

Mathematical Subject Classification: 74C05  
УДК 539.3

**А. Г. Николаев, Е. А. Танчик**

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЯЧЕЙКЕ  
ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА,  
ОБРАЗОВАННОГО ЧЕТЫРЬМА ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ  
ВОЛОКНАМИ**

Работа докладывалась на Международной научной конференции “Современные проблемы механики деформированного твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений” памяти Г. Я. Попова, 2013, Одесса, Украина

**Ніколаєв О. Г., Танчик Є. А. Розподіл напружень у ланці односпрямованого композиційного матеріалу, утвореного чотирма циліндричними волокнами.** Запропоновано локальну модель напружено-деформованого стану односпрямованого волокнистого композиту, що ґрунтується на узагальненому методі Фур'є. Розглядається циліндричний зразок матеріалу з чотирма паралельними волокнами. Передбачається, що волокна знаходяться в умовах ідеального контакту з матрицею.

**Ключові слова:** локальна модель, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, односпрямований волокнистий композит.

**Николаев А. Г., Танчик Е. А. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами.** Предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния однонаправленного волокнистого композита, основанная на обобщенном методе Фурье. Рассматривается цилиндрический образец материала с четырьмя параллельными волокнами. Предполагается, что волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей.

**Ключевые слова:** локальная модель, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, однонаправленный волокнистый композит.

**Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stress distribution in the cell of unidirectional composite material, formed by four cylindrical fibers.** Proposed a local model of the stress-strain state of a unidirectional fiber composite, based on the generalized Fourier method. We consider a cylindrical sample of material with four parallel fibers. It is assumed that the fibers are under perfect contact with the matrix.

**Key words:** local model, boundary conditions, stress-strain state, generalized Fourier's method, method of reduction, unidirectional fiber composite.

**ВВЕДЕНИЕ.** В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В монографии [1] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение

внутренних полей. Напряженно-деформированное состояние композита моделируется распределением напряжений в окрестности нескольких включений (плоская задача) или одного включения в случае зернистого композита.

В статье [2] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В статье [3] представлены исследования по моделированию структуры пористых материалов с малой объемной долей содержания твердой фазы. В качестве моделей рассматриваются главным образом стержневые и оболочечные конструкции. Предложена классификация моделей по степени упорядоченности структурных единиц. Представляется, что наиболее адекватной с точки зрения морфологии и деформационных свойств является модель, состоящая из хаотически ориентированных 14-гранных ячеек. Для анализа представленной модели предлагается метод выделения структурного элемента.

В работе [4] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В. З. Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В работе [5] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работах [6, 7] предложен метод определения напряженного состояния конечного цилиндра, основанный на принципе суперпозиции и разложении тензора напряжений в ряды Фурье и Бесселя – Дини. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В работе [8] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндриче-

ским включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В статье [9] для прогнозирования прочностных свойств композитов рассматривается постановка нелинейных связанных краевых задач микромеханики композитов, учитывающих стадию структурного накопления микроповреждений, когда поля структурных микроповреждений являются локально эргодическими. В целях описания структурного разрушения и прогнозирования прочностных свойств композитов существенно расширяется база определяющих соотношений: вводится новый материальный носитель — тензор повреждаемости четвертого ранга. Построены новые функционалы связанной стохастической краевой задачи, позволяющие наряду с прогнозированием упругих свойств строить расчетные поверхности прочности реальных композитов.

В работах [10, 11] введены локальные осесимметричные модели напряженного состояния пористого и зернистого композиционного материалов с порами или зёрнами в форме вытянутых сфероидов. В работе [12] разработана локальная неосесимметричная математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала. В этих моделях напряжения в композитах описываются при помощи обобщенного метода Фурье. Аппарат обобщенного метода Фурье разработан в [13], а его приложения приведены в [14].

