

Mathematical Subject Classification: 74R10  
УДК 539.3.01

**О. Ф. Кривий**

Одеська національна морська академія

**ВЗАЄМОДІЯ МІЖФАЗНИХ ТУНЕЛЬНИХ ТРІЩИНИ  
ТА ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО–ОДНОРІДНОМУ  
АНІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРИ**

**Кривий О. Ф. Взаємодія міжфазних тріщини та включення в кусково-однорідному анізотропному просторі.** Досліджено взаємодію міжфазних тріщини та включення, яке повністю зчеплене із кусково-однорідним анізотропним простором. Розглянуто випадок узагальненої плоскої деформації, коли задача не розпадається на плоску і антиплоску складову. Проблема визначення контактних напружень на включенні і зміщень берегів тріщини зведена до системи шести сингулярних інтегральних рівнянь. Встановлені асимптотики поведінки напружень у вершинах тріщини та включення, що дозволило застосувати до розв'язання вказаних систем метод ортогональних многочленів і обґрунтувати його збіжність. В результаті отримані залежності узагальнених коефіцієнтів напружень у вершинах тріщини і включення від відносної відстані між ними.

**Ключові слова:** анізотропний простір, кусково-однорідний, тріщина, включення, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнт інтенсивностей.

**Кривой А. Ф. Взаимодействие межфазных трещины и включения в кусочно-однородном анизотропном пространстве.** Исследовано взаимодействие межфазных трещины и включения, полностью сцепленного с кусочно-однородным анизотропным пространством. Рассмотрен случай обобщенной плоской деформации, когда задача не распадается на плоскую и антиплоскую составляющую. Проблема определения контактных напряжений на включении сведена к системе шести сингулярных интегральных уравнений. Установлены асимптотики напряжений в вершинах трещины и включения, что позволило применить для решения указанной системы метод ортогональных многочленов и обосновать его сходимость. В результате получены зависимости обобщенных коэффициентов интенсивностей напряжений и включений от относительного расстояния между ними.

**Ключевые слова:** анизотропное пространство, кусочно-однородное, трещина, включение, сингулярные интегральные уравнения, коэффициент интенсивностей.

**Kryvyy O. F. Interaction of interfacial cracks and inclusion in a piecewise-homogeneous anisotropic space.** The interaction of interfacial cracks and inclusions, fully adhesion with piecewise homogeneous anisotropic space. Consider the case of generalized plane strain, when the task does not split on a plane and antiplane component. The problem of determining of contact stresses on the inclusion is reduced to a system of six singular integral equations. The asymptotic behavior of stresses at the crack tip and inclusion, which allowed apply for a solving this system the orthogonal polynomials method and substantiate its convergence. As a result, the dependences of the generalized stress intensity factor at the crack and the inclusion of the relative distance between them.

**Key words:** anisotropic space, piecewise-homogeneous space, cracks, inclusions, singular integral equations, stress intensity factor.

**Вступ.** Задачі про дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядалися багатьма авторами. При цьому дослідження, в основному, обмежувалися плоскими випадками [1-3]. В роботах [4-6] за допомогою побудованих сингулярних інтегральних співвідношень отримані розв'язки задач відповідно про міжфазні тунельні тріщини або міжфазні тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі, який знаходиться в двовимірному стані (узагальнена плоска деформація [7]). В цій роботі вказані результати узагальнені на випадок двох різних міжфазних тунельних дефектів: тріщини і абсолютно жорсткого включення, зчепленого із півпросторами.

**ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.**

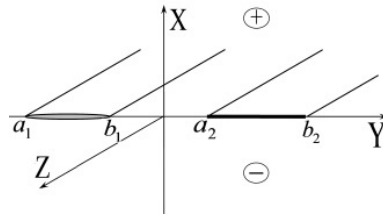


Рис. 1

**1. Постановка і зведення задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР)**

Нехай простір, який складається із двох різних анізотропних півпросторів, не повністю зчеплених в площині  $x = 0$ , знаходиться в двовимірному напружено-деформованому стані (без наявності площин пружної симетрії [7]). В площині  $x = 0$  містяться наскрізні тунельні тріщина і жорстке включення, які займають відповідно смуги (рис. 1)

$$\Pi_j = \{(y, z) \mid y \in \ell_j = (a_j, b_j), z \in (-\infty, \infty)\}, a_1 < b_1 < a_2 < b_2.$$

