ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 7–21

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 11N37
УДК 511.19

В. Є. Брейде, В. С. Куліш
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ СМАРАНДЧА

Брейде В. Є., Куліш В. С. Асимптотичні оцінки середнього значення функції Смарандча. В статті розглянено розподіл значень функцій $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2,$ які було введено Смарандчем в 1993 році. Побудовані асимптотичні формули для суматорної функції $S_k^{(1)}(n)$, які уточнюють результат Лю Юпина. Знайдено нетривіальну асимптотичну оцінку для $\tau(S_k^{(1)}(n))$. У припущенні справедливості гіпотези Римана покращено залишковий член в асимптотичній формулі для функції $S_2^{(2)}(n)$ та вивчено поведінку функції $\tau(S_2^{(2)}(n))$ в короткому інтервалі $x < n \le x+h$, де $h > x^\theta, \theta = 0,2204$.
Ключові слова: функція Смарандча, асимптотичні оцінки, суматорна функція.

Брейде В. Е., Кулиш В. С. Асимптотические оценки среднего значения функции Смарандча. В статье рассмотрено распределение значений функций $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2,$ которые были введены Смарандчем в 1993 году. Построены асимптотические формулы для сумматорной функции $S_k^{(1)}(n)$, уточняющие результат Лю Юпина. Найдена нетривиальная асимптотическая оценка для $\tau(S_k^{(1)}(n))$. В предположении справедливости гипотезы Римана улучшен остаточный член в асимптотической формуле для функции $S_2^{(2)}(n)$ и изучено поведение функции $\tau(S_2^{(2)}(n))$ в коротком интервале $x < n \le x + h$, где $h > x^\theta, \theta = 0,2204$.
Ключевые слова: функция Смарандча, асимптотические оценки, сумматорная функция.

Breide V. E., Kulish V. S. The symptotic estimates of the Smarandache mean value. In this paper we consider the distribution of value of the function $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2$, which were introduced by Smarandache in 1993. We obtained the asymptotic formulas for the summation function $S_k^{(1)}(n)$, that improve Lu Yiuping results. Here we found the nontrivial asymptotic estimate for $\tau(S_k^{(1)}(n))$. In assuming the Riemann hypothesis improved, the term in the asymptotic formula for the function $S_2^{(2)}(n)$ is reminded, and behavior of the function $\tau(S_2^{(2)}(n))$ was studied in the short interval $x < n \le x + h$, where $h > x^\theta, \theta = 0,2204$.
Key words: Smarandache function, asymptotic estimates, summation function.

Вступ. Ф. Смарандч в 1993 р. ввів у розгляд дві арифметичні функції $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2; k > 1$ — натуральні, визначені наступними рівняннями:

$$S_k^{(1)}(n) = \min(m \in \mathbb{N} : n \mid m^k),$$

$$S_k^{(2)}(n) = \max(m \in \mathbb{N} : m^k \mid n).$$

Ці функції називаються двоїстими або дуальними. Легко перевірити, що функції $S_k^{(j)}(n)$ — мультиплікативні, причому для простого p : $S_k^{(1)}(p^a) = p^{\lceil \frac{a}{k} \rceil}$, $S_k^{(2)}(p^a) = p^{\lfloor \frac{a}{k} \rfloor}$, де $\lceil x \rceil$ — найменше ціле $\geqslant x$, $\lfloor x \rfloor$ — найбільше ціле $\leqslant x$.

Смарандч [10] зазначив ряд застосувань цих функцій в теорії чисел і комбінаториці. Тому розподіл значень функції $S_k^{(j)}(n)$ в останній час активно досліджується. У цій роботі вивчаються функції $S_k^{(j)}(n)$ в середньому і коротких інтервалах. Ми використовуємо позначення:

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
$\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел;
$\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;
$\mu(n)$ — функція Мьобіуса;
$\varphi(n)$ — функція Ойлера.

Для комплексного числа позначимо через $\sigma = Res, t = Ims$, так що $s = \sigma + it$, $exp(z) = e^z$ для $z \in R$, $\ln x$ завжди позначає натуральний логарифм $x, x > 0$. Символи "O" та " $\ll$ " еквівалентні, а запис $f(x) = O(g(x))$ означає, що при $x \to x_0$ маємо $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ з деякою додатною сталою C. Сталі символи "o" та " $\ll$ " можуть залежити від ε.

Запис $\Sigma_n(\Pi_p)$ завжди буде позначати сумування за всіма натуральними n (або, відповідно, добуток по всім простим p).