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается цилиндрический образец  $\Omega_0$  однонаправленного волокнистого композиционного материала, волокна в котором моделируются четырьмя цилиндрическими включениями  $\Omega_j$  ( $j = 1 \div 4$ ). Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические системы координат  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$ , начала которых отнесены к центрам включений  $O_j$  ( $j = 0 \div 4$ ), расположенным в одной плоскости  $z = 0$ . Радиусы цилиндров  $\Omega_j$  равны  $R_j$ , границы цилиндров  $\Gamma_j$  описываются уравнениями  $\rho_j = R_j$ . Предполагается, что упругие постоянные матрицы и включений соответственно равны  $(G_0, \sigma_0)$  и  $(G_j, \sigma_j)$ .

Вектор упругих перемещений удовлетворяет следующей краевой задаче для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями на внешней границе

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_0} = T\mathbf{e}_\rho = \begin{cases} T, & |z| \leq h \\ 0, & |z| > h \end{cases} \quad (2)$$

и условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (3)$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}_j$  — векторы перемещений в матрице и в  $j$ -ом включении,  $\mathbf{F}\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}\mathbf{U}_j$  — соответствующие им векторы напряжений на поверхностях  $\Gamma_j$ ,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона. Условия (3), (4) отражают идеальный контакт между матрицей и волокном.

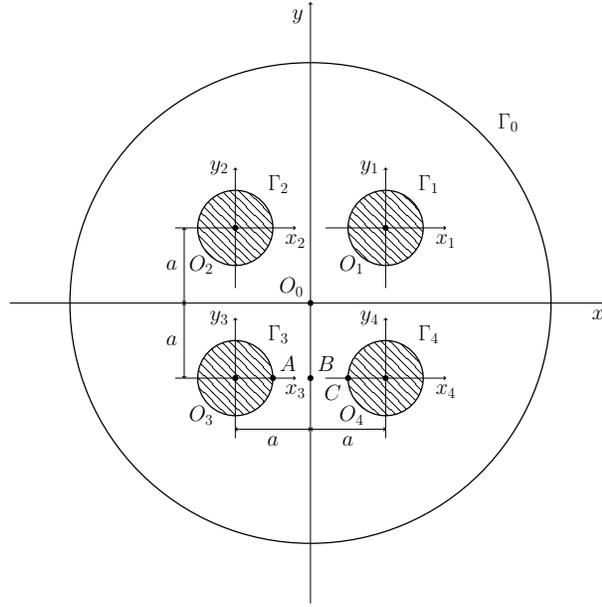


Рис. 1. Схематическое представление задачи

**2. Решение задачи.** Общее решение краевой задачи (1) — (4) в областях  $\Omega_0$  и  $\Omega_j$  ищется в виде суперпозиции базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам включений

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \quad \text{в } \Omega_0; \quad (5)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda \quad \text{в } \Omega_j. \quad (6)$$

Указанные выше базисные решения представим в виде [13]:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z); \quad s = 1, 3; \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{B}_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_2 = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi \left[ \mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z] \right];$$

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \tilde{K}_m(\lambda\rho),$$

$$u_{\lambda,m}^{- (3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} I_m(\lambda\rho),$$

где  $\mathbf{D}_1 = \nabla$ ,  $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$  (здесь  $i$  — мнимая единица);  $I_m(x)$  — модифицированная функция Бесселя,  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m K_m(|x|)$ ,  $K_m(x)$  — функция Макдональда;  $\chi = 3 - 4\sigma$ ,  $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}$  — полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

В развернутой координатной форме базисные решения (7), (8) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp(D - \chi) \left[ u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 \right] + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1, \quad (11)$$

где  $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ ,  $\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi)e^{i\varphi}$ ,  $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)e^{-i\varphi}$ ,  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$ ,  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  — орты цилиндрической системы координат.

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид:

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \text{div}\mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \text{rot}\mathbf{U}) \right], \quad (13)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

Применив к формулам (9) — (11) оператор (13) на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$  получим:

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp D u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp D u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D] u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp \right. \\ \left. \mp [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D] u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + \right. \\ \left. + i[m^2 + \lambda^2 \rho^2 (2\sigma-2)D] u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{G}{\rho} \left\{ \pm (D+m-1) u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp \right. \\ \left. \mp (D-m-1) u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 - i m u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

**3. Теоремы сложения.** Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары цилиндров. Справедливы следующие теоремы сложения [13]:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2); \quad (17)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{+(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1); \quad (18)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{-(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2), \quad (19)$$

где  $f_{1,\lambda,m}^{(33)l} = (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12})$ ,  $f_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12})$ ,  $\tilde{D}_{s,t}^{(ij)} = [\delta_{st} + \delta_{t1} \delta_{s2} \rho_{ij} \frac{\partial}{\partial \rho_{ij}}]$ .

