

МАТЕМАТИКА

Mathematical Subject Classification: 26C05, 26D05, 26D10, 30A10
УДК 517.5

А. Н. Адамов

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О КОНСТАНТЕ В НЕРАВЕНСТВЕ СЕГЕ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В L_0

Адамов О. М. Про константу в нерівності Сеге для похідних спряжених тригонометричних поліномів у L_0 . Розглядається нерівність Сеге $\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_0 \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_0$ для похідних спряжених тригонометричних поліномів в L_0 . Отримана точна асимптотика по n для константи $\chi_0(n, r)$ в ньому, поліпшуючи оцінки, раніше отримані В. В. Арестовим та автором.

Ключові слова: нерівність Сеге, похідні тригонометричних поліномів, спряжені тригонометричні поліноми, простір L_0 , асимптотична оцінка константи.

Адамов А. Н. О константе в неравенстве Сеге для производных сопряженных тригонометрических полиномов в L_0 . Рассматривается неравенство Сеге $\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_0 \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_0$ для производных сопряженных тригонометрических полиномов в L_0 . Получена точная асимптотика по n для константы $\chi_0(n, r)$ в нём, улучшая оценки, ранее полученные В. В. Арестовым и автором.

Ключевые слова: неравенство Сеге, производные тригонометрических полиномов, сопряженные тригонометрические полиномы, пространство L_0 , асимптотическая оценка константы.

Adamov A. N. About constant in Szego inequality for derivatives of conjugate trigonometric polynomials in L_0 . We consider Szego inequality $\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_0 \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_0$ for derivatives of conjugate trigonometric polynomials in L_0 . We've found exact asymptotic by n estimation of constant $\chi_0(n, r)$ in it, improving estimates which were got by V. V. Arestov and author earlier.

Key words: Szego inequality, derivatives of trigonometric polynomials, conjugate trigonometric polynomials, L_0 space, asymptotic estimation of constant.

ВВЕДЕНИЕ. Пусть T_n — множество тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$$

порядка n с коэффициентами a_k из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Полином

$$\tilde{T}_n(t) = i \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^n a_{-k} e^{-ikt} \right)$$

называют сопряженным для T_n . Определим функционал $\|f\|_p$ для измеримых функций на отрезке $[0, 2\pi]$ при $-\infty \leq p \leq +\infty$ следующим образом:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \quad -\infty < p < 0, \quad (0.1)$$

$$\|f\|_0 = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(t)| dt \right), \quad (0.2)$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|, \quad \|f\|_{-\infty} = \operatorname{ess\,inf}_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|. \quad (0.3)$$

Класс функций, для которых функционал $\|f\|_p$ конечен, обозначим через $L_p[0, 2\pi]$. В нём при $p \geq 1$ $\|f\|_p$ является нормой, при $0 < p < 1$ — квазинормой. Функционал $\|f\|_0$, следуя К. Малеру [1], будем называть мерой функции f . Для функций, определенных на единичной окружности, положим

$$\|f\|_{L_p} = \|f(e^{it})\|_p. \quad (0.4)$$

В 1912 году С. Н. Бернштейн получил оценку для нормы производной тригонометрического полинома $\|T'_n\|_{C[0, 2\pi]}$ через норму самого полинома $\|T_n\|_{C[0, 2\pi]}$ в $C[0, 2\pi]$, в 1928 году Г. Сеге [2] добавил в эту оценку производные сопряженных тригонометрических полиномов, а А. Зигмунд в 1932 году [3, том 2, гл. 10, 3.16 и 3.25] распространил это соотношение на все L_p , $p \geq 1$:

$$\left\| T_n^{(r)} \cos \alpha + \tilde{T}_n^{(r)} \sin \alpha \right\|_p \leq n^r \|T_n\|_p, \quad T_n \in T_n. \quad (0.5)$$

В своих работах [4, 1981 г.] и [5, 1990 г.] В. В. Арестов разработал методику получения неравенств для полиномов в пространстве L_0 и показал, что для широкого класса неравенств константа, оптимальная при $p = 0$, остаётся верной и для $p > 0$, но, возможно, не является точной. В 1994 году В. В. Арестов [6] доказал неравенство типа Г. Сеге для $r \geq 0$ в пространствах $L_p[0, 2\pi]$, $0 \leq p < 1$:

$$\left\| \tilde{T}_n^{(r)} \right\|_p \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_p, \quad \chi_p(n, r) \leq \chi_0(n, r), \quad p \geq 0, \quad (0.6)$$

