Mathematical Subject Classification: 41A28
УДК 517.938.5+519.514.17

Є. С. Сілін
Донбаський державний педагогічний університет

ОДНОЧАСНА АПРОКСИМАЦІЯ ЛОКАЛЬНО ІНТЕГРОВНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ $\overline{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ. ВИПАДОК МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ

Сілін Є. С. Одночасна апроксимація локально інтегровних функцій та їх $\overline{\psi}$-інтегралів. Випадок малої гладкості. Розглянуто питання одночасного наближення локально інтегровних на дійсній осі функцій малої гладкості та їх $\overline{\psi}$-інтегралів за допомогою операторів Валле Пуссена. Знайдено асимптотичні закони поведінки верхніх граней функціоналів, які характеризують дану задачу.
Ключові слова: одночасна апроксимація, локально інтегрована функція, $\overline{\psi}$-інтеграл, оператор Валле Пуссена.

Силин Е. С. Одновременная аппроксимация локально интегрируемых функций и их $\overline{\psi}$-интегралов. Случай малой гладкости. Рассмотрены вопросы одновременного приближения локально интегрируемых на действительной оси функций малой гладкости и их $\overline{\psi}$-интегралов с помощью операторов Валле Пуссена. Найдены асимптотические законы поведения верхних граней функционалов, которые характеризуют данную задачу.
Ключевые слова: одновременная аппроксимация, локально интегрируемая функция, $\overline{\psi}$-интеграл, оператор Валле Пуссена.

Silin E. S. Simultaneous approximation of locally integrable functions and their $\overline{\psi}$-integrals. Low smoothness case. The article presents the problems of simultaneous approximation of locally integrable functions on the real axis of low smoothness and their integrals using Vallee Poussin operators. The asymptotic laws of behavior of the upper bounds of functionals are found that characterize this problem.
Key words: simultaneous approximation, locally integrable function, $\overline{\psi}$-integral, Vallee Poussin operator.

Вступ. В [1, 2] О. І. Степанець запропонував наступне означення класів $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Нехай $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара функцій $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ таких, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, де $\mathfrak{A}$ — множина неперервних при $t \geqslant 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(t) \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(t)$ зростає на $[0, 1)$; 2) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1, \infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$; 3) похідна функції $\psi'(t) = \psi'(t + 0)$ має обмежену варіацію на $[0, \infty)$; $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A} : \int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty\}$. Множину функцій $\psi(t)$, які задовольняють лише умову 2), позначають $\mathfrak{M}$.

Далі, співставимо кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ за умови $t \geqslant 1$ пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ та $\mu(t) = t/(\eta(t) - t)$. Тоді покладемо: $\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(t) \leqslant K_1\}$, $\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_2 \leqslant \mu(t) \leqslant K_3 < \infty\}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_C = \mathfrak{M}_C \bigcap \mathfrak{A}$, де K_j, $j = \overline{1, 3}$ — деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$. В роботі [3, с. 159–161] показано, що функції $\psi \in \mathfrak{A}_0$ не можуть спадати до нуля швидше деякої від'ємної степені t. Функції $\psi_\alpha(t) = \ln^\alpha(t+\varepsilon)$, $\psi_{\alpha,\beta}(t) = \ln^\alpha(t+\varepsilon)\ln^\beta\ln(t+\varepsilon)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 1$, $t \geqslant 0$ є прикладами функцій з множини $\mathfrak{A}_0$.

Покладемо: C — множина неперервних обмежених на дійсній осі функцій, $\mathfrak{N}$ — одинична куля $S_\infty = \{\varphi : \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \leqslant 1\}$ простору істотно обмежених функцій або клас $H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant \omega(|t-t'|)\forall t, t' \in \mathbb{R}\}$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. Тоді через $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначимо множину всіх неперервних функцій f, які $\forall x \in \mathbb{R}$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\widehat{\overline{\psi}}(t)\ dt \overset{\mathrm{df}}{=} A_0 + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}(x), \tag{1}$$

де $A_0 = \mathrm{const}$, інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються, функція $\varphi \in \mathfrak{N}$,

$$\widehat{\overline{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\psi_{1+}(x) + i\psi_{2-}(x))e^{-ixt}\ dx, \tag{2}$$

а ψ_{1+}, ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно. Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\widehat{\overline{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі (див., наприклад, [2], твердження 9.5.1). Функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) називають $\overline{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Відповідно, функцію $f(\cdot)$ в (1) називають $\overline{\psi}$-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і позначають $I^{\overline{\psi}}(\varphi;\cdot)$. Також зауважимо, що у випадку, коли $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ множини $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ містять в собі функції, які не мають жодної дробової похідної за Вейлем.

