Mathematical Subject Classification: 49L20, 49K30, 93B12, 93B50, 90C30, 90C52
УДК 517.977.58+517.977.54+519.853.6

Є. М. Страхов, А. Т. Яровий
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ОДИН ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ СТРУКТУРНО–ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Страхов Є. М., Яровий А. Т. Один двокроковий метод для задач структурно-параметричної оптимізації лінійних систем керування. У статті розглядається застосування двокрокового методу мінімізації функцій багатьох змінних у задачах структурно-параметричної оптимізації лінійних систем керування з фіксованими і нефіксованими точками перемикання.
Ключові слова: лінійна система керування, структурно-параметрична оптимізація, нелінійне програмування, двокроковий метод.

Страхов Е. М., Яровой А. Т. Один двухшаговый метод для задач структурно-параметрической оптимизации линейных систем управления. В статье рассматривается применение двухшагового метода минимизации функций многих переменных в задачах структурно-параметрической оптимизации линейных систем управления с фиксированными и нефиксированными точками переключения.
Ключевые слова: линейная система управления, структурно-параметрическая оптимизация, нелинейное программирование, двухшаговый метод.

Strakhov E. M., Yarovoy A. T. On a two-step algorithm in structural and parametric optimization problems of linear control systems. This paper deals with applying of a two-step optimization algorithm for structural and parametric optimization problems of linear control systems with fixed and floating switching points.
Key words: linear control system, structural and parametric optimization, nonlinear programming, two-step algorithm.

Вступ. У математичних моделях складних технічних систем функції керування, як правило, мають структурно-параметричну форму. Це означає, що на певних відрізках часу керування задається за допомогою функцій, які залежать від часової змінної та параметрів. Таким чином, виникає задача знаходження оптимальних режимів системи у структурно-параметричних класах.

Одним з можливих підходів до розв'язування задач структурно-параметричної оптимізації систем керування є застосування варіаційного методу. За його допомогою будуються ітераційні процедури типу градієнтного спуску за обраними параметрами або точками перемикання. Результати у цьому напряму, зокрема, одержані в праці [3]. Однак ці методи алгоритмічно є досить складними, і їх застосування на практиці викликає певні труднощі.

Застосування принципу оптимальності та методу динамічного програмування Беллмана до задачі вибору оптимальної структури обґрунтовано у роботах [1, 2]. В них отримані рівняння Беллмана у інтегральній та диференціальній формах. Випадок структур керування, що містять фазову змінну, розглянутий у статті [5]. Застосування методу динамічного програмування для систем з нефіксованою структурою висвітлене у [8]. В [6] одержані достатні умови оптимальності для задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання, в якій структура керування містить фазову змінну. Ці теоретичні результати дають можливість розробляти чисельні алгоритми структурно-параметричної оптимізації для задач з фіксованою і нефіксованою структурами за допомогою рівнянь Беллмана.

В даній статті розглядається застосування двокрокової ітераційної процедури мінімізації функцій багатьох змінних [7] для оптимізації параметрів лінійної системи керування з фіксованими точками перемикання. Також запропоновано емпіричний алгоритм оптимізації параметрів і точок перемикання в лінійній системі з нефіксованою структурою.

Основні результати

1. Двокроковий метод мінімізації функцій. На сучасному етапі розвитку науки вже розроблено та досліджено багато підходів до розв'язку задач нелінійного програмування, одним з яких є методи спуску. Загальний принцип цих методів полягає у побудові послідовних напрямків спуску (тобто зменшення значень функції), виходячи з певної початкової точки (початкового наближення). Різні класи методів спуску визначаються, в першу чергу, способами побудови напрямків спуску.

Розрізняють методи нульового (при обчисленнях використовуються тільки значення функції в точках простору), першого (крім значень функції, обчислюється її перша похідна), другого (використовується друга похідна) порядків. Також методи поділяють на однокрокові та багатокрокові. Однокрокові алгоритми на (k+1)-й ітерації враховують лише ті значення функції та її похідних, які були отримані на попередньому кроці. Багатокрокові алгоритми використовують додатково інформацію, отриману на більш ранніх етапах процесу оптимізації. За рахунок цього вони є більш ефективними порівняно з однокроковими. Класичним двокроковим методом першого порядку є метод спряжених градієнтів.

