ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 31–37

Mathematical Subject Classification: 31A10
УДК 517.9

О. В. Лопотко
Национальный лесотехнический университет Украины

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ $\frac{d^3}{dx^3}$

Лопотко О. В. Інтегральне представлення додатньо визначених функцій однієї змінної, пов'язаних з оператором $\frac{d^3}{dx^3}$. Отримано інтегральне представлення додатньо визначенних функцій однієї змінної, для яких ядро $K\,(x,y)$ додатньо визначене.
Ключові слова: інтегральне представлення, додатньо визначені функції.

Лопотко О. В. Интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, связанных с оператором $\frac{d^3}{dx^3}$. Получено интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, для которых ядро $K\,(x,y)$ положительно определено.
Ключевые слова: интегральное представление, положительно определенные функции.

Lopotko O. V. Integral representation is obtained for of positive definite function of one variable such that the kernel $K\,(x,y)$ is positively defined. Integral representation is obtained for of positive definite function of one variable such that the kernel $K\,(x,y)$ is positively defined.
Key words: integral representation, positive definite function.

Введение. В работе [1] предложен метод получения интегральных представлений для положительно определенных ядер $K\,(x,y)\,\left(x,y\in R^1\right)$ с использованием собственных функций дифференциальных операторов, как обычных, так и частных производных. С применением этого метода в монографии [2] доказана теорема об интегральном представлении таких ядер

$$K(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=0}^{r-1}\chi_j(x;\lambda)\overline{\chi_k(y;\lambda)}d\sigma_{jk}(\lambda)$$

через фундаментальную систему решений $\chi_0(x;\lambda),\chi_1(x;\lambda),\ldots,\chi_{r-1}(x;\lambda)$ дифференциального уравнения $Lu=\lambda u$. Получены интегральные представления для ядер типа $K(y-x),\frac{1}{2}[K(x+y)\pm K(x-y)],K(x+y)$, связанных с дифференциальными операторами $\frac{d}{dx},-\frac{d^2}{dx^2},i\frac{d}{dx}$. В данной статье доказана теорема об интегральном представлении положительно определенных ядер, связанных с дифференциальным оператором $\frac{d^3}{dx^3}$.

Основные результаты.

Определение 1. *Целую функцию $\mathbb{C} \ni s \mapsto k(s) \in C^{\infty}$ будем называть положительно определенной, если*

$$\sum_{i,j=1}^{N} K(x_i, x_j)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \forall x_1, \ldots, x_N; \quad \xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

где

$$K(x,y)=\frac{1}{3}\left[k(x+y)+k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)+k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\right],$$

причем

$$\begin{gathered} K(0,0)=0; \quad \frac{\partial K}{\partial x}(0,0)=0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(0,0)=0; \quad \frac{\partial K}{\partial y}(0,0)=0; \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(0,0)=0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}(0,0)=0. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 1. *Каждая целая положительно определенная функция $k\,(s)$ $(s \in \mathbb{C})$, удовлетворяющая условиям*

$$k(s)+k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}s\right)+k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}s\right)=0, \tag{3}$$

$$|k(s)| \leqslant Ce^{|s|} \quad (C>0), \tag{4}$$

допускает представление

$$\begin{aligned} k(x) = \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} - \frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda)+ \\ + \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho\,(\lambda)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

где $d\rho(\lambda)$ — некоторая мера, которая определяется неоднозначно, причем

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda) < \infty. \tag{6}$$

Обратно, функция вида (5) является положительно определенной и для нее выполняются условия (2)–(4).

Доказательство. Поскольку для положительно определенного ядра (1) равенство

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}K\left(x,y\right)=\frac{\partial^3}{\partial y^3}K\left(x,y\right)$$

выполняется, то для ядра $K(x,y)$ можно применить теорему 3.7 [3, с. 659] и использовать представление (3.20).

Для этого необходимо найти фундаментальную систему решений $\chi_0(x;\lambda)$, $\chi_1(x;\lambda)$, $\chi_2(x;\lambda)$ уравнения

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\lambda u, \tag{7}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_j\left.\left(x;\lambda\right)\right|_{x=0}=\delta_{jk}\quad\left(j,k=0,1\right).$$

Так как корни характеристического уравнения $K^3-\lambda=0$ есть $K_1=\sqrt[3]{\lambda}$, если $\lambda\geqslant 0$, и $K_1=-\sqrt[3]{|\lambda|}$, если $\lambda<0$, $K_{2,3}=\dfrac{-\sqrt[3]{\lambda}\pm i\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}}{2}$, то общее решение (7) при $\lambda\geqslant 0$ будет иметь вид

$$y=C_1e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+C_2e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+C_3e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x.$$

Если $\lambda<0$ общее решение (7) будет иметь вид

$$y=C_1e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+C_2e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+C_3e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x.$$

Тогда фундаментальная система (7) будет иметь такой вид:

$$\chi_0\left(x;\lambda\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+\dfrac{2}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}\,x\quad\left(\lambda<0\right),\\[2mm] \dfrac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+\dfrac{2}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\quad\left(\lambda\geqslant 0\right);\end{cases}$$

$$\chi_1(x;\lambda)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ \left(\lambda<0\right),\\[2mm] \left(\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ \left(\lambda\geqslant 0\right);\end{cases}$$

$$\chi_2(x;\lambda)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ (\lambda<0),\\[2mm] \left(\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ (\lambda\geqslant 0).\end{cases}$$