Функції $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ при кожних дійсних $\sigma > h \geqslant 1$ поставимо у відповідність оператор $V_{\sigma,h}(f;x)$, поклавши

$$V_{\sigma,h}(f;x) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(x),$$

де $\widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(x)$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,h}(t)\overline{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,h}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \leqslant \sigma - h, \\ \frac{\sigma-|t|}{h}, & \sigma - h \leqslant |t| \leqslant \sigma, \\ 0, & \sigma \le |t|. \end{cases}$$

Такі оператори розглядалися О. І. Степанцем у роботах [1, 2, 4, 5], де показано (наприклад, [2], твердження 9.3.4), що за умов $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$ оператори $V_{\sigma,h}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$, а у періодичному випадку, при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ і $h = p \in \mathbb{N}$, $p < n$, оператори $V_{\sigma,h}(f;x)$ співпадають зі сумами Валле Пуссена. Тому в подальшому називатимемо $V_{\sigma,h}(f;x)$ операторами Валле Пуссена.

Нам також знадобляться наступні означення.

Нехай $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}^{(1)}, \overline{\psi}^{(2)}, \ldots, \overline{\psi}^{(m)}\}$, де $\overline{\psi}^{(i)} = (\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)})$, $i = \overline{1,m}$ — довільні пари функцій, такі, що $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}'_0$. Далі, $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — довільний вектор з дійсними координатами і

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(\varphi;x;\overline{\psi};b)=\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\left(I^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi;x)-V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi;x))\right),\quad \varphi\in\mathfrak{N}. \qquad (3)$$

Для суми (3), яка визначена на множині $\mathfrak{N}$, має сенс величина

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(\mathfrak{N};\overline{\psi};b)=\sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}||\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(\varphi;x;\overline{\psi};b)||_C. \qquad (4)$$

Задача одночасного наближення функцій та їх $\overline{\psi}$-інтегралів операторами Валле Пуссена полягає в дослідженні величини (4). Раніше ця величина була досліджена нами в [6] за умов, що класи $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ містять функції великої гладкості:

$$\psi^{(i)}_j\in\{\mathfrak{A}:\eta'(t)\leqslant \text{const і } \lim_{\sigma\to\infty}(\eta(\sigma)-\sigma)=c, 0<c\leq\infty\},\quad j=1,2,\quad i=\overline{1,m},$$

числа $h=h(\sigma)$ обрані таким чином, що $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi^{(i)}_j;\sigma);\sigma]$, $j=1,2$, $i=\overline{1,m}$ та існують константи $K^{(i)}_1$, $K^{(i)}_2$, для яких виконується умова

$$0<K^{(i)}_1\leq\frac{\eta(\psi^{(i)}_1,\sigma)-\sigma}{\eta(\psi^{(i)}_2,\sigma)-\sigma}\leq K^{(i)}_2<\infty,\quad \sigma\geqslant1,\quad i=\overline{1,m}.$$

Задача одночасного наближення операторами Фур'є на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, тобто, у випадку $\psi_1(\sigma)=\psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma)=\psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $h=1$ та

$$\lambda^{*}_{\sigma,1}(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\sigma-1,\\ 1-\frac{(t-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma-1\leqslant t\leqslant\sigma,\\ 0, & t\geqslant\sigma\end{cases}$$

була розв'язана в [7]. У випадку 2π-періодичних функцій задача про одночасне наближення функцій та їх (ψ,β)-похідних сумами Фур'є на класах $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ розглядалася в [8]. У роботах [9] і [10] вивчалося одночасне наближення періодичних функцій та їх $\overline{\psi}$-інтегралів сумами Фур'є й Валле Пуссена, відповідно, на класах $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Якщо $m=1$, $b_1=1$ і $\overline{\psi}^{(1)}(\sigma)=\overline{\psi}(\sigma)$, то

$$\Sigma^{(1)}_{\sigma,h}(\mathfrak{N};\overline{\psi};1)=\frac{1}{\overline{\psi}(\sigma)}\sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}||I^{\overline{\psi}}(\varphi;x)-V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}}(\varphi;x))||_C.$$