**4. Разрешающая система уравнений.** Используя теоремы сложения (17) — (19), представим вектор перемещения  $\mathbf{U}$  в системе координат с началом в точке  $O_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \times \\ & \times \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda + \\ & + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \end{aligned} \quad (20)$$

и с началом в точке  $O_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \\ & + \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(j,\alpha)} u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) \times \\ & \times \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \times \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda. \end{aligned} \quad (21)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ ,  $B_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0) \sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) \times \right. \\ \left. \times \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right\} = \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0), \quad (22) \\ \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_j, G_0, \sigma_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, G_0, \sigma_0) \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, G_0, \sigma_0) \times \\ & \times \left. \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, G_j, \sigma_j), \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_j, \sigma_0) + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, \sigma_0) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \times \right. \\ & \times (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, \sigma_0) \times \\ & \left. \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, \sigma_j), \quad (24) \end{aligned}$$

$$j = 1 \div 4; \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

где  $\mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R, G, \sigma) = \left( G_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(0)} \right)$ ;

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, G, \sigma) = \pm \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, G, \sigma) = \frac{2G}{R} i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \quad G_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, G, \sigma) = -\frac{G}{R} i m \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{G}{R} (D - m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, G, \sigma) = \pm \frac{G}{R} (D + m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, G, \sigma) = \frac{2G}{R} i \left[ m^2 + \lambda^2 R^2 + (2\sigma - 2)D \right] \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{2G}{R} \left[ (m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D \right] \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{2G}{R} \left[ (m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D \right] \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$\mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R, \sigma) = \left( H_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, H_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, H_{s,\lambda,m}^{\pm(0)} \right),$$

$$H_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = i \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \quad H_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \mp (D - \chi) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp (D - \chi) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = 0,$$

$$H_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \pm \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$\tilde{u}_{\lambda,m}^{+(3)}(R) = \tilde{K}_m(\lambda R), \quad \tilde{u}_{\lambda,m}^{-(3)}(R) = I_m(\lambda R).$$

**5. Анализ результатов.** При численной реализации задачи предполагалось, что  $R_j = R$  ( $j = 1 \div 4$ ),  $R_0 = 10R$ . Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и волокон приняты равными соответственно  $\sigma_0 = 0.38$  и  $\sigma_j = 0.21$ , что соответствует волокнам из алюмоборосиликатного стекла с эпоксидно-малеиновым связующим. Система уравнений решена методом редукции по индексу  $m$  при фиксированном  $\lambda$ , то есть бесконечная система уравнений заменяется конечной системой, в которой индексы меняются в диапазоне  $-m_{max} \leq m, l \leq m_{max}$ . Рассматривались случаи  $m_{max} = 5, 10, 20$ . Метод показал хорошую сходимость уже при  $m_{max} = 5$ , если  $R/a < 0.8$ .