где

$$\chi_0(n, r) = \|S_{2n, r}\|_{L_0}, \quad S_{2n, r}(z) = \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^{n+k} \left(z^{n+k} + (-1)^{r+1} z^{n-k} \right), \quad (0.7)$$

и оценил значение коэффициента $\|S_{2n, r}\|_{L_0}$ в зависимости от величины r :

$$\|S_{2n, r}\|_{L_0} = n^r, \quad r \geq n \ln 2n, \quad (0.8)$$

$$\|S_{2n, r}\|_{L_0} \leq 2n^r C_{2n}^{n+1}, \quad \|S_{2n, r}\|_{L_0} = 4^{n+o(n)} \text{ при } 1 \leq r < n \ln 2n \quad (0.9)$$

и

$$\frac{1}{n} C_{2n}^{n+1} \leq \|S_{2n, 0}\|_{L_0} \leq 2C_{2n}^{n+1}. \quad (0.10)$$

Окончательно вопрос об оценке меры $\|S_{2n,r}\|_{L_0}$ при $0 \leq r < n \ln 2n$ в этой статье решён не был.

Встал вопрос о получении точной асимптотики этой величины по n . При $r = 0$ в нашей статье [7] показано, что при $n \geq 50$ (0.10) можно заменить на асимптотически точную оценку

$$\exp\left(-\frac{1.58 + 1.98 \ln n}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\|S_{2n,0}\|_{L_0}}{C_{2n}^{n+1}} \leq \left(1 + \frac{3}{n+2}\right) \exp\left(\frac{0.56}{\sqrt{n}} \left(3 + \ln \frac{n}{2}\right)\right), \quad (0.11)$$

что влечёт за собой соотношение $\|S_{2n,0}\|_{L_0} \sim C_{2n}^{n+1}$.

Остаётся случай $1 \leq r < n \ln 2n$. Тогда (0.9) не даёт точного порядка роста в зависимости от n . В статье [8] нами было получено неравенство, дающее порядковую оценку сверху:

$$\|S_{2n,r}\|_{L_0} \leq D_r C_{2n}^{n+1}, \quad 1 \leq r \leq \frac{n}{2}, \quad (0.12)$$

где D_r зависит только от r .

В настоящей работе основной целью является нахождение для $\|S_{2n,r}\|_{L_0}$ оценки вида (0.11) с аналогичной асимптотикой. В результате для каждого фиксированного $r \geq 1$ было получено:

$$\|S_{2n,r}\|_{L_0} \sim K_r C_{2n}^{n+1}, \quad \text{и} \quad \left| \frac{\|S_{2n,r}\|_{L_0}}{C_{2n}^{n+1}} - K_r \right| \leq \frac{\alpha_r}{n^{\frac{1}{3}}} \ln n. \quad (0.13)$$

Величина K_r зависит только от r и выражается следующим образом:

$$K_r = 2\|Q_r\|_{L_0}, \quad \text{где} \quad Q_r(z) = \sum_{k=0}^r \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j (j+1)^r \right) (z-1)^{r-k}. \quad (0.14)$$

Для первых значений r приведем значения K_r и выражения для $Q_r(z)$:

r	K_r	$Q_r(z)$
1	2	z
2	2	$z^2 + z$
3	$2(2 + \sqrt{3}) \approx 7,483$	$z^3 + 4z^2 + z$
4	$2(5 + \sqrt{24}) \approx 19,798$	$z^4 + 11z^3 + 11z^2 + z$
5	$\approx 107,78$	$z^5 + 26z^4 + 66z^3 + 26z^2 + z$
6	$\approx 465,26$	$z^6 + 57z^5 + 302z^4 + 302z^3 + 57z^2 + z$
7	$\approx 3332,42$	$z^7 + 120z^6 + 1191z^5 + 2416z^4 + 1191z^3 + 120z^2 + z$
8	$\approx 20013,51$	$z^8 + 247z^7 + 4293z^6 + 15619z^5 + 15619z^4 + 4293z^3 + 247z^2 + z$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Определённой трудностью доказательств в пространстве L_0 является отсутствие неравенства треугольника. В пространствах L_p при $0 < p < 1$ верно обобщенное неравенство

