Mathematical Subject Classification: 15A24, 34B15, 34C25
УДК 517.9

С. М. Чуйко
Славянский государственный педагогический университет

О РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА

Чуйко С. М. Про розв'язки матричного рівняння Сільвестра. Матричні рівняння Ляпунова, а також їх узагальнення — матричні рівняння Сильвестра широко використовуються в теорії стійкості руху, а також при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккаті і Бернуллі. Якщо структура загального рішення однорідної частини рівняння Ляпунова добре вивчена, то розв'язання неоднорідного рівняння Сильвестра і, зокрема, рівняння Ляпунова досить громіздке. У статті запропоновані умови розв'язності, а також схема побудови часткового розв'язку неоднорідного рівняння типу Ляпунова на основі псевдообернення оператора, породжуваного однорідною частиною рівняння Ляпунова. У статті запропонована конструктивна формула побудови часткового розв'язку неоднорідного рівняння Сильвестра і, зокрема, рівняння Ляпунова.
Ключові слова: матричне рівняння Ляпунова, рівняння Сільвестра, рівняння Ріккаті, рівняння Бернуллі.

Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра. Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра широко используются в теории устойчивости движения, а также при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучена, то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного уравнения типа Ляпунова на основе псевдообращения оператора, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. В статье предложена конструктивная формула построения частного решения неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова.
Ключевые слова: матричное уравнение Ляпунова, уравнение Сильвестра, уравнение Риккати, уравнение Бернулли.

Chuiko S. M. On the solution of the matrix Sylvester equation. Lyapunov matrix equations and their generalizations — Sylvester matrix equation widely used in the theory of stability of motion, as well as the solution of differential Riccati and Bernoulli equations. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation is quite cumbersome. The article suggests the solvability conditions, as well as a scheme for constructing a particular solution of the inhomogeneous equation based on Lyapunov type pseudo-operator corresponding to the homogeneous part of the Lyapunov equation. The paper proposes a structural formula for constructing a particular solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation.
Key words: Lyapunov matrix equation, Sylvester equation, Riccati equation, Bernoulli equation.

Введение. Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1, 2, 3, 4, 5] широко используются в теории устойчивости движения [3, с. 245], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [6, 7] и Бернулли [9, 10]. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучена [1, 5], то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье [6] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного уравнения типа Ляпунова на основе псевдообращения оператора L, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. Нами предложена конструктивная формула построения частного решения неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова.

Основные результаты. Исследуем задачу о построении решения линейного матричного уравнения Сильвестра [3, с. 239]

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\ C\ R_i = B\ . \tag{1}$$

Здесь $Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ и $B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$ — данные матрицы, $C \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ — неизвестная матрица. Как известно, общее решение уравнения (1) является суммой

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B]$$

общего решения $\Phi[Q_i, R_i]$ однородного уравнения

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\ C\ R_i = 0 \tag{2}$$

и произвольного частного решения $\Psi[B]$ уравнения (1). Обозначим

$$\Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

базис пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$C = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \left[\sum_{i=1}^{k} Q_i \Theta_j R_i\right] c_j = B.$$

Обозначим матрицы

$$\Xi_j := \sum_{i=1}^{k} Q_i \Theta_j R_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}, \quad j = 1, 2,\ \dots\ \beta\cdot\gamma.$$

Таким образом, уравнение (1) равносильно следующему:

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Xi_j c_j = B.$$

Определим оператор

$$\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{M}[A]\Big\}: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Заметим, что оператор $\mathcal{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[B]$, моЖет быть представлен в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \quad \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (\ 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1},\ \Upsilon_4 := (\ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\ )^* \in \mathbb{R}^{16\times 1},\ \ldots.$$

Вектор Υ_m состоит из $m-1$ цепочки вида $(\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$ и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \Big(\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \quad 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \quad \ldots \quad 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \quad 1\ \Big)^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

В новых обозначениях оператор $\mathcal{M}[A]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}[A] = \ \Big(I_n \bigotimes A\Big) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m\cdot n}.$$

Определим также матрицы

$$\Big[E_n^m\Big]_k := \Big\{\ \ \Big[E_n^m\Big]_k^{(1)} \ \ \Big[E_n^m\Big]_k^{(2)} \ \ \ldots \ \ \Big[E_n^m\Big]_k^{(m)}\Big\} \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n},$$