Звідси випливає, що задача про одночасне наближення узагальнює задачу дослідження величин $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N};V_{\sigma,h})=\sup\limits_{\varphi\in\mathfrak{N}}||I^{\overline{\psi}}(\varphi;x)-V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}}(\varphi;x))||_C$, в тому сенсі, що має місце рівність $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N};V_{\sigma,h})=\overline{\psi}(\sigma)\Sigma^{(1)}_{\sigma,h}(\mathfrak{N};\overline{\psi};1)$.

Основні результати. Будемо вважати, що $h = h(\sigma)$ і $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{h}{\sigma} \overset{df}{=} \Theta$, $0 \leqslant \Theta < 1$.

Теорема. *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_0'$, $i = \overline{1,m}$. *Тоді для дійсних чисел* $\sigma > h \geqslant 1$ *і довільного вектора* $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ *з дійсними координатами при* $\sigma \to \infty$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b) = \frac{4}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi}\left|\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t}\ dt\right| + O(1),$$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega;\overline{\psi};b) = \Theta_\omega\left(\frac{2}{\pi^2}R_m\ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\ dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_1^\infty \psi_2^{(i)}(\sigma s)\sin st\ ds\ dt\right) + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right),$$

де $R_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $A_k = \sum\limits_{i=1}^k b_i \cos\gamma_\sigma^{(i)}$, $B_k = \sum\limits_{i=1}^k b_i \sin\gamma_\sigma^{(i)}$, $\gamma_\sigma^{(i)} = \mathrm{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}}{\psi_1^{(i)}}$; $\theta_\omega \in [2/3;1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ *— величина, яка рівномірно обмежена щодо* σ *та* h.

Доведення. Надалі через K будемо позначати постійне число, можливо, не одне і те саме в різних місцях тексту. В [11] показано, що в умовах теореми для дійсних $\sigma > h \geqslant 1$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(x) - V_{\sigma,h}(f;x) = \frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leqslant\pi/h}\delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t}\ dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin st\ ds\ dt +$$

$$+O(1)\left(\sum_{i=1}^2(\psi_i(\sigma-h) - \psi_i(\sigma)) + |\overline{\psi}(\sigma)|\right)\zeta(\mathfrak{N}), \tag{5}$$

де $a \in (0, \frac{\pi\sigma}{h})$, $\delta(x+t) = \begin{cases} f^{\overline{\psi}}(x) - f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо} f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega, \\ f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо} f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; \end{cases}$

$\gamma_\sigma = \mathrm{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$; $\zeta(\mathfrak{N}) = \begin{cases} \omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right), & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}H_\omega, \\ 1, & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; \end{cases}$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h.

$\forall\psi \in \mathfrak{M}_0$ справедлива нерівність $\psi(\varepsilon\sigma) \leqslant K\psi(\sigma)$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Тому $\psi(\sigma - h) \leqslant K\psi(\sigma)$, за умови, що $0 \leq \Theta < 1$. Приймаючи до уваги цей факт, на підставі співвідношень (3) і (5) одержуємо

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\overline{\psi};b) = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leq\pi/h}\frac{\delta(x+t)}{t}\sum_{i=1}^m b_i\sin(\sigma t - \gamma_\sigma^{(i)})\ dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds\ dt+O(1)\zeta(\mathfrak{N}),\gamma_\sigma^{(i)}=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}}{\psi_1^{(i)}}. \qquad (6)$$

Нехай, далі $R_k=\sqrt{A_k^2+B_k^2}$, $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\cos\gamma_\sigma^{(i)}$, $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\sin\gamma_\sigma^{(i)}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{m}b_i\sin(\sigma t-\gamma_\sigma^{(i)})=A_m\sin\sigma t-B_m\cos\sigma t=R_m\sin(\sigma t-\alpha_m), \qquad (7)$$

де

$$\alpha_m=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{B_m}{A_m}, & A_m\neq 0,\\ \frac{\pi}{2}, & A_m=0.\end{cases}$$