Розглянемо задачу нелінійного програмування

$$f(x) \to \min,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Для її розв'язання пропонується двокроковий метод [7]

$$\begin{gathered} x_{k+1} = x_k + \beta_k s_k,\ k = 0, 1, \dots, \\ s_0 = -f'(x_0),\ s_k = -H_k f'(x_k) + \xi_k s_{k-1}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

де $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ – послідовні наближення, $s_0, s_1, \dots, s_k, \dots$ – напрямки спуску, β_k та ξ_k – числові параметри. Матриці H_k будемо перераховувати рекурентним способом за алгоритмом Девідона–Флетчера–Пауелла

$$H_k = H_{k-1} + \frac{r_{k-1}\, r_{k-1}^T}{\langle r_{k-1},\, e_{k-1}\rangle} - \frac{H_{k-1}\, e_{k-1}\, e_{k-1}^T\, H_{k-1}}{\left\langle H_{k-1}^T\, e_{k-1},\, e_{k-1}\right\rangle}, \tag{1.3}$$

де $r_k = x_{k+1} - x_k$, $e_k = f'(x_{k+1}) - f'(x_k)$. У якості H_0 можна взяти довільну симетричну додатно означену матрицю, наприклад, одиничну. Через певну кількість кроків проводиться операція відновлення матриці, тобто покладаємо $H_{k+1} = H_0$.

На практиці рекомендується здійснювати відновлення через кожні n кроків, де n – вимірність простору.

Існує декілька способів обчислення параметру ξ_k. Скористаємося формулою для яристого методу спряжених градієнтів [4]

$$\xi_k = \frac{(f'(x_k) - f'(x_{k-1}), f'(x_{k-1}))}{(s_{k-1}, f'(x_{k-1}))}. \tag{1.4}$$

Опишемо алгоритм обчислення параметру β_k. Нехай $\beta_0 = 1$. На k-му кроці спочатку покладаємо $\beta_k = \beta_{k-1}$. Якщо при цьому $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, то або переходимо до наступної ітерації, або покладаємо $\beta_k = 2\beta_{k-1}$. Якщо значення $f(x)$ менше за попереднє, то процес подвоєння продовжуємо до тих пір, поки спадання не припиниться. Якщо ж $f(x_{k+1}) \geqslant f(x_k)$, то покладаємо $\beta_k = 0{,}5\beta_{k-1}$. Якщо $f(x_k + 0{,}5\beta_{k-1}s_k) < f(x_k)$, то переходимо до наступної ітерації. Якщо ж $f(x_k + 0{,}5\beta_{k-1}s_k) \geqslant f(x_k)$, то покладаємо $\beta_k = 0{,}25\beta_{k-1}$ і т. д. Метод описаний.

Означення 1. *Вектори $s_0, \ldots, s_{n-1}$ називаються A-ортогональними (спряженими), якщо вони задовольняють умовам*

$$(s_i, As_j) = 0,\ i \neq j.$$

Теорема 1. [7] *Напрямки спуску, визначені за схемою (1.2)–(1.4), є спряженими для квадратичної функції вигляду*

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c,$$

де A – симетрична додатно означена матриця розмірності $n \times n$ з постійними елементами, b – вектор, c – скаляр.

Теорема 2. [7] *Нехай для мінімізації сильно опуклої двічі диференційованої функції $f(x)$, яка задовольняє умовам*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : m\|y\|^2 \leqslant (f''(x)y, y) \leqslant M\|y\|^2,\ m > 0,$$

використовується процес (1.2), в якому побудова матриці H_k здійснюється за методом (1.3), причому через n кроків здійснюється відновлення H_k. Тоді якщо значення β_k визначається з умови мінімуму функції у напрямку s_k, то послідовність $\{x_k\}$ незалежно від вибору початкової точки x_0 збігається до розв'язку зі зверхлінійною швидкістю.

Результати чисельних експериментів на тестових функціях вказують на те, що двокроковий алгоритм (1.2)–(1.4) дає краще наближення до точки мінімуму при меншій кількості ітерацій порівняно із класичним методом спряжених градієнтів [7].

2. Структурно-параметрична оптимізація лінійних систем керування з фіксованими точками перемикання. Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = A\,(t)\ x\,(t) + C(t)\,u\,(t)\,, \tag{2.1}$$

$$x\,(t_0) = x_0.$$

Тут x – вектор фазових координат розмірності n, u – вектор керування розмірності m, $A(t)$, $C(t)$ – матриці з неперервними компонентами.

