интегралы, входящие в них, вычислялись по квадратурным формулам Гаусса повышенной точности.

Для случая, когда приложенная внешняя нагрузка является равномерно-распределенной $P(\rho) = P^*$, а вес цилиндра не учитывается, численное решение системы (13) дает $\chi_0 \neq 0$, а $\chi_m = 0$ при $m \geq 1$. Таким образом, в этом случае $w|_{\zeta=1} = \chi(\rho) = 2\chi_0$ постоянно, а $\chi'(\rho) = 0$. Этот результат наводит на мысль о существовании элементарного решения для данного частного случая задачи. Действительно, несложно проверить, что функции

$$u(\rho, \zeta) = \frac{\mu a P^*}{2G(1+\mu)} \rho, \quad w(\rho, \zeta) = -\frac{h P^*}{2G(1+\mu)} \zeta$$

удовлетворяют однородным уравнениям Ламе (1) и крайевым условиям (2) – (4). Кроме того, найденные из элементарного решения значения $\chi(\rho) = -\frac{h P^*}{2G(1+\mu)}$ и $\chi'(\rho) = 0$ удовлетворяют полученному уравнению (11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Построено решение осесимметричной задачи теории упругости для цилиндра конечной длины со свободной боковой поверхностью и учетом собственного веса. Найден элементарное решение при частном случае загрузки цилиндра. Рассмотренный метод и само решение могут быть использованы при решении задач несвязной термоупругости.

Приложение А

Здесь N число, обеспечивающее возможность замены функций Бесселя $J_m(\beta_k \rho)$ ($m = 0, 1$) их асимптотическим представлением.

$$\begin{aligned} R(\rho, t) = & \frac{16\alpha}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{*2} D_n(\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} - \\ & - \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho t}} \left[\frac{1}{2\rho} \ln \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} |\rho - t|}{|\rho - t|} + \frac{\frac{\pi}{2} (\rho - t) \cos \frac{\pi}{2} (\rho - t) - \sin \frac{\pi}{2} (\rho - t)}{(\rho - t) \sin \frac{\pi}{2} (\rho - t)} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha(\kappa-3)^2}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \ln 2 \sin \frac{\pi}{2} (\rho + t) \right] + \\ & + \frac{3\rho + t - 1}{8\rho\sqrt{\rho t}} + \frac{\alpha(\kappa-3)^2}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \frac{1 - \rho + t}{4\sqrt{\rho t}} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\rho\sqrt{t}} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left[\left(\sqrt{\rho} - \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \cos \beta_k \rho + \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \sin \beta_k \rho \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha(\kappa-3)^2}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \left[\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k J_0^2(\beta_k)} + \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho t}} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) (\cos \beta_k \rho + \right. \right. \\ & \left. \left. \sin \beta_k \rho) \right] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \frac{e^{-2\beta_k^*}}{1 - e^{-2\beta_k^*}} \cdot \left[1 + \frac{4(3\kappa-1)\beta_k}{\alpha(\kappa-1)(\kappa+5)(1 - e^{-2\beta_k^*})} \right], \end{aligned}$$

$$F_\gamma(\rho) = \frac{\kappa + 1}{\kappa + 5} \frac{\gamma h}{2G} - \frac{(\lambda - 3)\gamma\alpha a^2}{(\kappa - 1)(\kappa + 5)G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^{*2}} D_n(\rho),$$

$$D_n(\rho) = 2\Delta^{-1}(\lambda_n^*) [(\kappa - 3)\lambda_n^* I_0(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) + (\kappa + 1)\lambda_n^* I_0(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - 4(\kappa - 1) I_1(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) - 2(\kappa - 1)\lambda_n^* \rho I_1(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho)].$$