Попередні результати. Din Liping [3] отримав асимптотичну формулу

$$\sum_{n \leq x} S_k^{(1)}(n) = \frac{x^2}{2}\zeta(2k-1)\Pi_p \left[1 - \frac{1}{p(p+1)}\left(1 + \frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right] + O(x^{\frac{2}{3}+\epsilon}). \qquad (1)$$

Роботу Liping ми не бачили, але в даній роботі ми покращимо залишковий член у формулі (1). S. Tabirca, T. Tabirca [13], Keng [7], а також Ibstedt [3], [4] знайшли асимптотичну щільність нерухомих точок відносно перетворення $n \to S_k^{(1)}(n)$. Легко побачити, що нерухомими точками є безквадратні числа. Так що, якщо $q(x)$ означає кількість нерухомих точок для $S_k^{(1)}(n)$, то маємо

$$\lim_{x \to \propto} \frac{q(x)}{x} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Крім того, використовуючи результати Filaseta, Trifonov [14], отримуємо, що число нерухомих точок для $S_k^{(1)}(n)$ на відрізку $[x, x+h]$ дорівнює $\frac{6}{\pi^2} + O(x^{\frac{1}{5}} \ln x)$ для всіх $h, x^{\frac{1}{5}} < h < x$. Lu Yaming [8] вивчав розподіл значень функції дільників $\tau(n)$ на послідовності $S_k^{(2)}(n)$ і побудував асимптотичну формулу

$$\sum_{n \leq x} \tau\left(S_k^{(2)}(n)\right) = \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right) + O\left(x^{\frac{1}{k+1}}\right). \qquad (2)$$

У статті Wan Yanxing [15] доведена тотожність

$$\sum_{n=1}^{\propto} \frac{(-1)^{n-1}}{(S_k^{(2)}(n))^{\alpha}} = \frac{2^{\alpha} - k - 1}{2^{\alpha} + k - 1} \prod_r \left(1 + \frac{k}{r^{\alpha} - 1}\right),$$

яка справедлива для кожного дійсного $\alpha > 1$.

Нарешті, Xiayan Li [16] та П. Д. Варбанець, С. Кирбат [26] знайшли асимптотичну формулу для середнього значення $S_k^{(2)}(n)$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} S_k^{(2)}(n) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2}\left(\ln x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2}\zeta\,'(2)\right) + o(1), \text{ якщо } k = 2, \\ \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} + \frac{\zeta\left(\frac{2}{3}\right)}{2\zeta(2)} x^{\frac{1}{3}}(1 + o(1)), \text{ якщо } k = 3, \\ \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)}(1 + o(1)), \text{ якщо } k \geq 4. \end{cases} \tag{3}$$

В даній роботі ми вивчаємо залишкові члени у формулах (1), (2) та вивчаємо розподіл значень $\tau(S_k^{(2)}(n))$ в коротких інтервалах.

В подальшому нам знадобляться деякі добре відомі результати про розподіл значень дзета-функції Римана $\zeta(s)$ (див. Є. Титчмарш [12]).

Лема 1. *Нехай $s = \sigma + it$. Тоді*

(i) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|)$ *в околі точки $s = 1$, γ — стала;*

(ii) $\zeta(s) \ll |t|^{c(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}(ln(|t|+3))^{\frac{2}{3}}$, *якщо $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$;*

(iii) $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, *де $\chi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+s}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}$;*

(iv) $\frac{1}{\zeta(s)}| \ll \ln(|t|+3)$, *якщо $1 \leq \sigma \leq 3$;*

(v) $\zeta(s) \ll |t|^{\frac{1-\sigma}{3}} ln|t|$, *якщо $|t| > 3, \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$;*

(vi) $\int\limits_1^T |\zeta(\sigma + \frac{1}{2})|^4 dt \ll T\min(\ln T, \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}})$, *якщо $\sigma \geq \frac{1}{2}$;*

(vii) $\int\limits_1^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 dt \ll T\ln^4 T$.

(Тут γ — стала Ойлера).

Лема 2. ***(область, вільна від нулів** $\zeta(s)$**)*** *Існує абсолютна стала $C > 0$ така, що в області $Res \geqslant 1 - \frac{C}{(\ln(|t|+10))^{\frac{2}{3}}\ln\ln(|t|+10)}$ немає нулів $\zeta(s)$ (див. [6], гл.VI, теор.2)*

Лема 3. *В припущенні справедливості гіпотези Рімана моємо*

$$(\zeta(\sigma + it))^{\pm} = O(|t|), \quad \sigma \geq \frac{1}{2}, \quad |t_0| > t_0(\epsilon),$$

$$|\zeta(\frac{1}{2} + it)| = O\left(\exp(A\frac{\ln t}{\ln\ln t})\right),$$

$$\mu(n) := \sum_{n\leq x}\mu(n) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\exp(A\frac{\ln x}{\ln\ln x})\right),$$

де $A>0$ — стала, а сталі в символах "O" можуть залежити від $\epsilon, \epsilon>0$ — довільна стала.

Лема 4. ***(безумовна оцінка)*** *При $x\to\propto$ маємо*

$$\mu(x)=O(x\exp(-C(\ln x)^{\frac{3}{5}-\epsilon})),$$

(див. [6], гл. VI, пар. 3).

Лема 5. ***(про часткові суми ряду Діріхле)*** *([9], Додаток, Теорема 3.1) Нехай ряд Діріхле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\propto}\frac{a_n}{n^s}$$

збігається абсолютно при $\sigma>1$, причому $|a_n|<c\Phi(n),(c>0)$, де $\Phi(n)$ — додатня монотонно зростаюча функція. Крім того, нехай при $\sigma\to+0$ справедлива оцінка

$$\sum_{n=1}^{\propto}|a_n|n^{-\sigma}=O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right),\quad \alpha>0.$$

Тоді для нецілого $x>1, c>1, T>1$ має місце співвідношення

$$\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{x\Phi(2x)\ln x}{T^{\alpha}(x)}\right),\tag{4}$$

де (x) значить відстань x до найближчого цілого числа.