Нехай керування в системі (2.1) задане у вигляді

$$u\left(t\right)=R\left(b_{i}\right)\,x\left(t\right),\,t\in\left[t_{i},\,t_{i+1}\right),\,i=0,\,\ldots,N-1, \tag{2.2}$$

де $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ – фіксовані точки перемикання, b_i – невідомі числові параметри, $R\left(b_i\right)$ – матриця розмірності $m \times n$, елементи якої є неперервно диференційованими за параметрами b_i. Розглянемо випадок $b_i \in \mathbb{R}^{k_i}$. Задача полягає в мінімізації критерію якості

$$J\left(x,\,u\right)=\left\langle P_{0}\,x\left(T\right),\,x\left(T\right)\right\rangle, \tag{2.3}$$

де P_0 – невід'ємно означена симетрична матриця.

Маємо задачу оптимізації параметрів системи (2.1)–(2.2) при фіксованих точках перемикання. У [5] обґрунтований принцип оптимальності Беллмана для такої задачі, отримане інтегро-диференціальне рівняння Беллмана.

Функція Беллмана шукається у вигляді квадратичної форми

$$B\left(z,\,t\right)=\left\langle P\left(t\right)\,z,\,z\right\rangle,$$

де $P\left(t\right)$ – невідома матриця розмірності $n \times n$ з неперервно диференційованими компонентами. При цьому

$$\frac{\partial B\left(z,\,\tau\right)}{\partial\tau}=\left\langle\frac{dP\left(\tau\right)}{d\tau}\,z,\,z\right\rangle,\,grad_{z}B\left(z,\,\tau\right)=\left(P\left(\tau\right)+P^{T}\left(\tau\right)\right)\,z.$$

З означення функції Беллмана випливає, що $P\left(T\right) = P_0$. Тоді інтегро-диференціальне рівняння Беллмана для задачі (2.1)–(2.3) на відрізку $t \in [t_s, t_{s+1}]$ має вигляд

$$\inf_{b_s}\left\{\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\left\langle\frac{dP\left(\tau\right)}{d\tau}\,x\left(\tau\right),\,x\left(\tau\right)\right\rangle+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left\langle\left(P\left(\tau\right)+P^{T}\left(\tau\right)\right)\,x\left(\tau\right),\,A\left(\tau\right)\,x\left(\tau\right)+C\left(\tau\right)\,R\left(b_{s}\right)\,x\left(\tau\right)\right\rangle\right]\,d\tau\right\}=0.$$

Зробивши перетворення та згрупувавши подібні члени, отримаємо рівняння

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left\langle\left(\frac{dP\left(\tau\right)}{d\tau}+A^{T}\left(\tau\right)\,P\left(\tau\right)+P\left(\tau\right)\,A\left(\tau\right)\right)\,x\left(\tau\right),\,x\left(\tau\right)\right\rangle\,d\tau+$$
$$+\inf_{b_s}\left\{\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left\langle\left(R^{T}\left(b_{s}\right)C^{T}\left(\tau\right)P\left(\tau\right)+P\left(\tau\right)C\left(\tau\right)R\left(b_{s}\right)\right)x\left(\tau\right),x\left(\tau\right)\right\rangle d\tau\right\}=0.$$

Позначимо

$$I_{s}=\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left\langle\left(R^{T}\left(b_{s}\right)C^{T}\left(\tau\right)P\left(\tau\right)+P\left(\tau\right)C\left(\tau\right)R\left(b_{s}\right)\right)x\left(\tau\right),x\left(\tau\right)\right\rangle d\tau,$$

$$Q_{s}\left(t,\,b_{s}\right)=R^{T}\left(b_{s}\right)C^{T}\left(\tau\right)P\left(\tau\right)+P\left(\tau\right)C\left(\tau\right)R\left(b_{s}\right),\,s=0,1,\ldots,N-1.$$

