ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2014 .–Т.19, вип. 2(22).–С. 7–18

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 41A65, 41A17, 26A15, 26A16
УДК 517.5

Т. А. Агошкова, С. А. Пичугов
Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени ак. В. Лазаряна

О ВЛОЖЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

Агошкова Т. А., Пiчугов С. О. Про вкладення анiзотропних класiв у метричних просторах з iнтегральною метрикою. Нехай $L_0\left(T^m\right)$ — множина перiодичних вимiрних дiйснозначних функцiй m змiнних, $\psi : R^1_+ \to R^1_+$ — модуль неперервностi, $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}$. Отриманi достатнi умови для вкладення класiв функцiй $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.
Ключовi слова: теореми вкладення, анiзотропний клас, модуль неперервностi, кусковостала функцiя.

Агошкова Т. А., Пичугов С. А. О вложении анизотропных классов в метрических пространствах с интегральной метрикой. Пусть $L_0\left(T^m\right)$ — множество периодических измеримых дествительнозначных функций m переменных, $\psi : R^1_+ \to R^1_+$ — модуль непрерывности, $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}$. Получены достаточные условия для вложений классов функций $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.
Ключевые слова: теорема вложения, анизотропный класс, модуль непрерывности, кусочно-постоянная функция.

Agoshkova T. A., Pichugov S. A. About embedding anisotropic classes in metric spaces with integral metric. Let $L_0\left(T^m\right)$ be a set of periodic measurable real-valued functions of m variables, $\psi : R^1_+ \to R^1_+$ be the continuity modulus and $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}$. The sufficient conditions for embedding classes of functions $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ in $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$ are obtained.
Key words: embedding theorem, anisotropic classes, modulus of continuity, piecewise-constant function.

Введение. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$ точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geqslant 1$. Пусть $f(\mathbf{x})$ — действительнозначные функции, имеющие период 1 по каждой переменной; $T^m = [0,1)^m$ — основной тор периодов; $L_0(T^m)$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на T^m конечны и измеримы; Ω — класс функций $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, являющихся модулями непрерывности, т. е. ψ — непрерывная неубывающая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(x+y) \leqslant \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1_+$; $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x} < \infty\}$ — линейное метрическое пространство с метрикой $\rho(f,g)_\psi = \|f-g\|_\psi$. Среди пространств $L_\psi(T^m)$ важнейшими являются пространства $L_p(T^m)$, $0 < p < 1$ (случай $\psi(t) = t^p$) и $L_0(T^m)$ с топологией сходимости по мере: $\|f\|_0 = \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x}$, $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$.

Определение 1. *Под полным модулем непрерывности функции f в пространстве L_ψ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать:*

$$\omega(f,h)_\psi = \sup_{\|\boldsymbol{t}\|_\infty \leqslant h} \| \triangle_{\boldsymbol{t}} f\|_\psi,$$

где $\triangle_{\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})$, $f_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) = f(x_1+t_1,\ldots,x_m+t_m)$ *и* $\|\boldsymbol{t}\|_\infty := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |t_i|$.

Определение 2. *Для заданного модуля непрерывности $\omega(h)$ через $H^\omega_\psi(T^m)$ обозначим класс функций*

$$H^\omega_\psi(T^m) = \{f \in L_\psi(T^m) : \exists A \geqslant 0 \quad \omega(f,h)_\psi \leqslant A\omega(h) \quad \forall h > 0\},$$

где A — константа, не зависящая от h.

В случае $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$ получаем изотропные классы Липшица $\Lambda^\alpha_\psi(T^m)$.

Определение 3. *Под частным модулем непрерывности функции f по переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать*

$$\omega_i(f,h)_\psi = \sup_{|t|\leqslant h} \| \triangle_{t\boldsymbol{e}_i} f\|_\psi, \ i = 1,\ldots,m,$$

где $\triangle_{t\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{e}_i$ *— вектор, i-я координата которого равна 1, а остальные координаты — нули.*

Определение 4. *Для заданных модулей непрерывности $\omega_1(h),...,\omega_m(h)$ через $\mathcal{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}_\psi(T^m)$ обозначим анизотропный класс функций*

$$\mathcal{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}_\psi(T^m) = \{f \in L_\psi(T^m) : \ \exists A \geqslant 0 \quad \omega_i(f,h)_\psi \leqslant A\omega_i(h) \quad \forall h > 0, \ i = 1,...,m\},$$

где A — константа, не зависящая от h.

