

Mathematical Subject Classification: 70F15
УДК 521.1

А. Л. Рачинская

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

БЫСТРОЕ ВРАЩЕНИЕ СПУТНИКА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПО КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Работа частично поддержана проектом №953.1/010 третьего совместного конкурса Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований 2013 года

Рачинська А. Л. Швидке обертання супутника в середовищі з опором по круговій орбіті. Досліджується швидкий обертальний рух відносно центру мас динамічно несиметричного супутника під дією гравітаційного моменту і моменту сил опору. Рух відбувається по круговій орбіті. Проведено чисельний аналіз зміни вектора кінетичного моменту твердого тіла і побудований годограф цього вектора.

Ключові слова: супутник, гравітаційний момент, опір, вектор кінетичного моменту, годограф.

Рачинская А. Л. Быстрое вращение спутника в среде с сопротивлением по круговой орбите. Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления. Движение происходит по круговой орбите. Проведен численный анализ изменения вектора кинетического момента твердого тела и построен годограф этого вектора.

Ключевые слова: спутник, гравитационный момент, сопротивление, вектор кинетического момента, годограф.

Rachinskaya A. L. The rapid rotation of the satellite in an environment with drag in a circular orbit. We study the rapid rotation of the center of mass dynamically asymmetric satellite by the gravitational moment and moment of forces resistance. Motion occurs in a circular orbit. The numerical analysis of change of the angular momentum solid body and built this hodograph vector.

Key words: satellite, gravity moment, resistance, the angular momentum vector, hodograph.

ВВЕДЕНИЕ. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по круговой орбите вокруг Земли. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, электромагнитных и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1-8].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1-2]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента \mathbf{G} . Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} , ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ .

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{L_1}{G}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_i ($i = 1, 2, 3$) – моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G – величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

Центр масс спутника движется по круговой орбите с периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\nu = \frac{2\pi}{Q}t + \nu_0, \quad (2)$$

где ν_0 – начальное значение истинной аномалии.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

Проекция L_i момента внешних сил, складывающихся из гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r на оси Oy_i , записываются в виде [2, 4]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1 , на другие оси проекции имеют аналогичный вид:

$$\begin{aligned}
L_1 = L_1^g + L_1^r &\equiv \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}) - \\
&- G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1} \alpha_{1i} \alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2} \alpha_{1i} \alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3} \alpha_{1i} \alpha_{33}}{A_3} \right) \\
S_{mj} &= \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta \\
\beta_2 &= \sin(\nu - \lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta.
\end{aligned} \tag{3}$$

В работе предполагается, что момент сил сопротивления \mathbf{L}^r может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = I\omega$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [1, 4]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|I\|$ норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику — кинетическую энергию T , производная которой имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\
&\quad \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right].
\end{aligned} \tag{4}$$

Ставится задача исследовать решение системы (1)-(4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [9].

2. Процедура метода усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера-Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ — некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут $G, \delta, \lambda, T, \nu$, а быстрыми — углы Эйлера φ, ψ, θ . Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 [10]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \tag{5}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянный модуль эллиптических функций [11], описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера-Пуансо в правые части уравнений (1), (4) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2]. При этом для медленных переменных δ, λ, T, G сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2}{2G}\beta_2\beta_3N^*, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{3\omega_0^2}{2G\sin\delta}\beta_1\beta_3N^*, \\
\frac{dG}{dt} &= -\frac{G}{R(k)}\{I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + \\
&+ I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)] + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)]\}, \\
\frac{dT}{dt} &= -\frac{2T}{R(k)}\{I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \\
&+ \frac{A}{S(k)}\left\{\frac{I_{33}}{A_3}[k^2 - W(k)] + \frac{I_{22}}{A_2}(1 - k^2)W(k)\right\} + \\
&+ \frac{I_{11}(A_2 - A_3)R(k)}{A_1 S(k)}[1 - W(k)]\}, \\
W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, & A &= (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3), \\
R(k) &= A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2, & S(k) &= A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, \\
N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [11]. Дифференцируя выражение (5) для k^2 и используя два последних уравнения (6), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных

$$\begin{aligned}
\frac{dk^2}{d\xi} &= (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2]\frac{E(k)}{K(k)}, \\
\chi &= (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2)/[(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2], \\
\xi &= (t - t_*)/N, & N &= A_1A_3/(I_{33}A_1 - I_{11}A_3) \sim \varepsilon^{-2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь t_* — постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо.