Нехай включення зчеплене з півпросторами. На нескінченності прикладене навантаження, яке викликає навантаження на тріщині  $\{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\}|_{x=\pm 0} = \{\sigma_k^\pm(y)\}^3$ ,  $y \in \ell_1$ , і на включенні із рівнодійною  $P = (P_1, P_2, 0)$ , а також забезпечує двовимірний стан. Положення граней включення після деформації при  $x = \pm 0$  описується функціями  $\xi^\pm(y) = \varepsilon + y\delta + \xi_*^\pm$ ,  $y \in \ell_2$ , де функції  $\xi_*^\pm(y)$  задають форму включення відповідно при  $x = \pm 0$ ,  $\varepsilon, \delta$  – відповідно поступальні і кругові переміщення включення

Нехай  $\{\chi_k^\pm(y)\}^6 = \{\langle \sigma_x \rangle^\pm, \langle \tau_{xz} \rangle^\pm, \langle \tau_{xy} \rangle^\pm, \langle u' \rangle^\pm, \langle v' \rangle^\pm, \langle w' \rangle^\pm\}$  стрибки і суми напружень і похідних переміщень в площині  $x = 0$ , тоді, враховуючи умови неперервності напружень і переміщень поза дефектами:  $\chi_k^-(y) = 0, y \notin \ell_1 \cup \ell_2, k = \overline{1, 6}$ , і скориставшись сингулярними інтегральними співвідношеннями [5], відносно невідомих стрибків переміщень  $\eta_1 = \{\eta_{1k}\}^3 = \{\chi_k^-\}_{k=4}^6$ , на тріщині і невідомих стрибків напружень на включенні  $\eta_2 = \{\eta_{2k}\}^3 = \{\chi_k^-\}^3, y \in \ell_2$  отримаємо таку систему СІР

$$C_*^{(j)} \eta_j(y) + S_*^{(j)} \Gamma_{\ell_j}[\eta_j] + S_0^{(j)} \Gamma_{\ell_{3-j}}[\eta_{3-j}] = q^{(j)}(y), y \in \ell_j, j = 1, 2, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned}
C_*^{(1)} &= \{c_{kj}\}_{j=4,5,6}^{k=1,2,3}, \quad S_*^{(1)} = \{s_{kj}\}_{j=4,5,6}^{k=1,2,3}, \quad S_0^{(1)} = \{s_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=1,2,3}, \quad C_*^{(2)} = \{c_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=4,5,6}, \\
S_*^{(2)} &= \{s_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=4,5,6}, \quad S_0^{(2)} = \{s_{kj}\}_{j=4,5,6}^{k=4,5,6}, \quad C_0 = \{c_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=1,2,3}, \quad S_0 = \{s_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=1,2,3}, \\
q^{(1)} &= \{q_{1k}\}^3 = \chi_*^+ - C_0 \chi_*^- - S_0 \Gamma_{\ell_1}[\chi_*^-], \quad \chi_*^\pm = \{\chi_k^\pm(y)\}^3, \quad \Gamma_\ell[f] \equiv \frac{1}{\pi} \int_\ell \frac{f(t)}{t-y} dt, \\
q^{(2)} &= \{q_{2k}\}^3, \quad q_{2k} = \delta_{1,k} \chi_4^+(y) - c_{3+k,4} \chi_4^-(y) - s_{3+k,4} \Gamma_{\ell_2}[\chi_4^-], \\
\chi_4^\pm(y) &= (\xi_*^\pm \pm \xi_*^+)' + (\delta \pm \delta), \quad y \in \ell_2.
\end{aligned}$$

Елементи матриць  $\{c_{kj}\}^6$ ,  $\{s_{kj}\}^6$  подані через пружні сталі півпросторів [5]. Систему (1) слід доповнити умовами замкнутості тріщини, а також умовами рівноваги і моментної рівноваги включення

$$\int_{\ell_1} \eta_1(y) dy = 0, \quad \int_{\ell_2} \eta_2(y) dy = P, \quad \int_{\ell_2} y \eta_{21}(y) dy = M. \quad (2)$$

## 2. Розв'язання системи СІР

Перше матричне рівняння системи (1) приведемо до діагонального вигляду відносно вектора  $\eta_1$ , а друге — відносно вектора  $\eta_2$  і відобразимо за допомогою лінійного перетворення:  $y = \frac{1}{2}(b_j - a_j)\rho + \frac{1}{2}(b_j + a_j)$ ,  $y \in \ell_j$ , на проміжок  $I = [-1; 1]$ . Нові невідомі функції введемо так:

$$t_j(\rho) = \{t_{jk}(\rho)\}^3 = S_j^{-1} \eta_j(0, 5((b_j - a_j)\rho + (b_j + a_j))), \quad \rho \in I,$$