В случае $\omega_i(h) = h^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in (0,1]$, $i = 1,...,m$ получаем анизотропные классы Липшица $\Lambda^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}_\psi \equiv \Lambda^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}_\psi(T^m)$.

Харди и Литтлвуд в [1] доказали, что при $1 \leqslant p < q < \infty$, $\theta < \alpha \leqslant 1$, где $\theta = 1/p - 1/q$ имеет место вложение $\Lambda^\alpha_p(T^1) \hookrightarrow \Lambda^{\alpha-\theta}_q(T^1)$.

Необходимые и достаточные условия для вложения $H^\omega_p(T^1) \hookrightarrow L_q(T^1)$ при $1 \leqslant p < q < \infty$ получены П. Л. Ульяновым в [2].

В [3] при $1 \leqslant p < q < \infty$ и $f \in L_p(T^1)$ установлены соотношения между модулями непрерывности в разных метриках:

$$\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_q \leqslant C_{p,q}\left(\sum_{k=n+1}^\infty k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(f,\frac{1}{k}\right)_p\right)^{\frac{1}{q}}, \quad n = 1,2,...$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}}$. С. М. Никольский (см. в [4, гл. 6]) доказал, что при $\widetilde{\alpha} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ имеет место вложение

$$\Lambda^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_p(T^m) \hookrightarrow L_q(T^m), \tag{1}$$

где $1 \leqslant p < q < \infty$, $0 < \alpha_i \leqslant 1, i = 1,...,m$. Если же $\widetilde{\alpha} < \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то вложение (1) не имеет места.

Вложения классов $H_p^{\omega_1,...,\omega_m}(T^m)$ в $L_q(T^m)$ при $\omega_1 = ... = \omega_m = \omega$ исследовались в [5–8].

В [9] В. И. Коляда получил необходимые и достаточные условия для вложения $\mathcal{H}_p^{\omega_1,...,\omega_m}(T^m) \hookrightarrow L_q(T^m)$. Для характеристики этого вложения большую роль сыграло введеное Колядой определение усредненного модуля непрерывности. Будем использовать его для метрических пространств L_ψ.

Определение 5. [10, 11] *Под усредненным модулем непрерывности функции f в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать*

$$\overline{\omega}(f,h)_\psi = \inf\{\max_{1\leqslant i\leqslant m} \omega_i(f,h_i)_\psi; \prod_{i=1}^m h_i = h,\ h_i > 0,\ i = 1, ..., m\}.$$

При $0 < p < 1,\ p < q < \infty$ и $f \in L_p(T^1)$ Э. А. Стороженко в [12] получила соотношение между модулями непрерывности в разных метриках:

$$\omega(f,h)_q \leqslant C_{p,q} \int\limits_0^h \left(\frac{\omega(f,x)_p}{x}\right)^{\frac{q}{p}} dx, \quad 0 < h < \frac{1}{3}.$$

В [13] Э. А. Стороженко получены необходимые и достаточные условия для вложения $H_p^\omega(T^1) \hookrightarrow L_q(T^1)$, где $0 < p < 1,\ p < q < \frac{p}{1-p}$. В частности при $0 < p < q \leqslant 1$ и $1 - \frac{p}{q} < \alpha \leqslant 1$ имеет место вложение классов $\Lambda_p^\alpha(T^1)$ в $L_q(T^1)$ и справедливо соотношение:

$$\omega(f,h)_q \leqslant C_{p,q} h^{\frac{q}{p}\left(\alpha - 1 + \frac{p}{q}\right)}, \quad 0 < h < \frac{1}{3}. \tag{2}$$

В шкале пространств $L_\psi(T^1)$ С. А. Пичугов в [14] исследовал задачу о вложении классов функций из $L_\psi(T^1)$ в $L_1(T^1)$. Для формулировки результатов введем следующие определения.