Лема 6. *Нехай $f(n)$ та $\Phi(n)$ — мультиплікативні функції, причому*

$$f(n)=\sum_{d^2|n}\Phi(d),\quad \text{де}\quad \Phi(n)=O(n^{\epsilon}).$$

Тоді рівномірно по $h, h<x$, справедлива оцінка

$$\sum_{x<n\le x+h}f(n)=h\sum_{d=1}^{\propto}\frac{\Phi(d)}{d^2}+O\left(h^{\frac{1}{2}}x^{\epsilon}\right)+O(x^{\theta}),$$

де $\theta=0,2204, \epsilon>0$ — довільне мале число (див. доведення [2], theorem 1).

Тепер ми переходимо до побудови твірного ряду для функцій $S_k^{(j)}(n)$ та $\tau(S_k^{(j)}(n))$, де $\tau(m), m\in N$ означає число різних дільників натурального m.

Нехай p — просте число, s — комплексне, $Res>2$. Тоді маємо

$$f_1(s,p)=1+\frac{S_k^{(1)}(p)}{p^s}+\frac{S_k^{(1)}(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+$$

$$+\frac{S_k^{(1)}(p^k)}{p^{ks}}+\frac{S_k^{(1)}(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{S_k^{(1)}(p^{2k})}{p^{2ks}}+\frac{S_k^{(1)}(p^{2k+1})}{p^{(2k+1)s}}+\cdots=$$

$$=1+\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p}{p^{ks}}+\frac{p^2}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{2ks}}+\cdots$$

Помножуючи останнє рівняння на $\dfrac{1-\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}$ і проводячи елементарні спрощення, отримаємо

$$\begin{aligned} f_1(s,p) &= \frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\left(1-\frac{1}{p^{2(s-2)}}+O\left(p^{-(2(s-1)+1)}\right)\right) = \\ &= \frac{1-p^{-2(s-1)}}{1-p^{-(s-1)}}\left(1+O\left(p^{-2(s-1)+1}\right)\right). \end{aligned}$$

Тому, в силу тотожності Ойлера з мультиплікативною функцією $\frac{S_k^{(1)}(n)}{n^s}$, виводимо для $Res > 2$:

$$\sum_{n=1}^{\propto}\frac{S_k^{(1)}(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-2(s-1)}}{1-p^{-(s-1)}}\left(1+O\left(p^{-2(s-1)+1}\right)\right) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}G_0(s), \tag{5}$$

де $G_0(s)$ регулярна при $Res > 1$ та задається в напівплощині $Res > 1$ абсолютно збіжним рядом Діріхле:

$$G_0 = \sum \frac{g(n)}{n^s}, \quad g(n) = O(1).$$

Аналогічні роздуми дають твірний ряд Діріхле для $S_k^{(2)}(n)$ при $Res > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\propto}\frac{S_k^{(2)}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)}.$$

Далі, використовуючи мультиплікативність функції $\tau(n), S_k^{(j)}(n), j = 1, 2$, ми побудуємо твірні ряди $\tau(S_k^{(j)}(n))$. Позначимо:

$$F_k^{(j)}(s) = \sum \frac{\tau(S_k^{(j)}(n))}{n^s}, \quad Res > 1.$$

Розглянемо спочатку випадок $j = 1$. Тоді для $k = 2$ маємо:

$$\begin{gathered} F_2^{(1)}(s) = \Pi_p(1+\tfrac{2}{p^s}+\tfrac{2}{p^{2s}}+\tfrac{3}{p^{3s}}+\tfrac{3}{p^{4s}}+\cdots) = \\ = \Pi_p(1+\tfrac{2}{p^s}+\tfrac{2}{p^{2s}}+\tfrac{3}{p^{3s}}+\tfrac{3}{p^{4s}}+\cdots)\tfrac{(1-\frac{1}{p^s})^2}{(1-\frac{1}{p^s})^2} = \\ = \zeta^2(s)\Pi_p(1+\tfrac{2}{p^s}+\tfrac{2}{p^{2s}}+\tfrac{3}{p^{3s}}+\tfrac{3}{p^{4s}}+\cdots)(1-2\tfrac{1}{p^s}+\tfrac{1}{p^{2s}}) = \\ = \zeta^2(s)\Pi_p(1-\tfrac{1}{p^{2s}}+\tfrac{1}{p^{3s}}-\tfrac{1}{p^{4s}}+\cdots) = \\ = \zeta^2(s)\Pi_p(1-\tfrac{1}{p^{2s}}+\tfrac{1}{p^{3s}}-\tfrac{1}{p^{4s}}+\cdots)(1+\tfrac{1}{p^{2s}}\tfrac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{1}{p^{4s}}}) = \\ = \tfrac{\zeta^2(s)\zeta(4s)}{\zeta(2s)}\textstyle\prod_p(1+\tfrac{1}{p^{3s}}-\tfrac{2}{p^{4s}}+\cdots)\tfrac{1-\frac{1}{p^{3s}}}{1-\frac{1}{p^{3s}}} = \\ = \tfrac{\zeta^2(s)\zeta(3s)\zeta(4s)}{\zeta(2s)}G(s) = \tfrac{\zeta^2(s)\zeta(3s)}{\zeta(2s)}G_4^2(s), \end{gathered} \tag{6}$$

де $G_4^2(s)$ — регулярна функція для $Res > \frac{1}{4}$.