Из уравнений (6) следует, что под влиянием сопротивления среды происходит эволюция как кинетической энергии тела T , так и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на их изменение оказывает влияние только сила сопротивления, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} ($i \neq j$), выпадают при усреднении. Изменения углов λ , δ зависят как от действия силы сопротивления, так и гравитационного притяжения.

Уравнение (7) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G . Третье уравнение (6) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (6) для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [11]. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2 , причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$,

поскольку $G > 0$, т.е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает [8].

3. Численный расчет изменения кинетического момента, кинетической энергии и углов ориентации вектора кинетического момента. Полученную систему уравнений (6) с учетом (2) и уравнение (7) в виде

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{I_{33}A_1 - I_{11}A_3}{A_1A_3} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \quad (8)$$

можно численно проинтегрировать. Интегрирование проводилось при начальных условиях $G(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$ $\delta = \pi/4$ рад; $\lambda = \pi/4$ рад; и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3.2$; $A_2 = 2.6$; $A_3 = 1.67$. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$; $I_{22} = 1.31$; $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 0.919$; $I_{22} = 5.228$; $I_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ в уравнении (9) была отрицательной -4.477 , а во втором положительной и равной 3.853 .

Для численного расчета было проведено обезразмеривание уравнений системы (6) и уравнение (8). Характерными параметрами задачи являются G_0 кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = \frac{G}{G_0}$, $\tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}$, $\tilde{L}_i = \frac{L_i}{G_0 \Omega_0}$, $\tilde{T} = \frac{T}{G_0 \Omega_0}$, $\varepsilon^2 \tilde{I}_{ii} = \frac{I_{ii}}{G_0}$. Система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{3}{2\tilde{G}} \beta_2 \beta_3 \tilde{N}^*, & \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{3}{2\tilde{G} \sin \delta} \beta_1 \beta_3 \tilde{N}^*, \\ \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{\tilde{G}}{\tilde{R}(k)} \left\{ \tilde{I}_{22} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \tilde{I}_{33} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) [k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{I}_{11} (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) [1 - W(k)] \right\}, \\ \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{2\tilde{T}}{\tilde{R}(k)} \left\{ \tilde{I}_{22} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \tilde{I}_{33} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) [k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{A}}{\tilde{S}(k)} \left\{ \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} [k^2 - W(k)] + \frac{\tilde{I}_{22}}{\tilde{A}_2} (1 - k^2) W(k) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{I}_{11} (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \tilde{R}(k)}{\tilde{A}_1 \tilde{S}(k)} [1 - W(k)] \right\}, \\ \tilde{A} &= (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3), \\ W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, & \tilde{R}(k) &= \tilde{A}_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) k^2, \\ \tilde{S}(k) &= \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) k^2, \\ \tilde{N}^* &= \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1 + 3 \left(\frac{2\tilde{A}_1 \tilde{T}}{\tilde{G}^2} - 1 \right) \left[\tilde{A}_3 + (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k) k^2} \right], \\ \frac{dk^2}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{\tilde{I}_{33} \tilde{A}_1 - \tilde{I}_{11} \tilde{A}_3}{\tilde{A}_1 \tilde{A}_3} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Для численного интегрирования системы применялись неявные схемы Адамса, что позволяет интегрировать систему в представленном виде, с учетом закона изменения угла нутации. Численный анализ показывает, что функции $\tilde{G}(\tau)$ и $\tilde{T}(\tau)$ являются монотонно убывающими, как было получено ранее [8].

Применение неявной схемы численного интегрирования позволяет построить годограф вектора кинетического момента в системе координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) по найденным углам ориентации λ и δ .

Для проведения численного исследования вектор кинетического момента в начальный момент времени отклонен от оси x_3 на угол $\pi/4$ рад и повернут около оси x_3 так же на угол $\pi/4$ рад.

В первом расчетном случае (для отрицательного χ) получен годограф вектора кинетического момента, представленный на рис. 1. Из рис. 1 видно, что вектор кинетического момента, убывая, стремится занять предельное положение в плоскости орбиты спутника Ox_1x_2 . На рис. 2 и 3 годограф вектора кинетического момента изображен в большем масштабе. Рисунок 2 показывает проекцию кривой годографа на плоскость Ox_1x_2 , а на рис. 3 годограф показан вдоль оси спирали.

