Mathematical Subject Classification: 34B15, 30E25
УДК 517.9

А. Н. Витюк, А. В. Михайленко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова,
Одесский национальный экономический университет

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Вітюк О. Н., Михайленко А. В. Крайова задача для диференціального рівняння дробового порядку. В статті отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння дробового порядку.
Ключові слова: крайова задача, існування та єдиність, дробова похідна Рімана—Ліувілля.

Витюк А. Н., Михайленко А. В. Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка. В статье получены достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка.
Ключевые слова: краевая задача, существование и единственность, дробная производная Римана—Лиувилля.

Vityuk A. N., Mykhailenko A. V. Boundary-value problem for differential equation of fractional order. In this paper we received the sufficient conditions of existence and uniqueness of solution of boundary-value problem for fractional order differential equation.
Key words: boundary-value problem, existence and uniqueness, Riemann—Liouville fractional derivative.

Введение. Дробное интегродифференцирование находится в процессе интенсивного развития как в теоретическом плане, так и в плане приложений. Это обусловлено многочисленными приложениями при изучении многих физических, химических процессов, протекающих во фрактальных средах. Математической моделью таких процессов выступают дифференциальные уравнения нецелых порядков.

Различные приложения дробного интегродифференцирования можно найти в [1–3]. Работы многих авторов посвящены исследованию условий существования и единственности решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка [4–6]. В [8] рассмотрена краевая задача

$$\widetilde{D}_0^{\alpha}u(t) = f\left(t, u(t), \widetilde{D}_0^{\beta}u(t)\right), 0 < t < 1,$$

$$a_1u(0) - a_2u'(0) = A, u(1) + b_2u'(1) = B,$$

где $1 < \alpha \leqslant 2, 0 < \beta \leqslant 1; a_i, b_i \geqslant 0, i = 1, 2; a_1b_2 + a_2b_1 > 0, \widetilde{D}_0^{\alpha}, \widetilde{D}_0^{\beta}$ есть дробные производные Капуто и $f : [0, 1] \times R \times R \to R$ непрерывная функция. Получены условия существования и единственности решения этой задачи. В [8] исследованы условия существования положительных решений для краевой задачи

$$D_0^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

где $1 < \alpha \leqslant 2, D_0^\alpha$ — производная Римана—Лиувилля и $f : [0,1] \times [0;\infty)$ — непрерывная функция. Условия разрешимости краевой задачи

$$D_0^{1+\alpha} u(t) = f\left(t, u(t), D_0^\alpha u(t)\right), \tag{1.1}$$

$$u(0) = u(a) = 0,$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, получены в [9]. В настоящей работе получены условия существования и единственности решений уравнения (1.1), которые удовлетворяют краевым условиям

$$u(0) = u'(a) = 0. \tag{1.2}$$

Предварительные результаты. В этом разделе приведены некоторые определения и утверждения, которые будут использованы в этой работе. Через $C(J), J = [0, a]$ обозначим пространство Банаха непрерывных на J функций $f : J \to R$ с нормой $\|f(x)\|_C = \{\max |f(x)| : 0 \leqslant x \leqslant a\}$. Как обычно, через $AC(J), L(J)$ обозначаем пространства, соответственно, абсолютно непрерывных и суммируемых функций $f : J \to R$.

Определение 1 [10]. *Через $AC^n(J), n = 1, 2...$ обозначим класс функций $f(x)$ непрерывно дифференцируемых на J до порядка $n - 1$, причем $f^{n-1}(x) \in AC(J)$.*

Определение 2 [10, 11]. *Пусть $\alpha > 0$, и $f(x) \in L(J)$. Выражение*

$$f_\alpha(x) = I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, называем левосторонним интегралом Римана—Лиувилля порядка α от функции $f(x)$.

Определение 3 [10, 11]. *Для $f : J \to R$ выражение*

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

где $n = [\alpha] + 1$ и $[\alpha]$ есть целая часть α, называем левосторонней производной Римана—Лиувилля порядка α от функции $f(x)$.