Тоді

$$\frac{dI_{s}}{db_{s}}=\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\left\langle\frac{\partial Q_{s}\left(\tau,\,b_{s}\right)}{\partial b_{s}}\,x\left(\tau\right),\,x\left(\tau\right)\right\rangle+\right.$$

$$+\left\langle \left(Q_s\left(\tau,\, b_s\right) + Q_s^T\left(\tau,\, b_s\right)\right)\, \frac{\partial x\left(\tau\right)}{\partial b_s},\, x\left(\tau\right)\right\rangle \Bigg]\, d\tau\,, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial Q_s\left(t,\, b_s\right)}{\partial b_s} = \frac{\partial R^T\left(b_s\right)}{\partial b_s} C^T\left(\tau\right) P\left(t\right) + P\left(t\right) C\left(\tau\right) \frac{\partial R\left(b_s\right)}{\partial b_s}\,. \tag{2.5}$$

Перепишемо систему (2.1) з урахуванням структури керування. Ця система на відрізку $t \in [t_s, t_{s+1}]$ еквівалентна інтегральному рівнянню

$$x\left(t\right) = x\left(t_s\right) + \int_{t_s}^{t} \left(A\left(\tau\right) + C\left(\tau\right) R\left(b_s\right)\right)\, x\left(\tau\right)\, d\tau.$$

Тоді

$$\frac{\partial x\left(t\right)}{\partial b_s} = \int_{t_s}^{t} C\left(\tau\right) \left[\frac{\partial R\left(b_s\right)}{\partial b_s}\, x\left(\tau\right) + R\left(b_s\right)\, \frac{\partial x\left(\tau\right)}{\partial b_s}\right] d\tau.$$

Позначимо $U_s\left(t\right) = \frac{\partial x(t)}{\partial b_s}$, $f\left(t\right) = \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s}\, x\left(t\right)$. Таким способом, з останнього співвідношення отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dU_s\left(t\right)}{dt} = C(t) R\left(b_s\right)\, U_s\left(t\right) + C(t) f\left(t\right),\, U_s\left(t_s\right) = 0. \tag{2.6}$$

Отже, маємо наступний алгоритм знаходження оптимальних значень параметрів $b_s\, (s = 0, 1, \ldots, N-1)$ у задачі (2.1)–(2.3).

1. Задаємо початкові наближення векторів параметрів $b_s^{(0)}$ на кожному з інтервалів $[t_s,\, t_{s+1})$, $s = 0, 1, \ldots, N-1$.
2. Обчислюємо $R\left(b_s^{(0)}\right)$ та $\frac{\partial R}{\partial b_s}\left(b_s^{(0)}\right)$.
3. Розв'язуємо систему

   $$\frac{dx\left(t\right)}{dt} = \left(A\left(t\right) + C(t) R\left(b_s^{(0)}\right)\right)\, x\left(t\right),\, x\left(t_0\right) = x_0$$

   та знаходимо траєкторію $x\left(t,\, b_s^{(0)}\right)$.
4. Обчислюємо $f\left(t\right) = \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s}\, x\left(t\right)$ при початковому наближенні $b_s^{(0)}$. Далі, на кожному часовому інтервалі $(t_s,\, t_{s+1})$, $s = 0, 1, \ldots, N-1$ розв'язуємо систему (2.6) та знаходимо $U_s\left(t\right) = \frac{\partial x(t)}{\partial b_s}$ при $b_s = b_s^{(0)}$.
5. Записуємо систему для визначення невідомої матриці $P\left(t\right)$.

   $$\frac{dP\left(t\right)}{dt} = -\left[\left(A\left(t\right) + C(t) R\left(b_s\right)\right)^T P\left(t\right) + P\left(t\right)\, \left(A\left(t\right) + C(t) R\left(b_s\right)\right)\right],$$

   $$P\left(T\right) = P_0.$$

   Розв'язавши цю систему при $b_s = b_s^{(0)}$ для $s = 0, 1, \ldots, N-1$, отримуємо матрицю $P\left(t\right)$.
6. Підставляємо отримані величини у співвідношення (2.4) та (2.5) та знаходимо $\frac{dI_s}{db_s}$ при $b_s = b_s^{(0)}$, $s = 0, 1, \ldots, N-1$.