где

$$\Big[E_n^m\Big]_k^{(j)} := I_n \cdot \delta_{jk};$$

δ_{jk} — символ Кронеккера:

$$\delta_{jk} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{array} \right. , \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ m.$$

В частности,

$$\Big[E_1^m\Big]_k := \Big\{\ \ \Big[E_1^m\Big]_k^{(1)} \ \ \Big[E_1^m\Big]_k^{(2)} \ \ \ldots \ \ \Big[E_1^m\Big]_k^{(m)}\Big\} \in \mathbb{R}^{1\times m},$$

где
$$\left[E_1^m\right]_k^{(j)} := \delta_{jk}, \quad j = 1,\ 2,\ \dots\ m.$$
Таким образом, обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[B]$ представим в явном виде:
$$\mathcal{M}^{-1}[B] = \sum_{k=1}^{n} \left[E_n^m\right]_k \cdot B \cdot \left[E_1^m\right]_k.$$
В новых обозначениях уравнение (1) равносильно уравнению
$$\mathcal{Q}\ c = \mathcal{M}[B] \tag{3}$$
относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$; здесь
$$\mathcal{Q} := \left\{\ \mathcal{M}[\Xi_1]\ \ \mathcal{M}[\Xi_2]\ \dots\ \mathcal{M}[\Xi_{\beta\cdot\gamma}]\ \right\} = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \left\{ \left[E_1^{\alpha\beta}\right]_j \bigotimes \mathcal{M}[\Xi_j] \right\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}.$$
При условии [8]
$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] = 0,$$
и только при нем уравнение (3) разрешимо:
$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$
При этом уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений
$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$
где
$$\Phi[Q_i, R_i] := \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\right\}, \quad \Psi[B, c_r] := \mathcal{M}^{-1}\left[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\right].$$
Здесь $\mathcal{Q}$ — псевдообратная по Муру—Пенроузу матрица [1], $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$, $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$ — ортопроекторы матриц $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^*$. Матрица $P_{\mathcal{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Условия существования и вид общего решения матричного уравнения Сильвестра (1) определяет следующая теорема.

Теорема. *Матричное уравнение Сильвестра (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие*
$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] = 0. \tag{4}$$
При условии (4), и только при нем, уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений
$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$
где
$$\Phi[Q_i, R_i] := \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\right\},$$

$$\Psi[B, c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r\Big].$$

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для матричного уравнения Сильвестра (1) имеет место критический случай, при этом уравнение Сильвестра (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей B, для которых выполнено условие (4). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для матричного уравнения Сильвестра (1) имеет место некритический случай, при этом уравнение Сильвестра (1) разрешимо для любой неоднородности B.

Следствие. *Матричное уравнение (1) в некритическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) разрешимо для любой неоднородности $B \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$. В этом случае уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений*

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r].$$

Доказанная теорема и следствие обобщают соответствующие условия разрешимости, а также схему построения частного решения неоднородного уравнения Ляпунова [6] на случай уравнения Сильвестра.

Пример 1. *Матричное уравнение Сильвестра*

$$\sum_{i=1}^{2} Q_i \ C \ R_i = B \tag{5}$$

разрешимо при

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис пространства $\mathbb{R}^{3\times 3}$ составляют матрицы

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ , \ \dots \ , \ \Theta_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \Xi_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании матричного уравнения Сильвестра (5) матрица

$$
\mathcal{Q} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

определяет ортопроекторы

$$
P_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

и

$$
P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}.
$$

Поскольку $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, постольку для матричного уравнения Сильвестра (5) имеет место критический случай, при этом выполнено условие (4), следовательно,

поставленная задача разрешима. Искомое $r := 5$ – параметрическое семейство решений
$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r]$$
матричного уравнения Сильвестра (5) определяет матрица
$$\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
и r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$:
$$P_{\mathcal{Q}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Таким образом, общее решение матричного уравнения Сильвестра (5) представимо в виде
$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$
где
$$\Phi[Q_i, R_i] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi[B, c_r] = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ c_1 & c_3 & c_5 \\ 0 & c_4 & 0 \end{pmatrix},$$
$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5 \in \mathbb{R}^1$ — произвольные константы.