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right), \quad (1.1)$$

что позволяет теми же методами, что и при $p \geq 1$, получать оценки с дополнительным коэффициентом, зависящим от p . При $p = 0$ неравенство треугольника в общем случае уже невозможно ни для какой константы. В статье [5] В. В. Арестов изучал поведение константы $\chi(n)$ в неравенстве для полиномов степени n на единичной окружности

$$\|P_n + Q_n\|_{L_0} \leq \chi(n) (\|P_n\|_{L_0} + \|Q_n\|_{L_0}) \quad (1.2)$$

и получил оценку

$$\frac{1}{2}\rho^n \leq \chi(n) \leq \frac{1}{2}R^n, \text{ где } \rho \approx 1,7916 \text{ и } R = \sqrt[6]{40} \approx 1,8493. \quad (1.3)$$

Легко видеть, что $\chi(n)$ очень быстро растет при возрастании n , и использование (1.2) в большинстве случаев даёт лишь грубую оценку. В этом пункте будут получены оценки величины $\|f + g\|_0$ при различных ограничениях на функции f и g . В отличие от (1.1) и (1.2) будем накладывать разные ограничения на слагаемые, что позволит получить более точные оценки в случае неоднородных слагаемых.

Лемма 1. Пусть $0 < \|f\|_0 < +\infty$, $0 < p, q \leq +\infty$, $\|g\|_p < +\infty$, $\|f\|_{-q} > 0$ и $\frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}} \leq 1$. Тогда имеем, полагая $w = \min\left(\frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, 1\right)$,

$$\frac{1}{1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f+g\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)} \leq \frac{\|f+g\|_0}{\|f\|_0} \leq 1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f\|_q^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right). \quad (1.4)$$

Доказательство. Оценим $\frac{\|f+g\|_0}{\|f\|_0}$ через неравенство между метриками L_0 и L_w и применим неравенства $\|1 + \varphi\|_w^w \leq 1 + \|\varphi\|_w^w$ и $(1+t)^{\frac{1}{w}} - 1 \leq \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)t$, $0 \leq t \leq 1$, то что $\left\|\frac{g}{f}\right\|_w^w \leq 1$, покажем позже:

$$\frac{\|f+g\|_0}{\|f\|_0} = \left\|1 + \frac{g}{f}\right\|_0 \leq \left\|1 + \frac{g}{f}\right\|_w \leq 1 + \left\|\frac{g}{f}\right\|_w^w \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right).$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p}{w}$ и $\frac{q}{w}$ при $0 < w < 1$, получим

$$\left\|\frac{g}{f}\right\|_w = \|g^w f^{-w}\|_1 \leq \|g\|_p \cdot \|f^{-1}\|_q = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}}.$$

При $w = 1$ берём показатели p и $p' = \frac{p}{p-1} \leq q$, и имеем

$$\left\|\frac{g}{f}\right\|_1 = \|gf^{-1}\|_1 \leq \|g\|_p \cdot \|f^{-1}\|_{p'} \leq \frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}}.$$

Так как $\frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}} \leq 1$, то отсюда и $\left\|\frac{g}{f}\right\|_w \leq 1$, что делает корректной первую оценку в лемме. Подставляя, получаем левую часть (1.4). Для доказательства оценки снизу применим оценку сверху для частного $\frac{\|(f+g)+(-g)\|_0}{\|f+g\|_0}$. Лемма доказана.

Из леммы 1 получаем 3 следствия:

Следствие 1. Если $\|f\|_{-\infty} > 0$, то $\|f\|_0 - \frac{\|f\|_0}{\|f\|_{-\infty}} \|g\|_{\infty} \leq \|f + g\|_0 \leq \|f\|_0 + \frac{\|f\|_0}{\|f\|_{-\infty}} \|g\|_{\infty}$.

Следствие 2. Если $\|f_n - f\|_{+\infty} \rightarrow 0$ (то есть последовательность f_n равномерно сходится к f), и $\|f\|_{-\infty} > 0$, то $\|f_n\|_0 \rightarrow \|f\|_0$.