Згідно до рівностей (6)–(7)

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\overline{\psi};b)=\frac{-R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leq\pi/h}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\alpha_m)\ dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds\ dt+O(1)\zeta(\mathfrak{N}). \qquad (8)$$

Відмітимо, що, оскільки множини S_∞ і H_ω інваріантні щодо зсуву аргументу, то величина (4) не залежить від значення x. Таким чином

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\mathfrak{N};\overline{\psi};b)=\sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}\|\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;0;\overline{\psi};b)\|_C. \qquad (9)$$

Враховуючи рівності (4), (8)–(9), одержуємо

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b)\leq\sup_{\varphi\in S_\infty}\left|\frac{-R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leq\pi/h}\frac{\delta(t)}{t}\sin(\sigma t-\alpha_m)\ dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\delta(t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds\ dt\right|+O(1)\leq$$

$$\leqslant\frac{R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leq\pi/h}\left|\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{t}\right|\ dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds\right|\ dt+O(1). \qquad (10)$$

Далі спростимо вигляд правої частини нерівності (10). Функція

$$K_\sigma(t)=\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\ ds$$

неперервна і $K_\sigma(0) = 0$. Отже, в деякому околі $(0, a_0)$ вона зберігає знак (або дорівнює нулю). Тому, поклавши $a = a_0$ і враховуючи, що функція $K_\sigma(t)$ непарна, зі співвідношення (10) випливає

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b) \leqslant \frac{R_m}{\pi} \int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} \left|\frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{t}\right| \ dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)| \ dt + O(1). \quad (11)$$

Нехай [3, с. 232]

$$x_k = \tfrac{k\pi + \alpha_m}{\sigma}, \ t_k = x_k - \tfrac{\pi}{2\sigma}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ \alpha_m \in \mathbb{R}, \ \sigma \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Через k_0 позначимо те значення k, для якого t_{k_0} є найближча праворуч від точки $(a+\pi)/\sigma$ точка, в якій $\sin(\sigma t - \alpha_m) = 1$, а через k_1 — найбільше зі значень k таких, що $t_k < \pi/h$. Далі, через k_2 позначимо таке число, що точка t_{k_2} буде найближча ліворуч від точки $-(a+\pi)/\sigma$ серед тих, в яких $\sin(\sigma t - \alpha_m) = -1$, а через k_3 — найменше зі значень, що задовольняють умову $t_k > -\pi/h$, і покладемо

$$\begin{gathered} l_{\sigma,h}(t) = x_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = k_0, \ldots, k_1 - 1, \\ k = k_3, k_3 + 1, \ldots, k_2 - 1, \quad i_{3,1} = [t_{k_3}, t_{k_2}] \cup [t_{k_0}, t_{k_1}]. \end{gathered} \quad (13)$$

Користуючись схемою доведення леми 5.4.7 [3, с. 232–234], неважко переконатися, що має місце аналогічна

Лема. *Нехай a — довільне число, $\alpha_m \in \mathbb{R}$ і $\sigma > h \geqslant 1$. Тоді, якщо $\varphi \in S_\infty$, то в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} \varphi(t)\frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{t} \ dt = \int\limits_{i_{3,1}} \varphi(t)\frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \ dt + O(1), \quad (14)$$

якщо $\varphi \in H_\omega$, то для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} (\varphi(0) - \varphi(t))\frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{t} \ dt =$$

$$= \int\limits_{i_{3,1}} (\varphi(0) - \varphi(t))\frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \ dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (15)$$

В рівностях (14) – (15) проміжок $i_{3,1}$ та функція $l_{\sigma,h}(t)$ означені у (13), $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені щодо σ.