Пусть условие (4) не выполнено: $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0$, при этом система (3) неразрешима, однако она всегда имеет псевдорешение
$$C^+ := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma},$$
минимизирующее невязку [8, 11]
$$\Big\|\mathcal{Q}\ c - \mathcal{M}[B]\Big\|_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta}} \to \min$$
в решении системы (3) и среди всех векторов $c \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$, на которых невязка достигает наименьшего значения, вектор $c^+ \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$ имеет наименьшую длину $|c| := c^*c$.

Лемма. *Матричное уравнение Сильвестра (1) при условии* $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0$ *не разрешимо, однако имеет псевдорешение*
$$C^+ := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma},$$
минимизирующее невязку
$$\Big\|\mathcal{Q}\ c - \mathcal{M}[B]\Big\|_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta}} \to \min$$
в решении системы (3).

Как и в случае некорректно поставленных нетеровых краевых задач [11, 12, 13, 14, 15], система (3) всегда имеет одно и только одно псевдорешение $c^+ \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$, наилучшее (в смысле наименьших квадратов), определяемое формулой $\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]$. При этом норма невязки Δ равна норме выражения, входящего в левую часть выражения (3)

$$\Delta := \left|\left|\mathcal{Q}\, c^+ - \mathcal{M}[B]\right|\right|_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta}} = \left|\left|P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B]\right|\right|_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta}}.$$

Пример 2. *Матричное уравнение Сильвестра*

$$\sum_{i=1}^{2} Q_i\ C\ R_i = B \tag{6}$$

не разрешимо при

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

матрицы $Q_1,\ Q_2,\ R_1$ *и* R_2 *определены в примере 1.*

Поскольку $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, постольку для матричного уравнения Сильвестра (6) имеет место критический случай, при этом условие (4) не выполнено, следовательно, матричное уравнение (6) не разрешимо, однако имеет псевдорешение

$$C^+ := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

наилучшее (в смысле наименьших квадратов).

В случае некорректно поставленной задачи [11, 12, 13, 14, 15] матричное уравнение Сильвестра (1) может быть регуляризовано аналогично [16, 17].

Заключение. В статье предложены условия разрешимости и схема построения частного решения неоднородного уравнения типа Ляпунова на основе псевдообращения оператора, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. Предложена конструктивная формула построения частного решения неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова.

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
3. **Ланкастер П.** Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
4. **Далецкий Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
5. **Boichuk A. A.** Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type / A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – Vol. 50, № 8. – P. 1162–1169.

6. **Boichuk A. A.** A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations / A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya // Differential Equations. – 2001. – Vol. 37, № 4. – P. 464–471.
7. **Захар-Иткин М. Х.** Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований / М. Х. Захар-Иткин // Успехи мат. наук. – 1973. – Т. XXVIII, № 3. – С. 83–120.
8. **Boichuk A. A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – 317 p.
9. **Деревенский В. П.** Матричные уравнения Бернулли. I / В. П. Деревенский // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 2. – С. 14–23.
10. **Деревенский В. П.** Матричные уравнения Бернулли. II / В. П. Деревенский // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 7. – С. 3–10.
11. **Кравчук М.** Вибрані математичні праці / М. Кравчук. – Київ; Нью-Йорк: Задруга, 2002. – 792 с.
12. **Chuiko S. M.** Emergence of solution of linear Noetherian boundary-value problem / S. M. Chuiko // Ukr. Math. Zh. 2007. – Vol. 59, № 8. – P. 1274–1279.
13. **Бойчук А. А.** Обобщенно—обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
14. **Чуйко С. М.** Метод найменших квадратів в теорії некорректно поставлених крайових задач / С. М. Чуйко // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. – 2007. – № 7. – С. 51–53.
15. **Chuiko S. M.** On approximate solution of boundary value problems by the least square method / S. M. Chuiko // Nonlinear Oscillations. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 585–604.
16. **Чуйко С. М.** Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко // Буковинський математичний журнал. – 2013. – Т. 1, № 3–4. – С. 158–161.
17. **Chuiko S. M.** On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action / S. M. Chuiko // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 197, № 1. – P. 138–150.