Лемма 1 [13]. *Пусть $\gamma > 0$, $n = [\gamma] + 1$ и пусть $f_{n-\gamma}(x) \in AC^n(J)$. Тогда*

$$I_0^\gamma D_0^\gamma f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\gamma-k-1}}{\Gamma(\gamma-k)} f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(0),$$

где $f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(0) = \lim_{x \to 0_+} f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(x)$.

Лемма 2 [12]. *Пусть* $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ *и* $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. *Тогда* $|\sigma_1^\mu - \sigma_2^\mu| \leqslant |\sigma_1 - \sigma_2|^\mu$.

Лемма 3. *Пусть* $\gamma > 0, f(x) : J \to R$ *— измеримая функция и* $|f(x)| \leqslant M$. *Тогда* $\mu(x) = I_0^\gamma f(x) \in C(J)$ *и* $\mu(0) = 0$.

Основные результаты. Рассмотрим краевую задачу

$$D_0^{1+\alpha} y(x) = f(x), 0 < x < a, 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.1}$$

$$y(0) = y'a) = 0, \tag{2.2}$$

где $f : J \to R$ есть измеримая функция, причем $|f(x)| \leqslant M$.

Пусть $0 < \gamma \leqslant 2$. Тогда согласно определениям 2 и 3

$$D_0^\gamma y(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x (x-t)^{1-\gamma} y(t) dt = y''_{2-\gamma}(x).$$

Если $\gamma = 1 + \alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$, то $D_0^{1+\alpha} y(x) = y''_{1-\alpha}(x)$.

Определение 4. *Функцию* $y(x) \in C(J) \cap C^1((0,a])$ *называем решением краевой задачи (2.1), (2.2), если* $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J), y(x)$ *удовлетворяет условиям (2.2) и дифференциальному уравнению (2.1) для п.в.* $x \in J$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) : J \to R$ *есть измеримая функция и* $|f(x)| \leqslant M, x \in J$. *Тогда краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение*

$$y(x) = \int_0^a G(x,t) f(t) dt, \tag{2.3}$$

где

$$G(x,t) = \left[\begin{array}{c} -\frac{x^\alpha (a-t)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}(x-t)^\alpha}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}, 0 \leqslant t \leqslant x \\ -\frac{x^\alpha (a-t)^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}, x \leqslant t < a. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение краевой задачи (2.1), (2.2). Тогда $I_0^{1+\alpha} D_0^{1+\alpha} y(x) = I_0^{1+\alpha} f(x)$. Согласно лемме 1 при $n = 2$

$$I_0^{1+\alpha} D_0^{1+\alpha} y(x) = y(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(0).$$

Так как $y(0) = 0$, то

$$y(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) = I_0^{1+\alpha} f(x). \tag{2.5}$$

Найдем $y'_{1-\alpha}(0)$. Согласно (2.5)

$$y'(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, 0 < x \leqslant a. \tag{2.6}$$

В (2.6) полагаем $x = a$ и, принимая во внимание, что $y'(a) = 0$, получим

$$y'_{1-\alpha}(0) = -\frac{1}{a^{\alpha-1}} \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Отсюда и из (2.5) следует, что

$$y(x) = -\frac{x^\alpha \delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x (x-t)^\alpha f(t)dt, \tag{2.7}$$

где $\delta = \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} f(t)dt$. Дифференцируя (2.7), получим

$$y'(x) = -\frac{x^{\alpha-1}\delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{2.8}$$

Отметим, что согласно (2.7), (2.8) $y(x) \in C([0,a]) \cap C^1((0,a])$ и $y(0) = y'(a) = 0$. Для $0 < x < a$ согласно (2.7) имеем

$$y(x) = -\frac{x^\alpha}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} \left[\int_0^x (a-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \int_x^a (a-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right] +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x (x-t)^\alpha f(t)dt = \int_0^x \left[-\frac{x^\alpha (a-t)^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} + \frac{(x-t)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right] f(t)dt +$$

$$+ \int_x^a \left[-\frac{x^\alpha (a-t)^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} \right] f(t)dt = \int_0^a G(x,t) f(t)dt.$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим краевую задачу

$$D_0^{1+\alpha} y(x) = F\left[y(x)\right] \equiv F\left(x, y(x), D_0^\alpha y(x)\right), 0 < x < a, 0 < \alpha \leqslant 1; \tag{3.1}$$

$$y(0) = y'(a) = 0. \tag{3.2}$$

Пусть $F : J \times R \times R \to R$ удовлетворяет условиям:

(i) $F(\cdot, y, z) : J \to R$ есть функция измеримая для фиксированных $y, z \in R$;

(ii) $F(x, \cdot, \cdot) : R \times R \to R$ есть функция непрерывная для каждого фиксированного $x \in J$;

(iii) $|F(x,y,z)| \leqslant M$.

Определение 5. *Под решением краевой задачи (3.1), (3.2) понимаем такую функцию $y(x) \in C(J) \cap C^1((0,a])$, что $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J), D_0^\alpha y(x) \in AC(J)$, удовлетворяет краевым условиям (3.2) и дифференциальному уравнению (3.1) для п.в. $x \in J$.*

Теорема 2. *Пусть функция $F(x,y,z) : J \times R \times R \to R$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii). Функция $y(x) \in C(J) \cap C^1((0,a])$ будет решением краевой задачи (3.1), (3.2), если и только если она есть решение интегрального уравнения*

$$y(x) = \int_0^a G(x,t) F(t, y(t), D_0^\alpha y(t))dt. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение краевой задачи (3.1), (3.2). Так как согласно определению 5 $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J)$, то $D_0^\alpha y(x) = y'_{1-\alpha}(x) \in AC(J)$. Следовательно, в силу условий (i), (ii), (iii) $F\left(x, y(x), D_0^\alpha y(x)\right) : J \to R$ есть измеримая функция, причем $\left|F\left(x, y(x), D_0^\alpha y(x)\right)\right| \leqslant M$. В силу теоремы 1 $y(x)$ представимо в виде (3.3). Пусть теперь $y(x)$ - решение интегрального уравнения (3.9). Учитывая (2.4), представим (3.3) в виде

$$y(x) = -\frac{x^\alpha \cdot \delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x (x-t)^\alpha F[y(t)]dt, \tag{3.4}$$

где

$$\delta = \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} F[y(t)]dt.$$

Из (3.4) и леммы 1 следует, что $y(x) \in C(J)$ и $y(0) = 0$. Очевидно, что

$$y'(x) = -\frac{x^{\alpha-1}\delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left[y(t)\right] dt.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $y' \in C\left((0, a]\right)$ и $y'(a) = 0$. Осталось доказать, что $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J)$ и что $y(x)$ удовлетворяет уравнению 3.1 для п.в. $x \in J$.

В силу (3.4)

$$y_{1-\alpha} = I_0^{1-\alpha} y(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha} t^\alpha \delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} dt + I_0^{1-\alpha} I_0^{1+\alpha} F\left[y(x)\right] =$$

$$= -\frac{\delta x}{a^{\alpha-1}} + I_0^2 F[y(x)], I_0^2 F[y(x)] = \int_0^x (x-t) F[y(t)]dt.$$

Отсюда следует, что $y_{1-\alpha}(x) \in AC(J)$, а также что $D_0^\alpha y(x) = y'_{1-\alpha}(x) = \int_0^x F[y(t)]dt - \frac{\delta}{a^{\alpha-1}}$ есть абсолютно непрерывная функция. Следовательно, $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J)$. Наконец $D_0^{1+\alpha} y(x) = y''_{1-\alpha}(x) = F[y(x)]$ для п.в. $x \in J$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть функция $F(x, y, z) : J \times R \times R \to R$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) и условию Липшица*

$$|F(x, y, z) - F(x, y_1, z_1)| \leqslant L_1|y - y_1| + L_2|z - z_1|,$$

причем

$$\rho = \frac{L_1 a^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} + L_2 a < \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