7. На кожному з інтервалів $t \in [t_s, t_{s+1}]$ скористаємося двокроковою ітераційною процедурою (1.2)–(1.3) для визначення набору параметрів b_s^*, що доставляють мінімум інтегралу I_s. Маємо

$$b_s^{(k+1)} = b_s^{(k)} + \beta_k\, s^{(k)}, k = 0, 1, \ldots, \tag{2.7}$$

$$s^{(0)} = -\frac{dI_s}{db_s^{(0)}},\ s^{(k)} = -H_k \frac{dI_s}{db_s^{(k)}} + \xi_k s^{(k-1)}, \tag{2.8}$$

де параметр ξ_k визначається за формулою (1.4).

8. Після визначення оптимального набору параметрів b_i^* за допомогою процедури (2.7)–(2.8) підставляємо цей набір у систему (2.1):

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = (A\,(t) + C(t)R\,(b_s^*))\ x\,(t)\,,\ x\,(t_0) = x_0.$$

Розв'язуємо цю систему та знаходимо оптимальну траєкторію $x^*\,(t)$.

9. Знаходимо оптимальне керування $u^*(t) = R\,(b_s^*)\,x^*(t)$ для кожного $s = 0, 1, \ldots, N-1$.

Опис алгоритму завершено.

3. Структурно-параметрична оптимізація лінійних систем керування з нефіксованою структурою. Розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{gathered} J(x,u) = \int\limits_{t_0}^{T} \left(\langle D(\tau)x(\tau), x(\tau)\rangle + \langle E(\tau)u(\tau), u(\tau)\rangle\right) d\tau + \\ + \langle P_0 x(T), x(T)\rangle \to \inf \end{gathered} \tag{3.1}$$

за умов

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t), \tag{3.2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{3.3}$$

Керування $u(\cdot)$ має вигляд

$$u(t) = u_j,\ t \in [t_j, t_{j+1})\,, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \tag{3.4}$$

Тут $D(\tau), P_0$ – невід'ємно означені симетричні матриці, $E(\tau)$ – додатно означена симетрична матриця, $A(t)$, $C(t)$ – матриці з неперервними компонентами. Вектори u_j є невідомими, точки перемикання $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$ – нефіксованими. Задача структурно-параметричної оптимізації полягає у знаходженні точок перемикання та параметрів u_j так, щоб керування з класу (3.4) доставляло мінімум функціоналу (3.1) за умов (3.2), (3.3). У [8] обґрунтована можливість застосування методу динамічного програмування для такої задачі, отримане диференціальне рівняння Гамільтона—Якобі—Беллмана.

Функцію Беллмана будемо шукати у вигляді квадратичної форми

$$B(z,t) = \langle P(t)z, z\rangle, \tag{3.5}$$

де $P(t)$ – невідома матриця розмірності $n \times n$ з абсолютно неперервними компонентами.

Диференціальне рівняння Гамільтона—Якобі—Беллмана для задачі (3.1)–(3.4) матиме вигляд

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} z, z \right\rangle + \left\langle A^T(t)P(t)z, z\right\rangle + \langle P(t)A(t)z, z\rangle + \langle D(t)z, z\rangle +$$

$$+ \inf_{u_i} \left\{ \left\langle (P(t) + P^T(t))z, C(t)u_i \right\rangle + \langle E(t)u_i, u_i\rangle \right\} = 0.$$

Матрицю $P(t)$ будемо вибирати так, щоб

$$\frac{dP(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -D(t). \tag{3.6}$$

З граничної умови $B(z, T) = \langle P_0\, z, z\rangle$ та вигляду функції Беллмана (3.5) випливає, що

$$P(T) = P_0. \tag{3.7}$$

Враховуючи симетричність матриць $D(t)$ та P_0, з рівняння (3.6) та умови (3.7) випливає, що матриця $P(t)$ є симетричною. Тоді рівняння Гамільтона—Якобі—Беллмана запишеться у вигляді

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} z, z \right\rangle + \left\langle A^T(t)P(t)z, z\right\rangle + \langle P(t)A(t)z, z\rangle + \langle D(t)z, z\rangle +$$

$$+ \inf_{u_i} \{2 \cdot \langle P(t)z, C(t)u_i\rangle + \langle E(t)u_i, u_i\rangle\} = 0.$$

Позначимо

$$I(t, u_i) = 2 \cdot \langle P(t)z, C(t)u_i\rangle + \langle E(t)u_i, u_i\rangle .$$