Продовжимо доведення теореми. З рівностей (11) та (14) випливає, що

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b) \leqslant \frac{R_m}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} \left|\frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)}\right| dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)|\, dt + O(1). \quad (16)$$

Покладемо

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)| \ dt, & |t| \leqslant \frac{a}{\sigma}, \\ \operatorname{sign} \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)}, & t \in i_{3,1} \end{cases}$$

і через $\varphi^*(t)$ позначимо функцію з множини S_∞, яка співпадає на множині $[-a/\sigma; a/\sigma] \cup i_{3,1}$ із функцією $\varphi_\sigma(t)$. Функція $\varphi^*(t)$ завжди буде існувати і для неї значення $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b)$ буде в точності збігатися з правою частиною (16). Тому

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b) = \frac{R_m}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \right| \, dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)| \, dt + O(1).$$

Скориставшись співвідношеннями (5.5.4) та (5.5.5) роботи [3, с. 236] переконуємося, що

$$\int\limits_{i_{3,1}} \left| \tfrac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \right| \, dt = \tfrac{4}{\pi} \ln \tfrac{\sigma}{h} + O(1),$$

$$\tfrac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{a}{\sigma}} \left| \int\limits_\sigma^\infty \psi_2(s) \sin st \, ds \right| \, dt = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_\sigma^\infty \tfrac{|\psi_2(t)|}{t} \, dt + O(1).$$

Таким чином, остаточно одержуємо

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b) = \frac{4}{\pi^2} R_m \ln \frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t} \, dt \right| + O(1).$$

Розглянемо випадок $\varphi \in H_\omega$. Згідно з рівностями (8) і (15)

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) \leqslant \sup_{\varphi \in H_\omega} \left| \frac{-R_m}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant a/\sigma} (\varphi(t) - \varphi(0)) \int\limits_\sigma^\infty \sum_{i=1}^m \frac{b_i \psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \sin st \, ds \, dt \right| + O(1) \omega \left(\frac{1}{\sigma - h} \right).$$

У [3, с. 239, 240] були одержані нерівності (5.5.16) та (5.5.17), при цьому фактично не використовувався той факт, що $n \in \mathbb{N}$ і φ — періодична функція. Тому

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) \leqslant \frac{R_m}{\sigma\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t \, dt \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_1-1}^{k_0} \frac{1}{x_k} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{a/\sigma} \omega(2t) \int\limits_\sigma^\infty \sum_{i=1}^m \frac{b_i \psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \sin st \, ds \, dt + O(1) \omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right). \qquad (17)$$

Далі, наслідуючи монографію [3, с. 240], означимо функцію $\widehat{\varphi} \in H_\omega$, для якої значення $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b)$ співпадає з правою частиною (17). Нехай

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2(x_k - t)), & t \in [t_k; x_k], \\ -\frac{1}{2}\omega(2(t - x_k)), & t \in [x_k; t_{k+1}], \end{cases} \quad k = \overline{k_3, k_2 - 1}, \; k = \overline{k_0, k_1 - 1},$$

де числа x_k і t_k означені у співвідношенні (12). Покладемо

$$\varphi_+(t) = (-1)^{k-k_0}\varphi_k(t) - \tfrac{1}{2}\left(\omega\left(\pi/\sigma\right) - \omega\left(2a/\sigma\right)\right), \quad t \in [t_k; t_{k+1}], \quad k = \overline{k_0, k_1 - 1}.$$

$$\varphi_-(t) = (-1)^{k-k_2+1}\varphi_k(t) + \tfrac{1}{2}\left(\omega\left(\pi/\sigma\right) - \omega\left(2a/\sigma\right)\right), \quad t \in [t_k; t_{k+1}], \quad k = \overline{k_3, k_2 - 1}.$$

$$\widehat{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2|t|), & |t| \leqslant \frac{a}{\sigma}, \\ \frac{1}{2}\omega(2a/\sigma), & t \in [a/\sigma, t_{k_0}], \\ \varphi_+(t), & t \in [t_{k_0}; t_{k_1}], \\ -\frac{1}{2}\omega(2a/\sigma), & t \in [t_{k_2}; -a/\sigma], \\ \varphi_-(t), & t \in [t_{k_3}; t_{k_2}]. \end{cases}$$

Функція $\widehat{\varphi}(t)$ — шукана екстремальна функція, оскільки, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, то $\widehat{\varphi} \in H_\omega$ і, як показують безпосередні підрахунки, для функції $\widehat{\varphi}(t)$ співвідношення (17) буде рівністю. Якщо ж $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, то співвідношення (17) буде рівністю з деяким множником $\Theta_\omega \in [2/3; 1]$.