Тогда существует единственное решение краевой задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Через $C_\alpha(J)$ обозначим множество функций $u(x) : J \to R$ таких, что $u(x) \in C(J), D_0^\alpha u(x) \in C(J)$ с нормой

$$\|u(x)\|_\alpha = \max\left(\|u(x)\|_C, \frac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \|D_0^\alpha u(x)\|_C\right).$$

$C_\alpha(J)$ с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ является [9] банаховым. Для $u(x) \in C_\alpha(J)$ определим оператор

$$Tu(x) = \int_0^a G(x,t)F\left(t, u(t), D_0^\alpha u(t)\right) dt.$$

Докажем, что T действует из $C_\alpha(J)$ в $C_\alpha(J)$. Пусть для $u(x) \in C_\alpha(J)$

$$w(x) = Tu(x) = -\frac{x^\alpha \delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha F[u(t)]dt,$$

$$\delta = \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} F[u(t)]dt.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $w(x) \in C(J), w(0) = 0$. Аналогично, как и выше, последовательно получим

$$w'(x) = -\frac{x^{\alpha-1}\delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^a (x-t)^{\alpha-1} F[u(t)]dt, w'(a) = 0;$$

$$D_0^\alpha w(x) = w'_{1-\alpha}(x) = -\frac{\delta}{a^{\alpha-1}} + \int_0^x F[u(t)]dt \in AC(J). \tag{3.5}$$

Следовательно, неподвижная точка оператора T будет решением краевой задачи (3.1), (3.2). Докажем, что оператор T является сжимающим. Пусть $u_k(x) \in C_\alpha(J), w_k(x) = Tu_k(x), k = 1, 2$. Тогда

$$|w_1(x) - w_2(x)| \leqslant \int_0^a |G(x,t)| \left(L_1 \|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) dt. \tag{3.6}$$

Так как

$$\sup\{\int_0^a |G(x,t)|dt; x \in J\} \leqslant \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha+1)},$$

то в силу (3.6) для $x \in J$ $|w_1(x) - w_2(x)| \leqslant \rho \|u_1(x) - u_2(x)\|_\alpha$. Следовательно,

$$\|w_1(x) - w_2(x)\|_C \leqslant \rho \|u_1(x) - u_2(x)\|_\alpha. \tag{3.7}$$

С учетом (3.5) получим, что для $x \in J$

$$|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)| \leqslant \frac{1}{a^{\alpha-1}} \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} \left|F[u_1(t)] - F[u_2(t)]\right| dt +$$

$$+ \int_0^x \left|F[u_1(t)] - F[u_2(t)]\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a^{\alpha-1}} \left(L_1 \|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) \cdot \frac{a^\alpha}{\alpha} +$$

$$+ L_1 \left(\|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) a = S,$$

$$S = \left(L_1 \|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) \frac{(1+\alpha)a}{\alpha}.$$

Значит

$$\|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)\|_C \leqslant S. \tag{3.8}$$

Используя оценку (3.8), получим

$$\begin{gathered}\frac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)\|_C \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha}\left(\frac{L_1 a^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|u_1(x)-u_2(x)\|_C + \right.\\ \left. + L_2 a\left(\frac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|v_1(x)-v_2(x)\|_C\right)\right) \leqslant \frac{(1+\alpha)\rho}{\alpha}\|u_1(x)-u_2(x)\|_\alpha.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) следует, что

$$\|w_1(x) - w_2(x)\|_\alpha = \max\left(\|w_1(x)-w_2(x)\|_C, \frac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)\|_C\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+\alpha)\rho}{\alpha}\|u_1(x)-u_2(x)\|_\alpha.$$

Следовательно, оператор $T : C_\alpha(J) \to C_\alpha(J)$ является сжимающим и его единственная неподвижная точка является единственным решением краевой задачи (3.1), (3.2). Теорема 3 доказана.