де матриці  $S_j = \{s_{km}^{(j)}\}^3$  — перетворювальні матриці, які визначимо із рівнянь  $(S_*^{(j)})^{-1} C_*^{(j)} = S_j J_j S_j^{-1}$ ,  $J_j = \text{diag}\{\lambda_{jk}\}^3$  — жорданова матриця. Власні числа  $\lambda_{jk}$ , ( $k = \overline{1, 3}$ ) при  $j = 1$  співпадають із власними числами задачі про тріщини [4], при  $j = 2$  задачі о жорстких включеннях [5]. Після таких перетворень систему (1) подамо так:

$$J_j t_j(\rho) + \Gamma_I[t_j] + B^{(j)} R_j [t_{3-j}] = F^{(j)}(\rho), \quad \rho \in I, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}
R_j [t_j] &= \frac{1}{\pi} \int_I \frac{t_j(\tau) d\tau}{\tau - \kappa_{1j} \rho + \kappa_{2j}}, \quad \kappa_{1j} = (b_1 - a_1)^{(-1)^{j+1}} (b_2 - a_2)^{(-1)^j}, \\
\kappa_{2j} &= \frac{b_2 + a_2 - b_1 - a_1}{(-1)^j (b_j - a_j)}, \quad B^{(j)} = \{b_{km}^{(j)}\}^3 = S_{(3-j)}^{-1} (C_*^{(j)})^{-1} S_0^{(j)} S_{(3-j)}, \\
F^{(j)}(\rho) &= \{f_k^{(j)}(\rho)\}^3 = S_{(3-j)}^{-1} (C_*^{(j)})^{-1} q^{(j)} \left( \frac{1}{2} ((b_j - a_j)\rho + (b_j + a_j)) \right).
\end{aligned}$$

Поведінка розв'язків системи (3) визначається сингулярними частинами рівнянь, що дає можливість розв'язки систем подати по многочленах Якобі ( $j = 1, 2, k = \overline{1, 3}$ ):

$$t_{jk}(\rho) = \frac{1}{\omega_{jk}(\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} h_{jk}^{(n)} P_n^{-\bar{\mu}_{jk}, -\mu_{jk}}(\rho), \quad \omega_{jk} = (1 - \rho)^{\bar{\mu}_{jk}} (1 + \rho)^{\mu_{jk}}. \quad (4)$$

Показники особливостей визначаються формулами

$$\mu_{j1} = \frac{1}{2}, \quad \mu_{jk} = \frac{1}{2} + (-1)^k i \alpha_{j1}, \quad \alpha_{j1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \alpha_{j0}}{1 - \alpha_{j0}}, \quad \alpha_{j0} = \operatorname{Im} \lambda_{j2}, \quad 0 < \alpha_{j0} < 1.$$

Ортогональність многочленів Якобі і умови (2) дають вирази

$$h_{jk}^{(0)} = 0, \quad j = 1, k = \overline{1, 3}, \quad h_{jk}^{(0)} = 2P_k(b_2 - a_2)^{-1}(1 + \lambda_{jk}^2)^{-0,5}, \quad j = 2, k = \overline{1, 3}.$$

Для визначення інших коефіцієнтів, підставивши розвинення (4) в систему (3), скориставшись спектральним співвідношенням [8] і властивістю ортогональності многочленів Якобі, отримаємо нескінчену систему алгебраїчних рівнянь:

$$\aleph_{km}^{(j)} h_{jk}^{(m+1)} + \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} b_{kp}^{(j)} h_{jp}^{(n)} \Upsilon_{mn}^{k,j} = g_{km}^{(j)}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2, \quad m = \overline{0, \infty}, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \aleph_{km}^{(j)} &= \Gamma(m+2 - \mu_{jk}) \Gamma(m+2 - \bar{\mu}_{jk}) ((m+1)!)^{-2}, \\ g_{km}^{(j)} &= \int_I \omega_{jk}^{-1}(\tau) P_m^{1-\bar{\mu}_{jk}, 1-\mu_{jk}}(\tau) (f_k^{(j)}(\tau) - \sum_{k=1}^3 h_{jk}^{(0)} (1 - \kappa_{12}\tau + \kappa_{22})^{-1}) d\tau, \\ \Xi_n^{jk} &= (\kappa_{1j}\tau - \kappa_{2j} - 1)^{-\bar{\mu}_{jk}} (\kappa_{1j}\tau - \kappa_{2j} + 1)^{-\mu_{jk}} P_n^{-\bar{\mu}_{jk}, -\mu_{jk}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} P_{n-1}^{1-\bar{\mu}_{jk}, 1-\mu_{jk}}, \\ \Upsilon_{mn}^{kj} &= \int_I \omega_{jk}^{-1}(\tau) P_m^{1-\bar{\mu}_{jk}, 1-\mu_{jk}}(\tau) \Xi_n^{jk}(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Регулярні ядра системи (3) обмежені разом зі своїми частинними похідними до будь-якого при  $|\rho| \leq 1$ ,  $|\tau| \leq 1$ , це дає можливість до системи (5) застосувати метод редукції [8] і отримати коефіцієнти розвинення (4), а також подання для векторів  $\eta_j$ . Останнє дало можливість отримати вирази для узагальнених КІН [4,5] у вершинах тріщини і включення, а також, використавши умови моментної рівноваги, кут повороту включення  $\delta$ .