Якщо $k \geq 3$, то, як і вище, подібними перетвореннями отримуємо

$$F_2^{(1)}(s) = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} G_1^2(s),$$

де $G_1^2(s)$ — регулярна функція для $Res > \frac{1}{4}$.

У випадку $j = 2$ знаходимо

$$F_k^{(2)}(s) = \sum_{n=1}^{\propto} \frac{\tau(S_k^{(2)}(n))}{n^s} =$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{2}{p^{(n-1)s}} + \frac{2}{p^{ks}} + \dots + \frac{2}{p^{(2k-1)s}} + \frac{3}{p^{2ks}}\right) =$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^s}} = \zeta(s)\zeta(ks).$$

Зауважимо, що несиметрична функція дільників $\tau_{1,k}(n) = \sum\limits_{n=md^2} 1$ також має твірний ряд $\zeta(s)\zeta(ks)$.

Тому, беручи до уваги теорему [9] про те, що твірна функція для коефіцієнтів ряду Діріхле однозначно визначає коефіцієнти цього ряду, знаходимо, що $\tau(S_k^{(2)}(n)) = \tau_{1,2}(n)$, а тому далі ми наведемо теорему про середнє значення функції $\tau(S_k^{(2)}(n))$.

Основні результати. Співвідношення (5) дозволяє отримати асимптотичну оцінку середнього значення $S_k^{(1)}(n)$. Позначимо $a_n = \frac{1}{n} S_k^{(1)}(n)$. Тоді з (5) випливає

$$\sum_{n=1}^{\propto} \frac{a_n}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s), Res > 1, \tag{7}$$

де $G_0'(s)$ визначається абсолютно збіжним рядом Діріхле в напівплощині $Res > 0$: $G_0'(s) = \sum\limits_{n=1}^{\propto} \frac{g_n}{n^s}, |g_n| \ll n^{-k+\epsilon}, \epsilon > 0$ — будь-яке число.

Тому формула Перрона (див. лему 5) дає для $x = \frac{N}{2}, N$ — ціле непарне число,

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right) + O\left(\frac{x\Phi(2x)}{T}\right). \tag{8}$$

Тут $c > 1, T > 1$ (їхні значення будуть уточнені пізніше), $\Phi(y) = O(1)$ для всіх $y \geq y_0 > 0$.

Розглянемо прямокутник R з вершинами $A = (C, -T), B = (C, T), C = (\frac{1}{2}, T), D = (\frac{1}{2}, T)$, зображений на рисунку 1.

В силу мероморфності функції $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \dfrac{x^s}{s}$ в прямокутнику ABCD, включаючи його сторони, ми за теоремою про лишки отримуємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0'(s)\frac{x^s}{s}ds=\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0'(s)\frac{x^s}{s}\right)+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{C}^{B}+\int\limits_{D}^{C}+\int\limits_{D}^{A}\right)\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0'(s)\frac{x^s}{s}ds\right). \tag{9}$$

Ми врахували, що всередині прямокутника R є тільки одна особлива точка $s=1$, тому що на прямій $Res=\frac{1}{2}$ та правіше цієї прямої $\zeta(2s)\neq 0$.

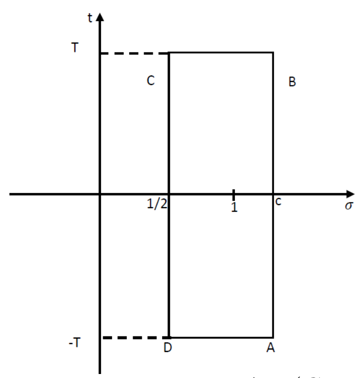

Рис. 1. Прямокутник R з вершинами $A=(C,-T),B=(C,T),C=\left(\frac{1}{2},T\right),D=\left(\frac{1}{2},T\right)$

Тепер інтеграли по горизонтальним ділянкам контуру інтегрування оцінюються за допомогою леми 1 (iv, v), а на вертикальній ділянці користуємось оцінкою другого моменту $\zeta(s)$ на половинній прямій $Res=\frac{1}{2}$ (див. лему 1 (vi)).