Определение 6. [15, с. 75] *Если $\varphi(t)$ — строго положительная всюду конечная на $(0,\infty)$ функция, то ее функцией растяжения называется функция $M_\varphi(s)$, которая определяется равенством*

$$M_\varphi(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)},\ s \in (0,\infty).$$

Определение 7. [15, с. 76] *Нижним показателем растяжения функции $\varphi(t) \in \Omega$ называется число γ_φ такое, что:*

1) $\gamma_\varphi \in [0;1]$;

2) $M_\varphi(s) \geqslant s^{\gamma_\varphi},\ \forall s \in (0;1)$;

3) $\forall \varepsilon > 0$ *при* $s \in (0,1)$ *с некоторой константой* C_ε*:*

$$M_\varphi(s) \leqslant C_\varepsilon s^{\gamma_\varphi - \varepsilon}. \tag{3}$$

Теорема [14]. *Пусть $\gamma_\psi > 0$ и $f \in L_\psi(T^1)$ такова, что конечен интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \cdot \frac{\omega(f,t)_\psi}{t} dt < \infty.$$

Тогда $f \in L_1(T^1)$ и для всех $0 < h \leqslant \frac{1}{2}$ выполняется неравенство:

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leqslant C \int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \cdot \frac{\omega(f,ht)_\psi}{ht} dt \tag{4}$$

с некоторой постоянной C не зависящей от h.

Для классов $\Lambda_p^\alpha(T^1)$ неравенство (4) совпадает с соотношением (2) при $q = 1$.

В [16] получено достаточное условие вложения $\mathcal{H}_\psi^\omega(T^m) \hookrightarrow L_1(T^m)$ и соотношение для функций из $L_\psi(T^m)$, $\gamma_\psi > 0$:

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leqslant C \int_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi\left(t\right)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,(ht)^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{ht} dt, \quad 0 < h \leqslant \frac{1}{2},$$

которое совпадает с неравенством (4) при $m = 1$.

Также в [16] получена теорема вложения классов $\mathcal{H}_\psi^\omega(T^m)$ в $L_q(T^m), 0 < q \leqslant 1$. Для ее формулировки нам понадобится следующее определение.

Определение 8. [15, с. 70] *Функцию $\varphi(t)$ на полуоси $[0,\infty)$ называют квазивогнутой, если:*

1) $\varphi(0) = 0$;

2) $\varphi(t)$ положительна и возрастает при $t > 0$;

3) $\frac{\varphi(t)}{t}$ убывает при $t > 0$.

Теорема [16]. *Пусть $\psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$ — квазивогнутая функция, $q \in (0;1]$, $\gamma_\psi > 0$ и для $f \in L_\psi\left(T^m\right)$ конечен интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi\left(t^{\frac{1}{q}}\right)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,\ t^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{t} dt < \infty.$$

Тогда $f \in L_q(T^m)$ и для всех $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ выполняется неравенство:

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C \int_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi\left(t^{\frac{1}{q}}\right)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,(ht)^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{ht} dt, \tag{5}$$

где константа C зависит от $\psi,\ f,\ m,\ q$.

Для классов $\Lambda_p^\alpha(T^1)$ неравенство (5) совпадает с соотношением (2).

В настоящей работе в анизотропном случае проведено исследование вложения классов $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\dots,\omega_m}(T^m)$ в $L_1(T^m)$ (теорема 1). Рассмотрен и более общий случай вложения классов $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\dots,\omega_m}(T^m)$ в $L_q(T^m)$, $0 < q \leqslant 1$ (теорема 2). При доказательстве теорем 1, 2 мы используем приближение кусочно-постоянными функциями с плавающими узлами. Ранее эта идея была использована в [14, 16].

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, $f \in L_\psi(T^m)$, *и найдутся такие* $\nu_i \in R_+^1$ $(i = 1, ..., m)$, *что* $\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i = 1$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k M_\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi < \infty. \tag{6}$$

Тогда $f \in L_1(T^m)$ *и при любом* $n \in N$ *выполняются неравенства*

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant C \sum_{k=n}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi, \tag{7}$$

где константа C *не зависит от* n.