А представление (3.20) из теоремы 3.7 [3, с. 659] будет иметь такой вид:

$$K\left(x,y\right)=\sum_{j,k=0}^{2}\chi_j(x;\lambda)\overline{\chi_k(y;\lambda)}, \tag{8}$$

где

$$\Omega_\lambda\left(x,y\right)=\sum_{j,k=0}^{2}\left(\frac{\partial^{j+k}\Omega_\lambda}{\partial x^j\partial y^k}\right)(0,0)\,\chi_j\left(x;\lambda\right)\overline{\chi_k\left(y;\lambda\right)},$$

$$d\sigma_{jk}\left(\lambda\right)=\left(\frac{\partial^{j+k}\Omega_\lambda}{\partial x^j\partial y^k}\right)(0,0)\,d\rho\left(\lambda\right).$$

Так как $K(x,y)$ удовлетворяют условиям (2), то меры $d\sigma_{jk}(\lambda)=0$ $(j,k=\overline{0,2}$, кроме $j=k=2)$ и представление (8) будет иметь вид:

$$K(x;y)=\int\limits_{R^1}\chi_2(x;\lambda)\overline{\chi_2(y;\lambda)}d\sigma_{22}(\lambda)=\int\limits_{R^1}\chi_2(x;\lambda)\overline{\chi_2}(y;\lambda)d\rho(\lambda). \tag{9}$$

Если теперь положим в (9) $x=y$, получим

$$\frac{1}{3}[k(2x)+k(-x)+k(-x)]=\frac{1}{3}[k(2x)+2k(-x)]=\int\limits_{R^1}\chi_2^2(x;\lambda)d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right]^2\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}+ \tag{10}$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]^2\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}.$$

Правую часть (10) можно упростить следующим образом. Сначала проведем упрощение для $\lambda\geqslant 0$, получим

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]^2\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos^2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin^2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-2\frac{1}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\right.$$

$$\left.-2\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+2\frac{1}{3\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{d\rho\left(\lambda\right)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\left(\frac{1+\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x}{2}\right)+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\left(\frac{1-\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x}{2}\right)-\right.$$

$$-\frac{2}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}=$$

$$=\int\limits_0^\infty\Bigg[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{2}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}-$$

$$-\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Таким образом (10), если $\lambda\geqslant 0$, будет иметь вид:

$$\frac{1}{3}[k(2x)+2k(-x)]=\int\limits_0^\infty\Bigg[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{2}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x- \tag{11}$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Из (11) следует, что

$$k(x)=\int\limits_0^\infty\Bigg[\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda),$$

то есть (5) для $\lambda\geqslant 0$.

Аналогичным образом упрощая (10) для $\lambda<0$, получим (5) для $\lambda<0$. То, что $d\rho(\lambda)$ сосредоточена на отрезке $[-1,1]$, следует из (4). Поэтому функция $k(x)$ допускает аналитическое продолжение до целой функции $k(s)$ ($s\in\mathbb{C}$), так как мера $d\rho(\lambda)$ имеет компактный носитель.

Последнее утверждение теоремы доказывается следующим образом. Из представления (5) находим все слагаемые ядра $K(x;y)$. Найдем их для $\lambda\geqslant 0$:

$$\frac{1}{3}k(x+y)=\int\limits_0^1\Bigg\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}-\frac{1}{9}\left[\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2}\right]+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}-e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2i}\right]\Bigg\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda); \tag{12}$$

$$\frac{1}{3}k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)=\int\limits_0^1\Bigg\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-$$

$$-\frac{1}{18}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}\right]+ \tag{13}$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}-e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}}{2i}\Bigg\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda);$$

$$\frac{1}{3}k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)=\int\limits_0^1\left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-\right.$$
$$-\frac{1}{18}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}\right]+ \tag{14}$$
$$\left.+\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}}{2i}\right]\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Если теперь сложить равенства (12)–(14) и учесть, что

$$\frac{1}{9}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}\right]=$$
$$=\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\right),$$

получим

$$K(x,y)=\frac{1}{3}\left[k\,(x+y)+k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)+k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\right]=$$
$$=\int\limits_0^1\left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+\frac{1}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\right.$$
$$+\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y-\frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y}-$$
$$-\frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y}-$$
$$\left.-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}y}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho\,(\lambda)=\int\limits_0^1\chi_2(x)\chi_2(y)d\rho(\lambda). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (1) проверяем положительную определенность ядра $K(x,y)$ $(\lambda\geqslant 0)$. Аналогично проверяем положительную определенность ядра $K(x,y)$ для $\lambda<0$. Из (15) следует условие (2). Если в (15) положим $y=0$, получим условие (3). Учитывая условие (6), непосредственно проверяем условие (4),

$$|k(x)|\leqslant\int\limits_{-1}^0\left|\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right|\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda)+$$
$$+\int\limits_0^1\left|\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right|\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}e^{|x|}i+\frac{1}{3}e^{\frac{|x|}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{|x|}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda)+\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}e^{|x|}+\frac{1}{3}e^{\frac{|x|}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{|x|}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant C_1e^{|x|}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}=Ce^{|x|}.$$

Теорема доказана.

Заключение. Нами получено интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, для которых ядро $K(x,y)$ положительно определено. Условия, при которых справедливо данное представление, являются одновременно необходимыми и достаточными.

1. **Крейн М. Г.** Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения / М. Г. Крейн // ДАН СССР. – 1946. – Т. 53, №1. – С. 3–6.
2. **Березанский Ю. М.** Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов / Ю. М. Березанский // ДАН СССР. – 1956. – Т. 108, №3. – С. 893–896.
3. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.