Для переноса предельных соотношений в общем случае необходимо дополнительное ограничение на поведение f_n , так как оценка снизу отличается от оценки сверху.

Следствие 3. Пусть $\|f_n - f\|_p = \varepsilon_n \rightarrow 0$, $\|f\|_0 > 0$ и существует неубывающая функция h такая, что $|f_n|_*(t) \geq h(t)$, где под f_* понимаем неубывающую перестановку функции, и $\|h\|_{-q} > 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_0 = \|f\|_0$, причём $\|f_n\|_0 - \|f\|_0 = O(\varepsilon_n^w)$, где $w = \min\left(\frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, 1\right)$.

Доказательство. Положим $g_n = f_n - f$ и применим лемму 1:

$$\frac{1}{1 + \frac{\|g_n\|_p^w}{\|h\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)} \leq \frac{1}{1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f_n\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)} \leq \frac{\|f_n\|_0}{\|f\|_0} \leq 1 + \frac{\|g_n\|_p^w}{\|f\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right).$$

Из этого соотношения и следует необходимая предельная оценка.

Таким образом, хотя в L_0 нельзя получить сразу сходимость норм из сходимости по норме, но при повышении порядка суммируемости (величины $\left\|\frac{f_n}{f}\right\|_0$) до w получаем скорость сходимости, аналогичную пространству L_w .

В лемме 1 требуется, чтобы $\|f\|_{-q} > 0$. Для многих простых функций (например t^α) нельзя указать точного показателя суммируемости q , и соответственно w не будет наилучшим указателем скорости приближения. Рассмотрим эти граничные случаи отдельно, для удобства записи сразу в предельной форме.

Лемма 2. Пусть $0 < \|f\|_0 < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $\|f_n - f\|_p = \varepsilon_n \rightarrow 0$, и $|f|_*(t) \sim Ct^\alpha$ при $t \rightarrow 0$, $\frac{1}{p} + \alpha \geq 1$. Тогда имеем, полагая $w = \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha}$,

$$\|f_n\|_0 - \|f\|_0 \leq C_f \varepsilon_n^w \ln^{\alpha w} \frac{1}{\varepsilon_n}. \quad (1.5)$$

Если дополнительно выполняется $|f_n|_*(t) \geq h(t)$, где $h(t) \sim Mt^\beta$, то

$$\|f_n\|_0 - \|f\|_0 \geq -C_f \varepsilon_n^w \ln \frac{1}{\varepsilon_n}. \quad (1.6)$$

Величины C_f не зависят от n .

Доказательство. Положим для $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon(t) = \max(f(t), \varepsilon)$ и обозначим $g = f_n - f$. Тогда

$$\frac{\|f_n\|_0}{\|f\|_0} = \frac{\|f + g\|_0}{\|f\|_0} = \left\| \frac{f}{f_\varepsilon} + \frac{g}{f_\varepsilon} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0 \leq \left\| 1 + \frac{g}{f_\varepsilon} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0.$$

Оценим каждый множитель отдельно. Для первого множителя воспользуемся леммой 1 с показателями p и $q = \frac{1}{\alpha}$:

$$\left\| 1 + \frac{g}{f_\varepsilon} \right\|_0 \leq 1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f_\varepsilon\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1 \right).$$

Для $\left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0$ и $\|f_\varepsilon\|_{-q}$ сначала рассмотрим случай $|f|_*(t) = Ct^\alpha$. Тогда, полагая $t_0 = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^q$, имеем $\left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \ln\left(\frac{Ct^\alpha}{\varepsilon}\right) dt\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^q\right)$, и

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{-q} &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\varepsilon^{-q}(t) dt\right)^{-\alpha} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} (Ct^\alpha)^{-q} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{2\pi} (Ct^\alpha)^{-q} dt\right)^{-\alpha} = \\ &= C\left(\frac{1}{2\pi} (1 + \ln(2\pi) - \ln(t_0))\right)^{-\alpha} \sim C_f \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда делаем вывод, что для $|f|_*(t) \sim Ct^\alpha$ верно $1 \leq \left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0 \leq 1 + C_f \varepsilon^q$ и $\|f_\varepsilon\|_{-q} \sim C_f \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\alpha}$, где C_f — некоторые величины, не зависящие от ε . Тогда

$$\frac{\|f_n\|_0}{\|f\|_0} \leq \left(1 + C_f \varepsilon^q \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{qw} \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)\right) \cdot (1 + C_f \varepsilon^q). \quad (1.7)$$