Зафіксуємо деякий набір параметрів $\{u_j^{(0)}\}$ та точок перемикання $\{t_j^{(0)}\}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Розглянемо варіацію величини $I(t)$ за довільною фіксованою точкою перемикання $t_k^{(0)}$. Нехай $h > 0$. Тоді при $\alpha > 0$ варіація керування має вигляд

$$u(t, \alpha, h) = \begin{cases} u_j^{(0)}, & t \in [t_j^{(0)}, t_{j+1}^{(0)}), j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, \\ u_{k-1}^{(0)}, & t \in [t_k^{(0)}, t_k^{(0)} + \alpha h), \\ u_k^{(0)}, & t \in [t_k^{(0)} + \alpha h, t_{k+1}^{(0)}), \\ u_j^{(0)}, & t \in [t_j^{(0)}, t_{j+1}^{(0)}), j \in \{k+1, \ldots, N-1\}. \end{cases}$$

В результаті у точці $t_k^{(0)}$ керування змінилося з $u_k^{(0)}$ на $u_{k-1}^{(0)}$. Знайдемо різницю

$$\Delta I = I(t_k^{(0)}, u_{k-1}^{(0)}) - I(t_k^{(0)}, u_k^{(0)}) =$$

$$= 2 \cdot \left\langle C^T(t)P(t)x(t_k^{(0)}), u_{k-1}^{(0)} \right\rangle - 2 \cdot \left\langle C^T(t)P(t)x(t_k^{(0)}), u_k^{(0)} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle E(t)u_{k-1}^{(0)}, u_{k-1}^{(0)} \right\rangle - \left\langle E(t)u_k^{(0)}, u_k^{(0)} \right\rangle =$$

$$= 2 \cdot \left\langle C^T(t)P(t)x(t_k^{(0)}), u_{k-1}^{(0)} - u_k^{(0)} \right\rangle + \left\langle E(t)u_{k-1}^{(0)}, u_{k-1}^{(0)} \right\rangle - \left\langle E(t)u_k^{(0)}, u_k^{(0)} \right\rangle .$$

Якщо $\Delta I < 0$, тобто $I(t_k^{(0)}, u_{k-1}^{(0)}) < I(t_k^{(0)}, u_k^{(0)})$, то відбувається релаксація. Отже, замість точки $t_k^{(0)}$ візьмемо $t_k^{(1)} = t_k^{(0)} + \alpha h$. Відповідно, у випадку $\Delta I \geqslant 0$ покладемо $t_k^{(1)} = t_k^{(0)}$. Таким чином, послідовно варіюючи точки зміни структури від $t_1^{(0)}$ до $t_{N-1}^{(0)}$, отримаємо новий набір точок $\{t_j^{(1)}\}, j = 1, \ldots, N-1$. Для цього набору можемо визначити оптимальні параметри, використовуючи двокроковий метод (1.2)–(1.3) на кожному з інтервалів (див. алгоритм для задачі з фіксованими точками перемикання). Для нового набору параметрів знову варіюємо точки перемикання і т. д. Процес можна продовжувати до тих пір, поки значення величини $I(t, u)$ зменшується.

Висновки. У статті запропоновано два алгоритми побудови оптимального керування у структурно-параметричній формі для лінійних систем керування з фіксованими і нефіксованими точками перемикання. Для визначення оптимальних параметрів застосовується двокроковий метод мінімізації функцій першого порядку, який є більш ефективним за класичні методи, такі як метод спряжених градієнтів.

1. **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація / Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. **Башняков О. М.** Задача синтезу в теорії керування / О. М. Башняков, В. В. Пічкур. – К.: Сталь, 2012. – 116 с.
3. **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
4. **Ларичев О. И.** Методы поиска локального экстремума овражных функций / О. И. Ларичев, Г. Г. Горвиц. – М.: Наука, 1989. – 95 с.
5. **Пічкур В. В.** Застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2010. – Т. 15. Вип. 19. – С. 94–102.
6. **Пічкур В. В.** Достатні умови оптимальності в задачі структурно-параметричної оптимізації / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – № 1 (20). – С. 77–87.
7. **Страхов Є. М.** Дослідження збіжності багатокрокового методу / Є. М. Страхов, А. Т. Яровий // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2009. – Т. 14. Вип. 20. – С. 123–134.
8. **Strakhov E. M.** Dynamic Programming in Structural and Parametric Optimization / E. M. Strakhov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 82, no. 3. – P. 503–512.