Доказательство. Для произвольного $t > 0$ и $i = 1, ..., m$

$$\omega_i\left(f, t\right)_1 \leqslant 2\|f\|_1.$$

Тогда

$$\omega_i\left(f, t\right)_1 \leqslant \omega_i\left(f - g, t\right)_1 + \omega_i\left(g, t\right)_1 \leqslant 2\|f - g\|_1 + \omega_i\left(g, t\right)_1. \tag{8}$$

Пусть $h_i > 0, i = 1, ..., m$, и такие, что $\prod\limits_{i=1}^{m} h_i = h$. Поскольку $\omega_i(f, h_i)_1 = \omega_i(f_{\mathbf{t}}, h_i)_1$, то получаем

$$\begin{gathered}\psi\left(\tfrac{\overline{\omega}(f,h)_1}{h}\right) \leqslant \psi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(f,h_i)_1}{h}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\psi\left(\tfrac{\omega_i(f,h_i)_1}{h}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{T^m}\psi\left(\tfrac{\omega_i(f_{\mathbf{t}},h_i)_1}{h}\right)d\mathbf{t}.\end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $f_{\mathbf{t}} = f_{1,\mathbf{t}} + f_{2,\mathbf{t}}$, тогда, учитывая (8), из (9) следует, что

$$\psi\left(\tfrac{\overline{\omega}(f,h)_1}{h}\right) \leqslant m\int\limits_{T^m}\psi\left(\tfrac{2}{h}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_1\right)d\mathbf{t} + \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{T^m}\psi\left(\tfrac{1}{h}\omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, h_i\right)_1\right)d\mathbf{t}. \tag{10}$$

Построим специальные сплайн-функции. Для каждой из m координатных осей отрезок $[0, 1)$ разбиваем на отрезки равной длины с помощью $2^{[n\nu_k]}$, $n \in N$, равноотстоящих точек вида:

$$\frac{j_k}{2^{[n\nu_k]}},\ j_k = 0, 1, ..., 2^{[n\nu_k]} - 1,$$

где индекс k $(k=1,...,m)$ указывает номер оси.

Таким образом, получаем разбиение основного тора T^m на $2^{\sum\limits_{k=1}^{m}[n\nu_k]}$ параллелепипедов вида:

$$\Pi_{j_1\dots j_m;2^n}=\{\mathbf{x}\in T^m:\ \frac{j_k}{2^{[n\nu_k]}}\leqslant x_k<\frac{j_k+1}{2^{[n\nu_k]}},\ k=1,...,m\},$$

где $j_k=0,1,...,2^{[n\nu_k]}-1,\ k=1,...,m.$

Снимем значения с функции f в узловой точке $\left(\frac{j_1}{2^{[n\nu_1]}},\dots,\frac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)$ каждого m-мерного параллелепипеда $\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n}$ и определим кусочно-постоянную функцию $S_{2^n}(f_{\mathbf{t}},\mathbf{x})$: для $j_i=0,\dots,2^{[n\nu_i]}-1,\ i=1,\dots,m,$

$$S_{2^n}(f_{\mathbf{t}},\mathbf{x}):=f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^{[n\nu_1]}},\dots,\frac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)\chi_{\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n}}(\mathbf{x}), \tag{11}$$

где $\chi_{\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n}}(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in\Pi_{j_1,\dots,j_m;;2^n}\\ 0, & \mathbf{x}\,\overline{\in}\,\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n}\end{cases}.$

Будем использовать сплайны $S_{2^n}(f_{\mathbf{t}},\mathbf{x})$ для оценок сверху правой части (10).

Для эквивалентных в L_1 функций f соответствующие сплайны (11) при фиксированном $\mathbf{t}$ могут различаться как элементы пространства L_1. Однако ниже мы покажем, что благодаря усреднению по сдвигам $\mathbf{t}$ их использование в (10) корректно.

Положим в (10)

$$h=\tfrac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{N};\quad h_i=\tfrac{1}{2^{n\nu_i}},\ \text{где}\ \sum_{i=1}^{m}\nu_i=1\ \left(\nu_i\in R_+^1,\ i=1,...,m\right);$$
$$f_{1,\mathbf{t}}=\sum_{k>n}\left(S_{2^k}(f_{\mathbf{t}})-S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})\right),f_{2,\mathbf{t}}:=S_{2^n}(f_{\mathbf{t}}).$$

Рассмотрим ряд

$$S_{2^0}(f_{\mathbf{t}})+\sum_{k=1}^{\infty}\left(S_{2^k}(f_{\mathbf{t}})-S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})\right).$$

Покажем, что он сходится в том смысле, что

$$\int\limits_{T^m}\|f_{\mathbf{t}}-(S_{2^0}(f_{\mathbf{t}})+\sum_{k=1}^{s}(S_{2^k}(f_{\mathbf{t}})-S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})))\|_1d\mathbf{t}\longrightarrow 0,\ s\longrightarrow\infty.$$