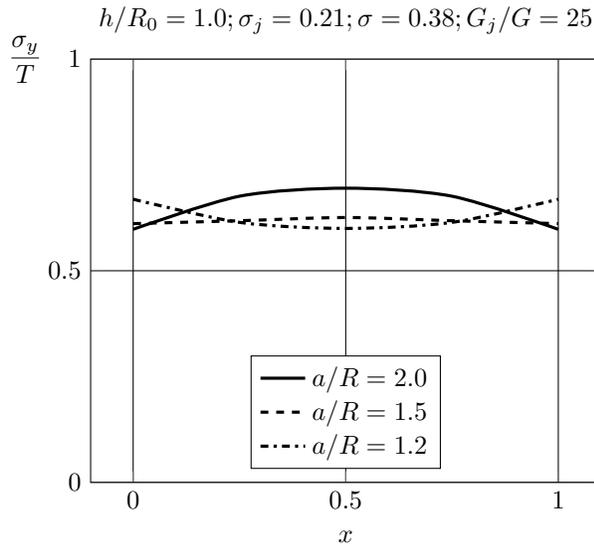


Рис. 2. Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними

На рис. 2 приведены распределения напряжений  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры волокон в зависимости от относительного расстояния между ними  $a/R$  для низко модульных волокон  $G_j/G = 25$ . При уменьшении расстояния между волокнами наблюдается изменение характера распределения напряжений: зона концентрации напряжений смещается из середины линии на ее границы.

На рис. 3 представлены графики напряжений  $\sigma_x/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от ширины области, по которой прикладывается к образцу нормальная внешняя нагрузка.

Численный анализ показал, что распределение напряжений  $\sigma_x/T$  и  $\sigma_y/T$  существенно не зависит от отношения  $G_j/G$ . Иначе обстоит дело с напряжением  $\sigma_z/T$ . На рис. 4 представлены графики напряжений  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения жесткостей материалов включений и матрицы (для низко модульных и высоко модульных волокон). Из анализа графиков видно, что наблюдается характерный рост напряжений при переходе от низко модульных волокон к высоко модульным.

На рис. 5 приведено сравнение главных компонент тензора напряжений для

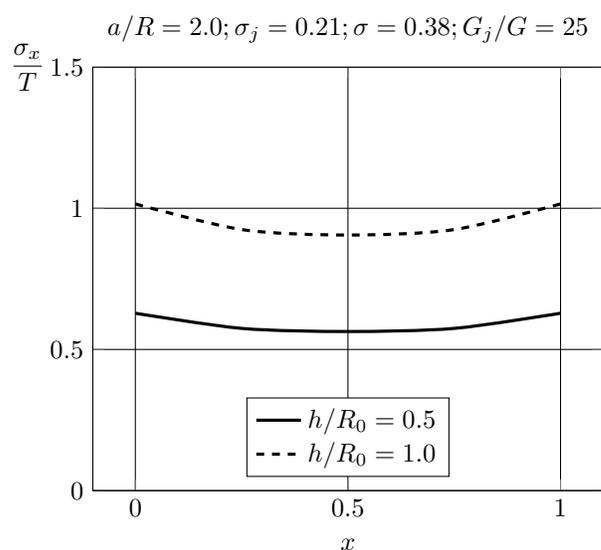


Рис. 3. Напряжения  $\sigma_x/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от величины  $h/R_0$

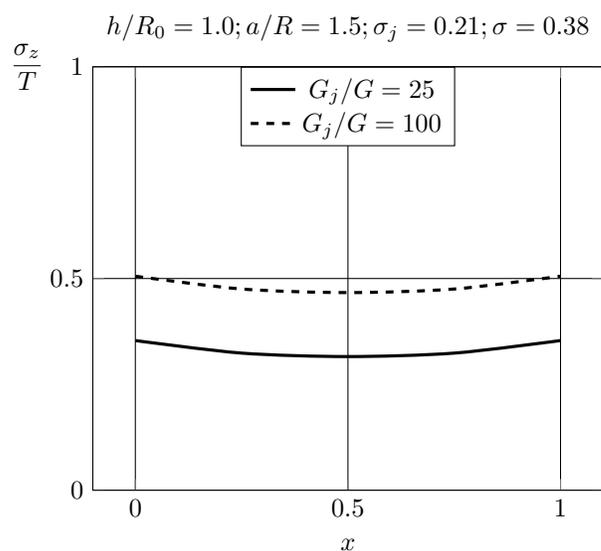


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения жесткостей материалов включений и матрицы