Таким чином маємо:

$$\left|\int\limits_{C}^{B}\right|,\quad\left|\int\limits_{A}^{D}\right|\ll\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}T^{\frac{1-\delta}{3}}\frac{x^\delta}{T}\ln T d\delta\ll\max\left(x^{\frac{1}{2}},\frac{x^c}{T}\ln T\right). \tag{10}$$

Далі, в силу нерівності Коши–Шварца маємо

$$\left|\int\limits_{D}^{C}\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\leqslant\left(\int\limits_{-T}^{T}|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2\frac{dt}{|\frac{1}{2}+it|}\int\limits_{-T}^{T}\frac{|G_0(\frac{1}{2}+it)|^2}{|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2}\frac{|x^{1+2it}|}{|\frac{1}{2}+it|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Оскільки на одиничній прямій (тобто $Res=1$) справедливі оцінки:

$$|G_0'(s)|=0,\quad\frac{1}{|\zeta(1+2it)|}\ll\ln(|t|+3),\quad|x^{1+2it}|=x,$$

то, в силу леми 1 (vi), виводимо

$$\left|\int\limits_{D}^{C} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \frac{x^s}{s} ds\right| \ll x \ln^2 T. \tag{12}$$

Нарешті,

$$\operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \frac{x^s}{s} \right) = \frac{G_0'(1)}{\zeta(2)} x. \tag{13}$$

Покладемо $c = 1 + \dfrac{1}{\ln x}, T = x^{\frac{1}{2}} (\ln x)^{\frac{1}{2}}$. Тоді з (9)–(13) отримуємо

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{S_k^1(n)}{n} = \frac{G_0'(1)}{\zeta(2)} x + O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x).$$

Звідси, застосовуючи лему Абеля про часткове підсумовування, виводимо

$$\sum_{n \leqslant x} S_k^1(n) = \sum_{n \leqslant x} \frac{S_k^1(n)}{n} n = \frac{G_0'(1)}{\zeta(2)} x^2 + O(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x), \tag{14}$$

з абсолютною сталою в символі "O".

Із виразу для $G_0'(1)$ виходить, що $G_0'(1)$ є обчислюваною додатною сталою, а тому доведена теорема

Теорема 1. *При $x \to \propto$ справедлива асимптотична формула*

$$\sum_{n \leqslant x} S_k^1(n) = C_k x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x \right),$$

де стала $C_k > 0$ може бути обчислена, а стала у символі "O" є абсолютною.

Беручи до уваги, що $ln^2 x = (x^\epsilon)$ для будь-якого фіксованого $\epsilon > 0$, ми маємо, що в отриманій теоремі 1 залишковий член менше, ніж у формулі (1), яка наведена в роботі Liping. Більш того, наш метод доведення теореми 1 дозволяє отримати оцінку залишкового члена

$$R(x) = O(x^{\frac{3}{2}} \exp(-c(\ln x)^{-\frac{2}{3}})),$$

враховуючи, що $\zeta(2s)$ не має нулів в області

$$Res \geqslant 1 - \frac{C}{(\ln(|t| + 10))^{\frac{2}{3}} \ln \ln(|t| + 10)}$$

(див. [6], гл. VI, теорема 2).

Тепер розглянемо аналог формули Lu Yaming (див. формулу (2)) для арифметичної функції $\tau(S_k^1(n))$, де $\tau(n)$ — функція дільників, тобто $\tau(n) = \sum\limits_{d|n} 1$. У випадку $k = 2$ формула (7) дає (за лемою 5):

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(S_2^1(n)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} \zeta(3s) G_1^{(2)}(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^s}{T(c-1)^2} \right), \tag{15}$$

де $c > 1$, $\quad T > 1$, $\quad G_1^{(2)}$ — регулярна в напівплощині $Res > \frac{1}{4}$.

Знову, враховуючи, що подінтегральна функція в напівплощині $Res > \frac{1}{2}$ має єдину особливу точку (це полюс другого порядку), ми після стандартних обчислень за допомогою леми 1 знаходимо

$$\begin{gathered}\sum_{n\leqslant x} \tau(S_2^1(n)) = \\ = \operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\zeta(3s)G_1^{(2)}(s)\frac{x^s}{s}\right) + O\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{c} T^{\frac{2(1-\sigma)}{3}}\frac{x^\sigma}{T}\ln T d\sigma\right) + \\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-T}^{T}\zeta^2\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}+3it\right)}{\zeta(3+2it)}G_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2}+it}dt.\end{gathered} \tag{16}$$

Для останнього інтеграла в (16) маємо оцінку

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{-T}^{T}\zeta^2\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}+3it\right)}{\zeta(3+2it)}G_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2}+it}dt\right| \leqslant \\ \leqslant 2\int\limits_{1}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|\frac{\zeta(\frac{3}{2}+3it)}{\zeta(3+2it)}\right|\frac{x^{\frac{1}{2}}}{t}dt + O(x^{\frac{1}{2}}).\end{gathered} \tag{17}$$

Тут ми прийняли до уваги, що на відрізку $[-1, 1]$ прямої $Res = \frac{1}{2}$ підінтегральна функція оцінюється як $O(x^{\frac{1}{2}})$ і, крім того,

$$G_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(1),$$

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| = \left|\zeta\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|,$$

$$\frac{1}{\zeta(3+2it)} = O(\ln(|t|+10)),$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}+3it\right) = O(1).$$

Тому з нерівності Коші–Шварца отримуємо

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{-T}^{T}\zeta^2\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}+3it\right)}{\zeta(3+2it)}G_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2}+it}dt\right| \ll \\ \ll x^{\frac{1}{2}}\int\limits_{1}^{T}\frac{|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{\ln(|t|+10)}{\frac{1}{2}}dt \ll x^{\frac{1}{2}}\ln^4 T.\end{gathered} \tag{18}$$