Замечание 1. *Пусть краевые условия (3.2) заданы в виде*

$$y(0) = 0, y'(a) = B. \tag{3.10}$$

Найдем решение краевой задачи $D_0^{1+\alpha}z(x) = 0, z(0) = 0, z'(a) = B$. *Используя лемму 1 и условие* $z(0) = 0$, *получим, что*

$$z(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}z'_{1-\alpha}(0) = 0, z'(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z'_{1-\alpha}(0).$$

Условие $z'(a) = B$ *дает, что* $z'_{1-\alpha}(0) = \frac{B\Gamma(\alpha)}{a^{\alpha-1}}$. *Тогда* $z(x) = \frac{x^\alpha \cdot B}{\alpha \cdot a^{\alpha-1}}, z_{1-\alpha}(x) = \frac{x\cdot B\cdot\Gamma(\alpha)}{a^{\alpha-1}}$, *сводится к задаче*

$$D_0^{1+\alpha}u(x) = g\left(x, u(x), D_0^\alpha u(x)\right), u(0) = u'(a) = 0,$$

где $g\left(x, u(x), D_0^\alpha u(x)\right) = F\left(x, u(x) + \frac{x^\alpha\cdot B}{\alpha a^{\alpha-1}}, D_0^\alpha u(x) + \frac{B\cdot\Gamma(\alpha)}{a^{\alpha-1}}\right)$.

Пример 1. *Рассмотрим краевую задачу*

$$D_0^{1.6}y(x) = f(x), y(0) = y'(1) = 0,$$

где $f(x) = \frac{24}{\Gamma(3.4)}x^{2.4} - \frac{12}{\Gamma(2.4)}x^{1.4} + \frac{2}{\Gamma(1.4)}x^{0.4}$.

Точное решение этой задачи $y(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$,

$$G(x,t) = \left[\begin{array}{c} -\frac{x^{0.6}(1-t)^{-0.4} - (x-t)^{0.6}}{\Gamma(1.6)}, 0 \leqslant t \leqslant x \\ -\frac{x^{0.6}(1-t)^{-0.4}}{\Gamma(1.6)}, x \leqslant t < 1. \end{array}\right.$$

Тогда решение этой задачи $y(x) = \displaystyle\int_0^1 G(x,t)f(t)dt = x^4 - 2x^3 + x^2$.

Заключение. В статье рассмотрен вопрос существования и единственности решения краевой задачи

$$D_0^{1+\alpha}y(x) = (F(x, y(x), D_0^{\alpha}y(x)), u(0) = u'(0) = 0,$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$ и D_0^{δ} — дробная производная Римана—Лиувилля.

1. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. – М. : Высш. шк., 1995. — 301 с.
2. **Нахушев А. М.** Элементы дробного исчисления и их применение / А. М. Нахушев. – М.: Физматлит., 2003. – 217 с.
3. **Васильев В. В.** Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев. – Киев: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, 2008. – 256 с.
4. **Nahushev A. M.** The Sturm-Liouville problem for a second order differential equation with fractional derivatives in the lower terms / A. M. Nahushev // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1997. – V. 234, No. 2. – P. 308–311.
5. **Zhang S.** Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations / S. Zhang // Electronic Journal of differential equations. – 2006. – V. 36. – P. 1–12.
6. **Zhang S.** Existence of solution for a boundary-value problem of fractional order / S. Zhang // Acta Mathematica Scienta B. – 2006. – V. 26, No. 2. – P. 220–228.
7. **Su X.** Solutions to boundary-value problems for nonlinear differential equations of fractional order / X. Su // Electronic Journal of Differential Equations. – 2009. – No. 26. – P. 1–15.
8. **Zhanbing Bai.** Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation / Bai Zhang, Lu Haisen // J. Math Anal. Appl. – 2005. – V. 311. – P. 495–505.
9. **Mykhailenko A. V.** Fractional boundary-value problem / A. V. Mykhailenko // Вісник Одеського національного університету. Матем. і мех. – 2013. – V. 18, Is. 2. – P. 69–76.
10. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
11. **Вірченко Н. О.** Основи дробового інтегро-диференціювання / Н. О. Вірченко, В. Я. Рибак. – Київ: Задруга, 2007. – 361 с.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
13. **Diethelm Kai.** The analysisis of fractional differential equation / Kai Diethelm. – Springerlang. Heidelberg, 2010. – 247 p.