двух и четырех волокон в цилиндрическом образце композиционного материала. Характер распределения напряжений практически не меняется, однако для величин напряжений  $\sigma_x/T$  наблюдается некоторое различие значений в одних и

$$a/R = 1.5; h/R_0 = 1.0; \sigma_j = 0.21; \sigma = 0.38; G_j/G = 25$$

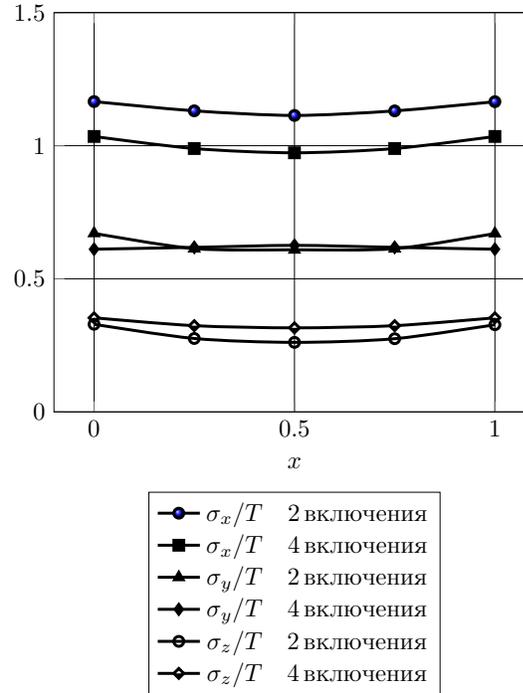


Рис. 5. Сравнение главных компонент тензора напряжений для двух и четырех волокон в цилиндрическом образце

тех же точках образца для случаев двух и четырех волокон.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния однонаправленного волокнистого композита, основанная на представлении образца материала упругим цилиндром с четырьмя упругими цилиндрическими включениями, образующими тетрагональную упаковку композиционной среды. В аналитическом виде строятся векторы перемещения и тензор напряжений отдельно в области матрицы и включений. Предполагается, что образец композита подвержен действию кусочно-постоянной нормальной нагрузки, а волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей. Граничные условия и условия сопряжения удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Параметры модели находятся из разрешающей системы, которая допускает эффективное численное решение. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации, выявлен ряд механических эффектов. Достоверность результатов подтверждается сравнением их со случаем цилиндрического образца с двумя волокнами. Анализ сходимости численного решения к точному показал высокую эффективность методики, позволяющей, удерживая лишь небольшое число уравнений и неизвестных в разрешающей системе, получать результаты с высокой точностью в широком диапазоне изменения геометрических параметров.

1. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г. А. Ванин. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
2. **Гаришин О. К.** Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2003. — Т. 9, №3. — С. 278–286.
3. **Методы** расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) [Текст] / Д. А. Черноус, Е. М. Петроковец, Д. А. Конек, С. В. Шилько // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2001. — Т. 7, №4. — С. 533–545.
4. **Гордеев А. В.** Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2010. — Т. 16, №1. — С. 106–116.
5. **Khoroshun L. P.** Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites [Text] / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 10. — P. 1284–1316.
6. **Meleshko V. V.** Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings [Text] / V. V. Meleshko, Yu. V. Tokovyy // J. Eng. Math. — 2013. — V. 78. — P. 143–166.
7. **Токовий Ю. В.** Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні [Текст] / Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2010. — Вип. 8. — С. 144–151.
8. **Zhong Z.** Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains [Text] / Z. Zhong, Q. P. Sun // Int. Journal of Solids and Structures. — 2002. — V. 39, Issue 23. — P. 5753–5765.
9. **Макарова Е. Ю.** Нелинейные многоуровневые модели механики деформирования и разрушения композитов [Текст] / Е. Ю. Макарова, Ю. В. Соколкин // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2013. — Т. 19, №3. — С. 395–405.
10. **Николаев А. Г.** Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — 2009. — Т. 2(58). — С. 48–58.
11. **Николаев А. Г.** Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — 1(98). — С. 14–18.
12. **Николаев А. Г.** Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 922. — С. 4–19.
13. **Николаев А. Г.** Теоремы сложения решений уравнения Ламе / А. Г. Николаев. — Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. — 109 с. — Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 — Ук 93.
14. **Николаев А. Г.** Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости: монография [Текст] / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. — Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского “Харьк. авиац. ин-т”, 2011. — 344 с.