(Ми оцінили перший інтеграл праворуч за лемою 1 (vii)). Крім того, оскільки $\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+(s-1)g(s)$, де $g(s)$ — аналітична в околі точки $s=1$, то маємо

$$\zeta^2(s)=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2\gamma}{s-1}+(\gamma^2+2g(s))+(s-1)^2g(s),$$

$$\frac{x^s}{s}=x+(x\ln x-x)(s-1)+O((s-1)^2x\ln x),$$

$$\zeta(3s)=\zeta(3)+3\zeta'(3)(s-1)+\cdots,$$

$$G_1^{(2)}(s)=G_1^{(2)}(1)+O(s-1).$$

Звідки випливає, що

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\tfrac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\zeta(3s)G_1^{(2)}(s)\right)=$$
$$=\zeta(3)G_1^{(2)}(1)x\ln x+x(2\gamma\zeta(3)G_1^{(2)}(1)-\zeta(3)G_1^{(2)}(1)+ \qquad (19)$$
$$+3\zeta'(3)G_1^{(2)}(1)+\zeta(3)G_1^{(2)P_1}(1))=xP_1(\ln x),$$

де $P_1(u)=Au+B, A=\zeta(3)G_1^{(2)}(1)>0, B$ — обчислювальні сталі.

Випадок $k\geqslant 3$ дає подібний результат. Таким чином, із співвідношень (15)–(19), беручи $c=1+\frac{1}{\ln x}, T=x^{\frac{1}{2}}$, ми відразу отримуємо наступний результат.

Теорема 2. *Для кожного натурального $k\geqslant 2$ існують обчислювальні сталі $C_k^{(1)}>0, C_k^{(2)}$ такі, що*

$$\tau(S_k^1(n))=C_k^{(1)}x\ln x+C_k^{(2)}x+O(x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^4).$$

Для середнього значення функції $S_k^2(n)$ в роботі [26] отримані "O" і Ω-оцінки, і ми не маємо можливості їх покращити. Але з вигляду твірного ряд для $S_k^{(2)}(n)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^{(2)}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)},\qquad Res>1,$$

ми можемо отримати "умовний"результат, вважаючи, що гіпотеза Римана справедлива.

Теорема 3. *В умовах справедливості гіпотези Римана має місце асимптотична формула*

$$\sum_{n\leqslant x}S_2^{(2)}(n)=\frac{3}{\pi}^2x\left(\ln x+3\gamma-1-\frac{12}{\pi^2}\zeta'(3)\right)+O\left(x^{\frac{1}{3}+\epsilon}\right),$$

зі сталою в символі "O", яка залежить від ϵ.

Доведення. Ми використовуємо формулу Перрона і переносимо контур інтегрування на пряму $Res = \frac{1}{4} + \epsilon, \epsilon > 0$.

Тепер завдяки співвідношенню (iii) леми 3 і формулі Стірлінга для $\Gamma(z)$ (див., наприклад, [6]):

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \sqrt{(\ln 2\pi)} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta, \quad \delta > 0$$

виводимо

$$\begin{gathered} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{4} + \epsilon + it\right)\right| \ll (|t| + 10)^{\frac{1}{4}}, \\ \left|\zeta\left(2\left(\tfrac{1}{4} + \epsilon\right)\right) - 1 + 2it)\right| \ll |t| + 10, \\ \frac{1}{\left|\zeta\left(2\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)\right) + 2it)\right|} \ll |t|^{\epsilon} \end{gathered} \tag{20}$$

(сталі в символах " $\ll$ " залежать від ϵ).

Таким чином, маємо

$$\begin{gathered} \sum_{n \leqslant x} S_2^{(2)}(n) = \\ = \operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s}\right) + O\left(\left|\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon-iT}^{\frac{1}{4}+\epsilon+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s} ds\right|\right) + \\ +O\left(\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon}^{c} \frac{\zeta(\sigma \pm iT)\zeta(2\sigma - 1 \pm 2it)}{\zeta(2\sigma + 2it)} \frac{x^{\sigma}}{T} d\sigma\right) + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^2}\right). \end{gathered} \tag{21}$$

Ми врахували, що в точці $s = 1$ підінтегральна функція має полюс другого порядку.

Проводячи обчислення $\operatorname*{res}_{s=1}$ і інтегралів в (21) за допомогою оцінок (20), отримуємо для $c = 1 + \dfrac{1}{\ln x}$:

$$\operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s}\right) = \frac{3}{\pi}^2 x \left(\ln x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2}\zeta'(2)\right),$$

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon-iT}^{\frac{1}{4}+\epsilon+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s} ds\right| \ll T^{\frac{5}{4}-\epsilon} x^{\frac{1}{4}+\epsilon}, \tag{22}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon}^{c} \frac{\zeta(\sigma \pm iT)\zeta(2\sigma - 1 \pm 2it)}{\zeta(2\sigma + 2it)} \frac{x^{\sigma}}{T} d\sigma \ll T^{\frac{1}{4}-\epsilon} x^{\frac{1}{4}+\epsilon} + \frac{x}{T} \ln^2 x. \tag{23}$$

Візьмемо $T = x^{\frac{1}{3}}$. Тоді з (21)–(23) ми отримаємо твердження теореми 3.