Теперь выберем ε , чтоб оценка в (1.7) была оптимальной. Для этого надо сделать отлечения от 1 в двух множителях примерно одинаковыми. Полагая $\varepsilon = (\varepsilon_n)^{\frac{w}{q}}$, получим оценку сверху в (1.5). Для оценки снизу из (1.7) аналогично положим $\tilde{f}_\varepsilon(t) = \max(f_n(t), \varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{f}_\varepsilon\|_0}{\|f_n\|_0} &= \left\| \frac{f_n}{\tilde{f}_\varepsilon} - \frac{g}{\tilde{f}_\varepsilon} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 \leq \left\| 1 + \frac{g}{\tilde{f}_\varepsilon} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)\right) \cdot \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0. \end{aligned}$$

Оценки для $\left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0$ и $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{-q}$ также будут схожими, для $h(t) = Mt^\beta$ имеем:

$$\left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \ln\left(\frac{Mt^\beta}{\varepsilon}\right) dt\right) = \exp\left(\frac{t_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) - \frac{\beta t_0}{2\pi} (\ln t_0 - 1)\right)$$

и, следовательно, в общем случае $1 \leq \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 \leq 1 + C_f \varepsilon^q \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Схожим образом получаем $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{-q} \sim C_f \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\alpha}$. Остальные рассуждения не отличаются от случая оценки сверху, только меняется в итоге степень у логарифма. Лемма доказана.

Заметим, что из (0.4) следует, что возможно применять леммы 1 и 2 и на единичной окружности.

Нашей целью является получение асимптотической оценки константы $\|S_{2n,r}\|_0$ в неравенстве Сеге в L_0 (Арестов, [6]):

$$\left\| \tilde{T}_n^{(r)} \right\|_{L_0} \leq \|S_{2n,r}\|_0 \cdot \|T_n\|_{L_0},$$

где

$$S_{2n,r}(z) = \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^{n+k} \left(z^{n+k} + (-1)^{r+1} z^{n-k} \right). \quad (1.8)$$

Теорема. Для $\|S_{2n,r}\|_0$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\left| \frac{\|S_{2n,r}\|_{L_0}}{C_{2n}^{n+1}} - K_r \right| \leq \frac{\alpha_r}{n^{\frac{1}{3}}} \ln n, \quad K_r = 2\|Q_r\|_{L_0},$$

$$\text{где } Q_r(z) = \sum_{k=0}^r \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (j+1)^r \right) (z-1)^{r-k}, \quad \alpha_r \text{ не зависит от } n.$$

Доказательство. Сначала докажем вспомогательное равенство. Пусть a_k , $1 \leq k \leq n$ — некоторая последовательность; как обычно, обозначим

$$\Delta^0 a_k = a_k \text{ и } \Delta^m a_k = \Delta^{m-1} a_k - \Delta^{m-1} a_{k+1} = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j a_{k+j},$$

где $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$. Пусть $W_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k (z^{n+k} \pm z^{n-k})$. Тогда для любого $0 \leq m \leq n-1$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} (z-1)^m W_n(z) &= - \sum_{k=0}^{m-1} \Delta^k a_k \left(z^{n+k+1} \pm (-1)^{k+m-1} z^n \right) (z-1)^{m-1-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \Delta^m a_k \left(z^{n+k+m} \mp z^{n-k} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Этот факт легко следует по индукции из преобразования Абеля. В лемме 4 статьи [8] доказано, что для последовательности $a_k = k^r C_{2n}^{n+k}$ справедливо неравенство

$$|\Delta^{r+4} a_k| \leq C_r \frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2}, \quad (1.10)$$

где C_r — некоторая величина. Применим к $S_{2n,r}(z)$ (1.9) с $m = r+4$ и выделим отдельно коэффициент C_{2n}^{n+1} . Так как очевидно $\left| \frac{C_{2n}^{n+j} - C_{2n}^{n+1}}{C_{2n}^{n+1}} \right| \leq \frac{B_j}{n}$, то на

единичной окружности имеем, учитывая, что $\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (j+1)^r = 0$ при $k > r$:

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{r+3} \Delta^k a_k \left(z^{n+k+1} + (-1)^{k+r} z^n \right) (z-1)^{r+3-k}}{C_{2n}^{n+1}} - 2z^n (z-1)^3 Q_r(z) \right| \leq \frac{C_r}{n}.$$

Для второго слагаемого

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n \Delta^{r+4} a_k (z^{n+k+r+4} - z^{n-k})}{C_{2n}^{n+1}} \right| \leq 2 \sum_{k=1}^n |\Delta^{r+4} a_k| \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{C_r}{n^2} = \frac{2C_r}{n}.$$

Итого

$$\left| \frac{S_{2n,r}(z)(z-1)^{r+4}}{z^n C_{2n}^{n+1}} + 2(z-1)^3 Q_r(z) \right| \leq \frac{C_r}{n}, \quad |z| = 1, \quad (1.11)$$

где

$$Q_r(z) = \sum_{k=0}^r \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j (j+1)^r \right) (z-1)^{r-k}. \quad (1.12)$$

Таким образом, можно применить лемму 2 на единичной окружности. В качестве предельной функции f берём $2(z-1)^3 Q_r(z)$. Так как оценка (1.11) равномерная, то $p = +\infty$. Так как все нули полинома Q_r являются действительными отрицательными числами, то на единичной окружности у f есть только ноль 3-й кратности в точке $z = 1$, поэтому для перестановки имеем оценку $f^* \geq C_r t^3$, так что $q = \frac{1}{3}$ и $w = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{3}$. Из представления (1.11) следует, что при доста-

точно больших n у $S_{2n,r}(z)(z-1)^{r+4}$ также не может быть нулей на единичной окружности вдали от $z = \pm 1$, и характеристики перестановки зависят как раз от поведения функции в окрестности точки $z = 1$. Так как

$$S_{2n,r}(1) = \begin{cases} 0, & r = 2k \\ 2 \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^{n+k}, & r = 2k+1, \end{cases}$$

то при нечётных r можно взять $h(t) = C_r t^{r+4}$, а при четных r , исходя из соотношения $\frac{S_{2n,r}(z)}{z-1} \rightarrow S'_{2n,r}(1) = S_{2n,r+1}(1)$, $h(t) = C_r t^{r+5}$. Это позволяет получить двустороннюю оценку. Из (1.11) $\varepsilon_n \leq \frac{C_r}{n}$. Подставляя все параметры в (1.5) и (1.6), имеем

$$\left| \left\| \frac{S_{2n,r}(z)(z-1)^{r+4}}{z^n C_{2n}^{n+1}} \right\|_{L_0} - \left\| 2(z-1)^3 Q_r(z) \right\|_{L_0} \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Из этого и следует (0.13). Утверждение доказано.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В этой статье получена точная асимптотика для константы в неравенстве Сеге в L_0 , что закрывает вопрос о порядковых оценках. Также методы, применённые в этой работе, могут использоваться для дальнейших теоретических исследований в пространстве L_0 .

1. **Mahler K.** On the zeros of the derivative of a polynomial / K. Mahler // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. – 1961. – Vol. 264, No. 1317. – P. 145–154.

-
2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1965.
 3. **Szego G.** Uber einen satz des Herrn Serge Bernstein / G. Szego // Schrift. Konigsberg. Gelehrten Gesellschaft. – 1928. – V. 5, № 4. – P. 59–70.
 4. **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных / В. В. Арестов // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1981. – Т. 45. – С. 3–22.
 5. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности / В. В. Арестов // Мат. зам. – 1990. – Т. 48, вып. 4, октябрь. – С. 7–18.
 6. **Арестов В. В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 / В. В. Арестов // Мат. зам. – 1994. – Т. 56, вып. 6, декабрь. – С. 10–26.
 7. **Адамов А. Н.** О сопряженных тригонометрических полиномах в L_0 / А. Н. Адамов // Вісник Донецького національного університету, сер. А: природничі науки. – 2011. – Вип. 2. – С. 7–14.
 8. **Адамов А. Н.** О производных сопряженных тригонометрических полиномов в L_0 / А. Н. Адамов // Математичні студії. – Т. 37, № 2. – 2012. – С. 147–154.