Учитывая, что

$$a-1<[a]\leqslant a, \tag{12}$$

получаем

$$\int\limits_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - (S_{2^0}(f_{\mathbf{t}}) + \sum_{k=1}^{s} (S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})))\|_1 d\mathbf{t} = \int\limits_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - S_{2^0}(f_{\mathbf{t}}) -$$
$$-(S_{2^1}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^0}(f_{\mathbf{t}})) - (S_{2^2}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^1}(f_{\mathbf{t}})) - \ldots - (S_{2^s}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{s-1}}(f_{\mathbf{t}}))\|_1 d\mathbf{t} =$$
$$= \int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m} |f_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - S_{2^s}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x})|\, d\mathbf{x} d\mathbf{t} =$$
$$= \int\limits_{T^m} \sum_{j_1=0}^{2^{[s\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[s\nu_m]}-1} \int\limits_{\Pi_{j_1,\ldots,j_m;2^s}} \left|f_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[s\nu_1]}}, \ldots, \tfrac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}\right)\right| d\mathbf{x} d\mathbf{t} =$$
$$= \sum_{j_1=0}^{2^{[s\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[s\nu_m]}-1} \int\limits_{\frac{j_1}{2^{[s\nu_1]}}}^{\frac{j_1+1}{2^{[s\nu_1]}}} \ldots \int\limits_{\frac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}}^{\frac{j_m+1}{2^{[s\nu_m]}}} \int\limits_{T^m} \left|f_{\mathbf{t}}\left(x_1 + \tfrac{j_1}{2^{[s\nu_1]}}, \ldots, x_m + \tfrac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}\right) - f(\mathbf{t})\right| d\mathbf{t} d\mathbf{x} =$$
$$= \sum_{j_1=0}^{2^{[s\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[s\nu_m]}-1} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{[s\nu_1]}}} \ldots \int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{[s\nu_m]}}} \int\limits_{T^m} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x}) - f(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} d\mathbf{x} =$$
$$= \prod_{i=1}^{m} 2^{[s\nu_i]} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{[s\nu_1]}}} \ldots \int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{[s\nu_m]}}} \|\triangle_{\mathbf{x}} f\|_1 d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{m} 2^{[s\nu_i]} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{[s\nu_1]}}} \ldots \int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{[s\nu_m]}}} \sum_{i=1}^{m} \|\triangle_{x_i \mathbf{e}_i} f\|_1 d\mathbf{x} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \omega_i(f, \tfrac{1}{2^{[s\nu_i]}})_1 \longrightarrow 0,\ s \longrightarrow \infty.$$

Как видно из приведенного выше доказательства сходимости, благодаря усреднению по сдвигам значение $\int\limits_{\Pi_{j_1,\ldots,j_m;2^s}} \int\limits_{T^m} \left|f_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^{[s\nu_1]}}, \ldots, \frac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}\right)\right| d\mathbf{x} d\mathbf{t}$ не зависит от выбора представителя f из класса эквивалентности, так как относительно переменной $\mathbf{t}$ этот интеграл будет давать одно и то же значение при любом представителе класса эквивалентности. Поэтому использование в неравенстве (10) сплайнов вида (11) корректно.

Учитывая неравенства (12), получаем, что

$$\int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_1\right) d\mathbf{t} = \int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+1}\left|\left|S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})\right|\right|_1\right) d\mathbf{t} =$$
$$= \int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+1} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \int\limits_{\Pi_{j_1,\ldots,j_m;2^k}} \left|S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x})\right| d\mathbf{x}\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+1} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{[k\nu_i]}} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \left|\triangle_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^k}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t} <$$
$$< \int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+1} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{k\nu_i - 1}} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \left|\triangle_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^k}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t} =$$
$$= \int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+m+1-k} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \left|\triangle_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^k}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t},$$

где $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^k}} = \left(\frac{1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \frac{1}{2^{[k\nu_m]}}\right)$.