Зауваження 1. *В [26] було отримано безумовний результат з залишковим членом $O(x^{\frac{3}{4}}(\ln x)^{\frac{3}{2}})$ та дана Ω–оцінка $O(x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^{\frac{1}{2}})$. Наш результат покращує безумовну оцінку з [26], але показує, що можливо Ω–оцінка може бути підвищена.*

Зауваження 2. *Метод дослідження функції $S_2^2(n)$ в умовах справедливості гіпотези Римана, на жаль, не приводить до покращення залишкового члена для $S_k^2(n), k \geq 3$, який наведений в роботі [26].*

Тепер ми переходимо до побудови асимптотичної формули для середнього значення $\tau(S_k^2(n))$.

Вище ми довели, що
$$\tau(S_k^2(n)) = \tau_{l,k}(n).$$
Тому маємо (дивись [17])
$$\sum_{n\leqslant x} \tau(S_k^2(n)) = x\zeta(k) + x^{\frac{1}{k}}\zeta\left(\frac{1}{k}\right) + O(\Delta(1,k;x)),$$
де $\Delta(1,k;x) = \sum_1 + \sum_2$; $\sum_1 = \max\limits_{1\leqslant N\leqslant x^{\frac{1}{k}}+1} \left| \sum\limits_{N\leqslant n\leqslant 2N} \psi(\frac{x}{n^k}) \right|$, $\psi(u) := u - [u] - \frac{1}{2}$, $[u]$ — ціла частина u.

З роботи Richert[10] випливає, що $\Delta(1,k;x) \ll x^{\frac{2}{5+2k}}$, що краще, ніж результат, вказаний в роботі In Yaming [8] (див. формулу (2) нашої роботи).

На сьогоднішній день можна отримати таку оцінку
$$\Delta(1,k;x) \ll x^{\theta(k)}\ln x, \qquad \theta(k) = \max\left(\frac{l_0+l_1}{l_0+1}, \frac{1}{k+1}, \frac{l_0}{l_0k+q+l_0-l_1}\right),$$
де (l_0,l_1) — довільна експонентна пара (наприклад, експонентна пара Huxley-Watt $(\frac{9}{56}+\epsilon, \frac{37}{56}+\epsilon)$, $\epsilon > 0$ — довільно мале число). Таким чином, справедлива

Теорема 4. *Нехай (l_0,l_1) — одновимірна експонентна пара, $0 < l_0 < \frac{1}{2} < l_1 < 1$. Тоді справедлива асимптотична формула*
$$\sum_{n\leq x} \tau(S_k^2(n)) = \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)x^{\frac{1}{k}} + O\left(x^{\theta(k)}\ln x\right),$$
де $\theta(k)$ визначена вище.

Нашою останньою метою буде доведення асимптотичної формули для середнього занчення $\tau(S_2^2(n))$ в короткому інтервалі, а саме

Теорема 5. *Для $h \in [x^{\theta}, x)$ справедлива асимптотична формула*
$$\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} \tau(S_2^2(n)) = \frac{6}{\pi^2} + O\left(h^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^{\theta}\right),$$
де $\theta = 0,2204$.

Доведення. Для $h > \frac{x}{2}$ маємо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x<n\leqslant x+h} \tau_{1,2}(n) = \sum_{x<md^2\leqslant x+h} 1 = \\
&= \sum_{d\leqslant (x+h)^{\frac{1}{2}}} \ \sum_{\frac{x}{d^2}<m\leqslant \frac{x+h}{d^2}} 1 = \sum_{d\leqslant (x+h)^{\frac{1}{2}}} \left(\left[\frac{x+h}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right) = \\
&= h \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} + O\left(h \sum_{d\leqslant (x+h)^{\frac{1}{2}}} \right) = \zeta(2)h + O\left(h^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Далі для $x^{\frac{2}{3}} \leqslant h < \frac{x}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x<n\leqslant x+h} \tau_{1,2}(n) = \sum_{d\leqslant h^{\frac{1}{2}}} \ \sum_{\frac{x}{d^2}<m\leqslant \frac{x+h}{d^2}} 1 + \sum_{\frac{x<md^2\leqslant x+h}{1}} d > h^{\frac{1}{2}} 1 = \\
&= \zeta(2)h + O\left(h^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(\sum_{m<\frac{x}{h}} \left(\sqrt{\frac{x+h}{m}} - \sqrt{\frac{x}{m}} \right) \right) = \zeta(2)h + O\left(h^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Нарешті, для $h < x^{\frac{2}{3}}$ маємо

$$
\sum_{x<n\leqslant x+h} \tau_{1,2}(n) = \sum_{d\leqslant h^{\frac{1}{2}}} \left(\left[\frac{x+h}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right) + O\left(\sum_{h^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{2}}} \left(\left[\frac{x+h}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right) \right),
$$

оскільки

$$
\begin{aligned}
&\sum_{h^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{2}}} \left(\left[\frac{x+h}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right) = \\
&= \sum_{h^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{3}}} \left(\psi\left(\frac{x}{d^2} \right) - \psi\left(\frac{x+h}{d^2} \right) \right) + O(h^{\frac{1}{2}}) + \sum_{x^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{3}}} \ \sum_{x<md^2\leqslant x+1} 1.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Але