Оскільки $\sum\limits_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum\limits_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} = \sigma\left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h} + O(1)\right)$, то неважко переконатися у справедливості рівності

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) = \Theta_\omega \left(\frac{2}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \int\limits_1^\infty \psi_2^{(i)}(\sigma s)\sin st\, ds\, dt \right) + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right).$$

Таким чином, теорема доведена.

Нехай $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1, m}$. Тоді, згідно до оцінки (5.3.4) [3, с. 214]

$$\left| \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2^{(i)}(t)|}{t}\, dt \right| = O(1). \tag{18}$$

В [3, с. 216] при $\sigma \in \mathbb{N}$ наведено співвідношення (5.3.11):

$$\frac{1}{\pi}\left| \int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \int\limits_\sigma^\infty \psi_2(\sigma s)\sin st\, ds\, dt \right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right) \int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2(s)|}{s}\, ds. \tag{19}$$

З оцінок (18)–(19) та доведеної теореми одержуємо

Наслідок 1. *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1, m}$, $0 \leqslant \Theta < 1$. *Тоді для* $\sigma > h \geqslant 1$ *при* $\sigma \to \infty$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b) = \frac{4}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} + O(1),$$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) = \frac{2\Theta_\omega}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\, dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right),$$

де $\Theta_\omega \in [2/3;1]$, *причому* $\Theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності і* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* σ, h.

Дослідимо можливість виконання рівності $R_m = 0$. Для цього скористаємося міркуваннями з [10, с. 261–264].

Наслідок 2. *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $0 \leqslant \Theta < 1$, $\sigma > h \geqslant 1$. *Якщо*

1. $m = 2$ *і* $b^* = (b_1, -b_1)$, $\frac{\psi_2^{(1)}(\sigma)}{\psi_1^{(1)}(\sigma)} = \frac{\psi_2^{(2)}(\sigma)}{\psi_1^{(2)}(\sigma)} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
2. $m \geqslant 3$ *і* $b^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)$ *— довільний вектор, координати якого задовольняють умову* $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^* = 0$, *якщо* $\gamma_\sigma^{(i)} = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,m}$, *або умову* $b_j^* = \frac{\sum\limits_{i\neq j,l} b_i^* \sin((\gamma_\sigma^{(i)}) - \gamma_\sigma^{(l)})}{\sin(\gamma_\sigma^{(i)} - \gamma_\sigma^{(j)})}$, $b_l^* = \frac{\sum\limits_{i\neq j,l} b_i^* \sin((\gamma_\sigma^{(i)}) - \gamma_\sigma^{(j)})}{\sin(\gamma_\sigma^{(i)} - \gamma_\sigma^{(l)})}$ *в іншому випадку,*

то при $\sigma \to \infty$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b^*) = O(1), \quad \Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b^*) = O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right),$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* σ, h.

Висновки. В статті розглянуто питання одночасного наближення локально інтегровних на дійсній осі функцій малої гладкості та їх $\overline{\psi}$-інтегралів за допомогою операторів Валле Пуссена. Знайдено асимптотичні закони поведінки верхніх граней функціоналів, які характеризують дану задачу.

1. **Stepanets A. I.** Approximation of locally integrable function on the real line / A. I. Stepanets, Wang Kunyang, Zhang Xirong // Укр. мат. журн. – 1999. – V. 51, № 11. – P. 1549–1561.
2. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.
3. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 426 с.
4. **Степанец А. И.** Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 2. – С. 198–209.
5. **Степанец А. И.** Приближение в пространствах локально интегрируемых функций / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, № 5. – С. 597–625.
6. **Силин Е. С.** Одновременное приближение функций и их $\overline{\psi}$-интегралов в равномерной метрике // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2004. – Т. 1, № 1. – С. 337–348.
7. **Степанец А. И.** Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике / А. И. Степанец, В. В. Дрозд // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17). – Киев, 1989. – 59 с.

8. **Степанец А. И.** Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
9. **Рукасов В. И.** Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках / В. И. Рукасов, С. О. Чайченко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – Т. 36. – С. 156–191.
10. **Соколенко І. В.** Одночасне наближення $\overline{\psi}$-інтегралів періодичних функцій сумами Фур'є / І. В. Соколенко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – Т. 46. – С. 249–264.
11. **Рукасов В. И.** Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена / В. И. Рукасов, Е. С. Силин // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 3. – С. 394–400.