### 3. Аналіз чисельних результатів

На рисунках 2 і 3 наведені залежності узагальнених КІН нормального відриву відповідно у вершинах тріщини  $K_I^t$  і у вершинах включення  $K_I^v$  від відносної віддалі між тріщиною і включенням  $d_0 = (a_2 - b_1)(b_1 - a_1)^{-1}$ , при нормальному симетричному навантаженні на берега тріщини:  $\sigma_1^{\pm}(y) = -1$ ,  $\sigma_{2,3}^{\pm}(y) = 0$ , і відсутності навантаження на включенні:  $P = 0$ ,  $M = 0$ . Неперервні лінії на рисунках отримані для внутрішніх вершин ( $b_1$  і  $a_2$ ), штриховані лінії — для зовнішніх вершин ( $a_1$  і  $b_2$ ). Для розрахунків використані матеріали [7]: склопластик однонаправлений (нижній півпростір) і склопластик ортогонально-армований (верхній простір).

Наведені графіки показують, що при зближенні тріщини і включення узагальнені КІН для тріщини спадають, при цьому більше спадає КІН для ближньої до включення вершини. Для узагальнених КІН у вершинах включення виявлена протилежна закономірність: узагальнені КІН зростають, при цьому для ближньої вершини КІН зростає швидше.

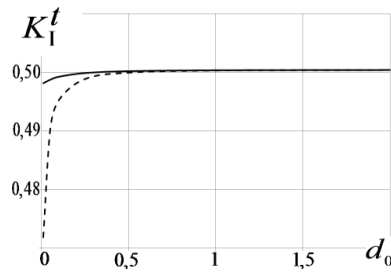


Рис. 2

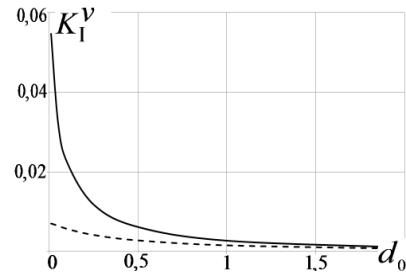


Рис. 3

Також встановлено, що якщо навантажено тільки включення, то описані закономірності змінюються на протилежні: у вершинах тріщини узагальнені КІН зростають, у вершинах включення спадають. В обох випадках взаємний вплив тріщини і включення буде суттєвим при виконанні умови:  $d_0 \leq 0,25$ .

**ВИСНОВКИ.** Отже, запропоновано метод розв'язання задач про тунельні міжфазні дефекти довільної природи в кусково-однорідному анізотропному просторі, що дало можливість отримати розв'язки нових задач про міжфазні дефекти. Зокрема, досліджено вплив на концентрацію напружень в околі міжфазної тріщини та включення відносної віддалі між ними. Аналогічно можуть бути розв'язані задачі про взаємодію інших типів міжфазних тунельних дефектів.

1. **Кривой А. Ф.** Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов, М. В. Радиолло // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т.50, № 4. – С. 622–632.
2. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, М. В. Радиолло // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
3. **Herrmann К. Р.** On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial / К. Р. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – V. 69. – P. 317–335.
4. **Krivoi А. F.** Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space / А. F. Krivoi, G. Ya. Popov // J. Appl. Math. Mech. – 2008. – V. 72, No. 4. – P. 499–507.
5. **Кривий О. Ф.** Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі / О. Ф. Кривий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – V. 50, № 2. – С. 55–66.
6. **Krivoi А. F.** Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space / А. F. Krivoi, G. Ya. Popov // Int. Appl. Mech. – 2008. – V. 44, №. 6. – P. 626–634.
7. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
8. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.