Далее применим неравенства:

$$\psi(st) \leqslant M_\psi(s)\psi(t), \tag{13}$$

$$M_\psi(s_1 s_2) \leqslant M_\psi(s_1) M_\psi(s_2),$$

вытекающие из определения 6 функции растяжения $M_\psi(s)$, и полуаддитивность функции ψ:

$$\int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_1\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \sum_{k>n} \left(M_\psi\left(2^{n+m+1-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right)\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} M_\psi\left(2^{m+1}\right) \sum_{k>n} \left(M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right)\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left(M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \int\limits_{T^m} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t}\right) =$$
$$= C_1 \sum_{k>n} \left(M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f\right|\right|_\psi \right) =$$
$$= C_1 \sum_{k>n} \left(\prod_{i=1}^m 2^{[k\nu_i]} M_\psi\left(2^{n-k}\right) \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f\right|\right|_\psi \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left(2^{k\sum\limits_{i=1}^m \nu_i} M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{[k\nu_i]}}\mathbf{e_i}} f\right|\right|_\psi \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left(2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{[k\nu_i]}}\right)_\psi \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left(2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \tfrac{2}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \right) \leqslant \tag{14}$$
$$\leqslant C_2 \sum_{k>n} \left(2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \right).$$

Оценим $\int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\right)_1\right) d\mathbf{t}$, $i = 1,..,m$. Применяя неравенства (12), (13) и учитывая полуаддитивность функции ψ, получаем

$$\int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \omega_i(f_{2,\mathbf{t}}; \tfrac{1}{2^{n\nu_i}})_1\right) d\mathbf{t} \leqslant \int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \| \triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} S_{2^n}(f_{\mathbf{t}})\|_1\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \sum_{j_1=0}^{2^{[n\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[n\nu_m]}-1} \int\limits_{\frac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}}^{\frac{j_1+1}{2^{[n\nu_1]}}} \dots \int\limits_{\frac{j_i}{2^{[n\nu_i]}}}^{\frac{j_i+1}{2^{[n\nu_i]}}} \dots \int\limits_{\frac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}}^{\frac{j_m+1}{2^{[n\nu_m]}}} \left|\triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)\right| d\mathbf{x}\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \prod_{l=1}^m \tfrac{1}{2^{[n\nu_l]}} \sum_{j_1=0}^{2^{[n\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[n\nu_m]}-1} \left|\triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} M_\psi\left(2^n \prod_{l=1}^m \tfrac{1}{2^{[n\nu_l]}}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[n\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[n\nu_m]}-1} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{l=1}^m 2^{[n\nu_l]} M_\psi\left(2^{n+m-n\sum\limits_{l=1}^m \nu_l}\right) \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f\right|\right|_\psi \leqslant$$
$$\leqslant 2^n M_\psi\left(2^m\right) \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{[n\nu_i]}}\right)_\psi \leqslant$$
$$\leqslant C_3 2^n M_\psi\left(2^m\right) \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi = C_4 2^n \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi. \tag{15}$$

Таким образом, из (10) при $h = \frac{1}{2^n}$, $n \in N$, (14) и (15) следует, что

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f,\frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant mC_2 \sum_{k>n}\left(2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{i=1}^m \omega_i\left(f,\frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi\right)+$$
$$+C_4 2^n \sum_{i=1}^m \omega_i\left(f,\frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi \leqslant C_5 \sum_{k=n}^\infty 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{i=1}^m \omega_i\left(f,\frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi,$$

где полученный ряд сходится по условию (6).

Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема 1 позволяет получить теорему вложения анизотропных классов Липшица из $L_\psi(T^m)$ в $L_1(T^m)$.

Следствие 1. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, $f \in \Lambda_\psi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1,...,m)$ *и* $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}}$ *такое, что* $\gamma_\psi + \widetilde{\alpha} > 1$. *Тогда* $f \in L_1(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f,\frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant C\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\widetilde{\alpha}-1},$$

где константа C *не зависит от* n.

Доказательство. Пусть $\nu_i = \frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_i}$, $i = 1,..,m$. Проверим выполнение условия (6). Учитывая свойство (3) функции растяжения, получим

$$\sum_{k=1}^\infty 2^k M_\psi\left(\tfrac{1}{2^k}\right)\sum_{i=1}^m \omega_i\left(f,\tfrac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \leqslant C\sum_{k=1}^\infty 2^k\left(\tfrac{1}{2^k}\right)^{\gamma_\psi-\varepsilon}\sum_{i=1}^m\left(\frac{1}{2^{k\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_i}}}\right)^{\alpha_i} \leqslant$$
$$\leqslant mC\sum_{k=1}^\infty 2^{k(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})} = Cm\sum_{k=1}^\infty\left(\tfrac{1}{2^{\gamma_\psi-\varepsilon+\widetilde{\alpha}-1}}\right)^k.$$