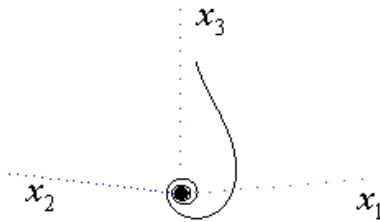


Рис. 1

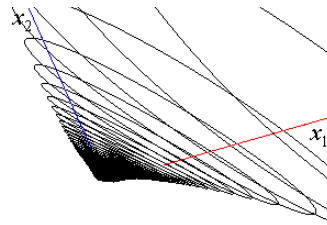


Рис. 2

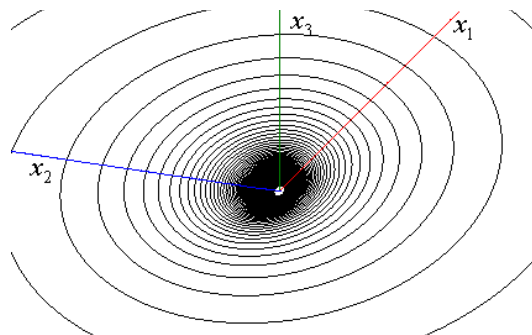


Рис. 3

Во втором расчетном случае (для положительного χ) результат построения годографа вектора кинетического момента представлен на рис. 4. Рисунки 5 и 6 отображают ту же кривую в большем масштабе в проекциях на другие плоскости.

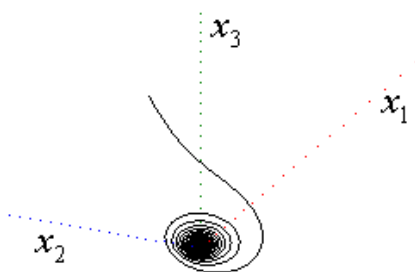


Рис. 4

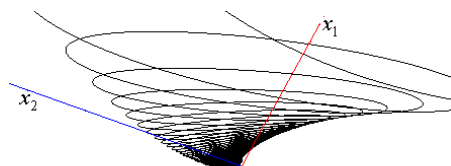


Рис. 5

Видно, что во втором расчетном случае характер поведения сохраняется, но вектор кинетического момента стремится к другому предельному положению в плоскости орбиты. Ось предельного положения располагается ближе к оси Ox_1 . В обоих расчетных случаях ось спирали не является постоянной. Согласно численному исследованию наблюдается искривление оси спирали, при этом во втором расчетном случае искривление становится более существенным.

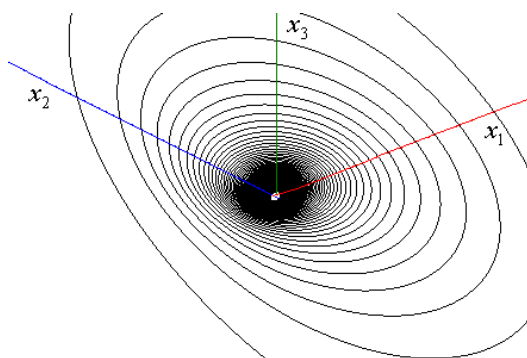


Рис. 6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Таким образом, в случае возмущенного движения спутника с учетом гравитационного момента и момента сил сопротивления построен годограф вектора кинетического момента в трехмерном пространстве $Ox_1x_2x_3$, связанный с плоскостью круговой орбиты спутника. Получено, что вектор кинетического момента, убывая вследствие диссипативного момента сопротивления среды, стремится занять предельное положение в плоскости орбиты.

Автор благодарит Л. Д. Акуленко и Д. Д. Лещенко за полезные обсуждения.

1. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М. : Наука, 1965. – 416 с.
2. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов [текст] / Ф. Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т.27, №3. – С. 472–483.

3. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. **Акуленко Л. Ф.** Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – №3. – С. 5 – 13.
5. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2006. – **36**. – С. 58 – 63.
6. **Лещенко Д. Д.** Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [текст] / Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2007. – Т.12, вип.7. – С. 85 – 98.
7. **Акуленко Л. Д.** Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов [текст] / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип.11. – С. 117 – 131.
8. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №2. – С. 13 – 26.
9. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
10. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика [текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
11. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.