Приложение В

$$\begin{aligned} A_{sm} &= \frac{\delta_{m0}}{6\pi} \int_0^1 [8\sqrt{\rho} + \frac{2}{3\sqrt{\rho}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ln|1 - \rho| - \\ &\quad - 4\rho \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\rho}}{1 - \sqrt{\rho}} \right|] P_s^{(1/2,0)}(1 - 2\rho) d\rho + \\ &\quad + \frac{1}{6} \delta_{s0} \delta_{m0} - \left(\frac{\delta_{m0}}{30} + \frac{\delta_{m1}}{70} \right) \frac{\left(\frac{3}{2} \right)_s}{s!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l \left(s + \frac{3}{2} \right)_l}{\left(\frac{3}{2} \right)_l l! \left(l + \frac{1}{2} \right)} + \\ &\quad + \frac{\alpha(\kappa - 3)^2}{3(\kappa - 1)(\kappa + 5)} \left[\frac{1}{3} \delta_{s0} \delta_{m0} + \frac{2}{35} \delta_{s1} \delta_{m0} - \frac{2}{35} \delta_{s0} \delta_{s1} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3\pi} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)_s \Gamma(m)}{\left(\frac{5}{2} \right)_m s!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l \left(s + \frac{3}{2} \right)_l}{\left(\frac{3}{2} \right)_l l!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m)_j \left(-m - \frac{3}{2} \right)_j}{\left(-\frac{1}{2} \right)_j \cdot j!} \frac{2j + 1}{2j + 2l + 1} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \ln \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)}{|\rho - t|} + \sqrt{\rho} \frac{\frac{\pi}{2}(\rho - t) \cos \frac{\pi}{2}(\rho - t) - \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)}{(\rho - t) \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\kappa - 3)^2}{(\kappa - 1)(\kappa + 5)} \sqrt{\rho} \ln 2 \sin \frac{\pi}{2}(\rho + t) \right] P_s^{(1/2,0)}(1 - 2\rho) P_m^{(1/2,0)}(1 - 2t) \sqrt{t} dt d\rho + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^N \left[\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \rho \sqrt{t} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) \left[\left(\sqrt{\rho} - \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \cos \beta_k \rho + \right] \right] \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \sin \beta_k \rho \left] - \frac{\alpha(\kappa - 3)^2}{(\kappa - 1)(\kappa + 5)} \left[\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k J_0^2(\beta_k)} \rho \sqrt{t} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left[\left[\frac{\sqrt{\rho}}{2\beta_k} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) (\cos \beta_k \rho + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin \beta_k \rho) \right] \right] P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) P_m^{(1/2,0)} (1-2t) \sqrt{t} dt d\rho + \right. \\
& \left. + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \frac{e^{-2\beta_k^*}}{1-e^{-2\beta_k^*}} \left[1 + \frac{4(3\kappa-1)\beta_k}{\alpha(\kappa-1)(\kappa+5)(1-e^{-2\beta_k^*})} \right] \right\} \cdot \right. \\
& \cdot P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) P_m^{(1/2,0)} (1-2t) dt d\rho + \frac{16\alpha}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{*2} D_n(\rho) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) P_m^{(1/2,0)} (1-2t) \rho dt d\rho; \\
B_{sm} = & - \frac{2\alpha(\kappa+1)(\kappa-7)}{(\kappa+5)(2m-1)} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2}\right)_m}{s! \cdot m!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l (s+3/2)_l}{\left(\frac{3}{2}\right)_l l! (l+2)} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j (m-1/2)_j}{\left(\frac{1}{2}\right)_j \cdot j! \cdot (j+2)}; \\
F_s = & \frac{a(\kappa+1)}{G(\kappa+5)} \int_0^1 P(\rho) P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) \rho d\rho; \\
F_s^\gamma = & \frac{\gamma a h (\kappa+1)}{2G(\kappa+5)} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_s}{s!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l (s+3/2)_l}{\left(\frac{3}{2}\right)_l \cdot l! \cdot (l+2)} - \\
& - \frac{\gamma \alpha a^2 (\kappa-3)}{G(\kappa-1)(\kappa+5)} \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\lambda_n^{*2}} D_n(\rho) \right] P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) \rho d\rho.
\end{aligned}$$

1. **Абрамян Б. Л.** Осесимметричная задача теории упругости / Б. Л. Абрамян, А. Я. Александров // Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Вып.3. – М.: Наука, 1966. – С. 7–37.
2. **Бухаринов Г. Н.** К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра / Г. Н. Бухаринов // Вестник Ленингр. ун-та. – 1952. – № 2. – С. 3–33.
3. **Валов Г. М.** Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины / Г. М. Валов // Прикл. мат. и механ. – 1962. – Т. 26. – С. 650–667.
4. **Вігак В. М.** Точний розв'язок осесимметричної задачі теорії пружності в напружених для суцільного циліндру певної довжини / В. М. Вігак, Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми механ. і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
5. **Колтунов М. А.** Упругость и прочность цилиндрических тел / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – М. : Высшая школа, 1975. – 516 с.

6. **Попов Г. Я.** О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механики / Попов Г.Я. // Прикл. мех. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 46–73.
7. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.
8. **Токовий Ю. В.** Осесиметричні напруження в скінченному пружньому циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні / Ю. В. Токовий // Прикл. пробл. механ. і матем. – 2010. – Вип. 8. – С. 144–151.
9. **Chan K. T.** Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part II. Analytic solution / K. T. Chan, X. X. Wei // International journal of solids and structures. – 2000. – Vol. 37, № 40. – P. 5707–5732.
10. **Chan K. T.** Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part II. Application to double – punch test / K. T. Chan, X. X. Wei // International journal of solids and structures. – 2000. – Vol. 37, № 40. – P. 5733–5744.
11. **Chan K. T.** A new analytic solution for the diametral point load strength test on finite solid circular cylinders / K. T. Chan, X. X. Wei // International journal of solids and structures. – 2001. – Vol. 38, № 4. – P. 1459–1481.