Последний ряд сходится, когда $\gamma_\psi - \varepsilon + \widetilde{\alpha} > 1$, а это возможно при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Тогда, по теореме 1, $f \in L_1(T^m)$ и выполняется неравенство (7):

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f,\frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant C\sum_{k=n}^\infty 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{i=1}^m \omega_i\left(f,\tfrac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{k=n}^\infty 2^k\left(2^{n-k}\right)^{\gamma_\psi-\varepsilon}\sum_{i=1}^m\left(\frac{1}{2^{k\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_i}}}\right)^{\alpha_i} = C_1 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)}\sum_{k=n}^\infty 2^{k(1-\gamma_\psi+\varepsilon)}\sum_{i=1}^m \tfrac{1}{2^{\widetilde{\alpha}k}} =$$
$$= mC_1 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)}\sum_{k=n}^\infty 2^{k(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})} = C_2 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)}2^{n(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})}\tfrac{2^{\gamma_\psi-\varepsilon+\widetilde{\alpha}}}{2^{\gamma_\psi-\varepsilon+\widetilde{\alpha}-1}-1} =$$
$$= C_3 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)+n(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})} = C_4 2^{n(1-\widetilde{\alpha})},$$

где константа C_4 не зависит от n.

Следствие 1 доказано.

Также из теоремы 1 для анизотропных классов Липшица из $L_p(T^m), 0 < p < 1$ вытекает теорема вложения в $L_1(T^m)$.

Следствие 2. *Пусть* $f \in \Lambda_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, $0 < p < 1$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1,...,m)$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *такое, что* $\widetilde{\alpha} + p > 1$. *Тогда* $f \in L_1(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\overline{\omega}\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_1 \leqslant C\frac{1}{2^{\frac{n}{p}(\widetilde{\alpha}+p-1)}},$$

где константа C *не зависит от* n.

Рассмотрим более общий случай вложения классов функций $\mathcal{H}_{\psi}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}(T^m)$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$ *– квазивогнутая функция,* $q \in (0;1]$, $\gamma_\psi > 0$, $f \in L_\psi(T^m)$ *и найдутся такие* $\nu_i \in R_+^1$ $(i = 1, ..., m)$, *что* $\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i = 1$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{-\frac{k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi < \infty. \tag{16}$$

Тогда $f \in L_q(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C \sum_{k=n}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{\frac{n-k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi, \tag{17}$$

где константа C *не зависит от* n.

Доказательство. Пусть $\Phi(x) = \psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$, $x \in R_+^1$, тогда при любом натуральном n получаем

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) = \Phi\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \Phi\left(\sum_{i=1}^{m} 2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q + \sum_{i=1}^{m} 2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_q\right) d\mathbf{t},$$

где $f_{1,\mathbf{t}} + f_{2,\mathbf{t}} = f_{\mathbf{t}}$.

В качестве $f_{1,\mathbf{t}}$ и $f_{2,\mathbf{t}}$ рассмотрим функции, используемые при доказательстве теоремы 1.

Пусть $\overline{\Phi}(x)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\Phi(x)$. Тогда $\overline{\Phi}(x)$ — полуаддитивна (см., например, [17, с. 111].

Заметим, что ([15, с. 70]) для наименьшей вогнутой мажоранты $\overline{\varphi}(t)$ квазивогнутой функции $\varphi(t)$ справедливы неравенства:

$$\varphi(t) \leqslant \overline{\varphi}(t) \leqslant 2\varphi(t). \tag{18}$$

Как и в теореме 1, а также учитывая неравенства (18) и полуаддитивность функции $\overline{\Phi}(x)$, имеем

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant m \int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q\right) d\mathbf{t} + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_q\right) d\mathbf{t},$$

$$\int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \sum_{k>n} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \overline{\Phi}\left[2^{n+1+m-k}\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \frac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|^q\right] d\mathbf{t} =$$
$$= 2 \int\limits_{T^m} \sum_{k>n} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \psi\left[2^{\frac{n-k+m+1}{q}}\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \frac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right] d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} 2^k M_\psi\left(2^{\frac{n-k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi,$$
$$\int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_q\right) d\mathbf{t} \leqslant C_2 \cdot 2^n \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi.$$

Следовательно, при любом $n \in N$ получаем

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C_3 \sum_{k=n}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{\frac{n-k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi,$$

где полученный ряд сходится по условию (16).