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{3}}} \ \sum_{x<md^2\leqslant x+1} 1 = \sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \ \sum_{(\frac{x}{m})^{\frac{1}{2}}<d\leqslant (\frac{x+h}{m})^{\frac{1}{2}}} 1 = \sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \left(\left[\sqrt{\frac{x+h}{m}} \right] - \left[\sqrt{\frac{x}{m}} \right] \right) = \\
&= \sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \left(\psi\left(\sqrt{\frac{x}{m}} \right) - \psi\left(\sqrt{\frac{x+h}{m}} \right) \right) + O\left(hx^{\frac{1}{3}} \right) = \\
&= \sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}} \left(\psi\left(\sqrt{\frac{x}{m}} \right) - \psi\left(\sqrt{\frac{x+h}{m}} \right) \right) + O\left(hx^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Таким чином, ми отримали співвідношення

$$\sum_{x<n\leqslant x+h}\tau_{1,2}(n)=\zeta(2)h+O\left(\left|\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\psi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right|\right)+ \\ +O\left(\left|\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{2}}}\psi\left(\frac{x}{n^2}\right)\right|\right)+O\left(h^{\frac{1}{2}}\right). \tag{28}$$

Суми справа оцінювали багато авторів (див. [17]). Ми будемо користуватись оцінками

$$\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\psi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\ll x^{\frac{9}{41}}=x^{0,2195\ldots}\quad (\text{див.}[10])\ , \tag{29}$$

$$\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\psi\left(\frac{x}{n^2}\right)=x^{0,2204}(\text{див.}[2])\ . \tag{30}$$

Тому з (28)–(30) випливає твердження теореми 5.

Висновки. В теоремах 1–5 нами покращені деякі результати Keng [7], Lu Yaming [8], Wang Yanxing [15], а також доведено нові оцінки відносно розподілу значень $\tau(S_k^1(n))$ на відрізках натурального ряду і $\tau(S_2^2(n))$ в короткому інтервалі.

1. **Варбанець П., Кирбат С.** О среднем значении функции $S_k'(n)$ / П. Варбанец, Кирбат С. // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63. – С. 448–458.
2. **Varbanets P.** Multiplicative functions of special types in short intervals / P. Varbanets // New trends in probability and statistic, Ultrecht (The Netherlands), Tokyo (Japan). – 1992. – V. 2. – P. 181–190.
3. **Ding Liping** On the mean value Smarandache ceil functions / Ding Liping // Scientia Manga. – 2005. – V. 1, Is. 2. – P. 74–77.
4. **Ibstedt H.** Surfing on the Ocean of the Numbers — a few Smarandache Nottions and Similar Topics. – Erhun Univ Press, New Mexico, USA, 1997. – 321 p.
5. **Computational** Aspect of Numbers Sequences. – Amer. Research Press, Lipton, USA, 1999. – 400 p.
6. **Карацуба А. А.** Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. – М. : Мир, 1975. – 240 с.
7. **Keng H. L.** Introduction to Number Theory / H. L. Keng. – Springer Verlag, New York, USA, 1981.
8. **Lu Yaming** On the dual function of the Smarandache ceil function / Lu Yaming // Research of Smarandache problems in number theory, Hexis Phoenix AZ. – 2005. – P. 55–57.
9. **Прахар К.** Распределение простых чисел / К. Прахар. – М. : Мир, 1967.

10. **Richert H. E.** Uber die Anzahl Abelscher Gruppen gegeblener Ording / H. E. Richert // Math. Z. – 1593, V. 56. – P. 21–32 (I), Math. Z. – 1593. – V. 58. –P. 71–84 (II).
11. **Smarandache F.** Only Problems...not Solutions / F. Smarandache. – Xiquan Publ. House Phoenix-Chicago, USA, 1993.
12. **Титчмарш Е.** Теория дзета-функции Римана / Е. Титчмарш. – М. : "ИЛ", 1953.
13. **Tabirca S., Tabirca T.** Some new result concerning the Smarandache ceil function / S. Tabirca, T. Tabirca // Smarandache Notions Journal. – 2002. – V. 13. P. 30–36.
14. **Filaseta M., Trifonov O.** On gaps between squarefree numbers, I, II / M. Filaseta, O. Trifonov // Progress in Math Series. – 1991. – V. 85. P. 235–253.
15. **Wang Yanxing** Some identities involving the Smarandache ceil functionsi / Wang Yanxing // Scientia Manga. – 2006. – V. 2, Is. 1. – P. 44–49.
16. **Xiayan Li** The mean value of the k-th Smarandache dual functioni / Xiayan Li // Proc Fifth Int. Conf. Number Theory and Smarandache Notions, Hexis. – 2009. P. 128–132.
17. **Kratzel E.** Lattice points / E. Kratzel. – Kluwel, 1998.
18. **Nowak W., Menzel H.** On an asymmetric divisor problem with congruence conditions / W. Nowak, H. Menzel // Manuscripta mathematica, Berlin, Heiblelbergi. – 1986. – P. 107–120.