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следуют теоремы вложения анизотропных классов Липшица из $L_\psi(T^m)$ в $L_q(T^m)$ и из $L_p(T^m)$ в $L_q(T^m)$ при $0 < p < q \leqslant 1$.

Следствие 3. *Пусть* $\psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$ *– квазивогнутая функция,* $q \in (0;1]$, $\gamma_\psi > 0$, $f \in \Lambda_\psi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1, \ldots, m)$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *такое, что* $\frac{\gamma_\psi}{q} + \widetilde{\alpha} > 1$. *Тогда* $f \in L_q(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\widetilde{\alpha}-1},$$

где константа C *не зависит от* n.

Следствие 4. *Пусть* $f \in \Lambda_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, $0 < p < q \leqslant 1$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1, \ldots, m)$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *такое, что* $\frac{p}{q} + \widetilde{\alpha} > 1$. *Тогда* $f \in L_q(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\overline{\omega}\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_q \leqslant C \frac{1}{2^{\frac{nq}{p}\left(\frac{p}{q}+\widetilde{\alpha}-1\right)}},$$

где константа C *не зависит от* n.

Полученное неравенство в одномерном случае совпадает с (2).

Заключение. В представленной статье были получены достаточные условия для вложения классов $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ в $L_q(T^m)$, где $0 < q \leqslant 1$ и, как следствие, при $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1, \ldots, m)$ получена теорема вложения анизотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.

1. **Hardy J. H.** A convergence criterion for Fourier series / J. H. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Z. – 1928. – 28, № 4. – P. 612–634.
2. **Ульянов П. Л.** Вложение некоторых классов функций H_p^ω / П. Л. Ульянов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 649–686.
3. **Ульянов П. Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках / П. Л. Ульянов // Мат. сб. – 1970. – Т. 81(123), № 1. – С. 104–131.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский – М. : Наука, 1977. – 342 с.
5. **Головкин К. К.** Об одном обобщении интерполяционной теоремы Марцинкевича / К. К. Головкин // Тр. МИАН. – 1967. – Т. 102. – С. 5–28.

6. **Бесов О. В.** Теорема вложения для предельного показателя / О. В. Бесов, В. П. Ильин // Мат. заметки. – 1969. – Т. 6, № 2. – С. 129–138.
7. **Темиргалиев Н. Т.** Некоторые теоремы вложения классов функций $H^{\omega}_{p,m}$ многих переменных / Н. Т. Темиргалиев // Изв. АН КазССР. Сер. физ.–матем. – 1970. – № 5. – С. 90–92.
8. **Панджикидзе Л. К.** Теоремы вложения для функций многих переменных / Л. К. Панджикидзе // Сообщ. АН ГрузССР. – 1970. – Т. 60, № 1. – С. 29–31.
9. **Коляда В. И.** О вложении классов $H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_\nu}$ / В. И. Коляда // Мат. сб. – 1985. – Т. 127(169), № 3(7). – С. 352–383.
10. **Коляда В. И.** О вложении некоторых классов функций многих переменных / В. И. Коляда // Сиб. мат. журн. – 1973. – Т. XIV, № 4. – С. 766–790.
11. **Коляда В. И.** О вложении в классы $\varphi(L)$ / В. И. Коляда // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Т. 39, вып. 2. – С. 418–437.
12. **Стороженко Э. А.** Теоремы вложения и наилучшие приближения / Э. А. Стороженко // Мат. сб. – 1975. – Т. 97(139), № 2(6). – С. 230–241.
13. **Стороженко Э. А.** О некоторых теоремах вложения / Э. А. Стороженко // Мат. заметки. – 1976. – Т. 19, № 2. – С. 187–200.
14. **Пичугов С. А.** Гладкость функций в метрических пространствах L_ψ / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, – № 9. – С. 1214–1232.
15. **Крейн С. Г.** Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
16. **Агошкова Т. А.** Теоремы вложения в метрических пространствах L_ψ / Т. А. Агошкова // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 3. – С. 291–301.
17. **Тиман А. Ф.** Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.