Mathematical Subject Classification: 39A05
УДК 517.929.4

Ю. А. Чернецкая
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

Чернецька Ю. О. Про розв'язнiсть системи звичайних диференцiальних рiвнянь щодо похiдних. Дослiджуються питання про приведення системи звичайних диференцiальних рiвнянь, що не розв'язанi вiдносно похiдних, до систем, що розв'язанi вiдносно похiдних або частково розв'язанi вiдносно похiдних.
Ключовi слова: задача Кошi, неявнi функцiї.

Чернецкая Ю. А. О разрешимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно производных. Исследуются вопросы о приведении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, к системам, разрешенным относительно производных или частично разрешенным относительно производных.
Ключевые слова: задача Коши, неявные функции.

Chernetska I. The ordinary differential equations systems solubility in respect to the derivatives. Questions are investigated about bringing the system of ordinary differential equations not solved with respect to derivatives to the systems, solved with respect to derivatives, or partially solved with respect to derivatives.
Key words: Cauchy problem, implicit functions.

Введение. Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(t, x, \dot{x}) = 0, \\ x(t) \to 0, t \to 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

где вектор-функция $\Phi : D \to \Re^m$ — непрерывна в $D = \{(t, x, \dot{x}) : t \in (0; a]$, $\|x\| \leqslant b, \|\dot{x}\| \leqslant b\}, a, b > 0$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$; где $\|x\| = \max |x_i|, i = 1, ..., n$.

Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производных, называемые также неявными дифференциальными уравнениями, известны давно и возникают во многих прикладных задачах. Такие уравнения появляются в математической экономике (уравнение межотраслевого баланса), теории электрических цепей, теории Марковских процессов, в задачах оптимального управления, химической кинетики и т. д.

Современное развитие теории дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, включает в себя исследование сингулярных уравнений и систем уравнений в вещественных и комплексных областях. В работах Еременко А., Самойленко А. [3], Старуна И., Шкиля Н. [5], Яковца В. и других изучались вопросы существования и асимптотического поведения решений систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных с постоянными и переменными пучками матриц. Также исследование дифференциальных систем, не разрешенных относительно производных, в вещественной области проводятся в работах Аширова О., Бабкина Б. Н., Витюка А. Н., Грабовской Р. Г., Диблика Й., Самковой Г. Е. [2, 4], Hanke M., Lando M., Campbell St., Marz R., Каплун Ю., Кравцова П. и многих других

В данной работе изучается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, вида (1), при дополнительном условии:

$$\dot{x}(t) \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0. \tag{2}$$

Данная работа является распространением метода Грабовской Р. Г. и Диблика Й. [1, 6] на более общие классы начальных задач.

Предлагается алгоритм разрешимости задачи (1)–(2) относительно производных, или относительно части компонент вектора производной.

Основные результаты. Рассмотрим пошагово алгоритм приведения задачи (1)–(2) к задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных или частично разрешенных относительно производных относительно новой неизвестной функции. Для этого проделываются следующие шаги:
1. Вводятся вспомогательные функции

$$\begin{cases} x = \pi_0(t, Y, S), \\ \dot{x} = \pi_1(t, Y, S), \end{cases} \tag{3}$$

где $\pi_i : G_1 \times G_2 \times G_3 \to \Re^n, i = 0, 1$, области $G_1 \subseteq \Re, G_2 \subseteq \Re^k, G_3 \subseteq \Re^l$, $0 \in G_1$, $0 \in G_2, 0 \in G_3$, $Y = (Y_1, ..., Y_k)^T, S = (S_1, ..., S_\ell)^T$. Полагается, что функция π_0 — непрерывно-дифференцируема, а функция π_1 — непрерывна при $(t, Y, S) \in G_1 \times G_2 \times G_3$ и

$$\pi_i(0, 0, 0) = 0, i = 0, 1. \tag{4}$$

2. Предполагается, что существует такая функция $T : G_1 \times G_2 \times G_3 \to \Re^p$, что в некоторой окрестности точки $(0; 0; 0)$ справедливо представление:

$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, S), \pi_1(t, Y, S)) \equiv F(t, Y, S, T(t, Y, S)).$$

Определение 1. *Будем говорить, что для функции T выполнено условие* $\boldsymbol{A}$*, если:*

1) (t, Y, S) *— непрерывна в области* $G_1 \times G_2 \times G_3$*;*
2) *либо* $T(0, 0, 0) = 0$*, либо функцию* T *в чке* $(0, 0, 0)$ *можно доопределить:* $(0, 0, 0) = 0$*;*
3) *существуют и непрерывны в* $G_1 \times 2 \times G_3$ *все частные производные функций* $T_j = T_j, Y, S), j \in \{1, ..., p\}$ *по всем аргументам;*
4) *некоторый функциональный определитель в точке* $(0, 0, 0)$ *отличен от нуля.*

Уточнение пункта 4) условия $\boldsymbol{A}$ *в каждом конкретном случае будем проводить отдельно.*

Если функция T удовлетворяет условию A, то система

$$T(t, Y_1, ..., T_k, S_1, ..., S_l) = 0 \tag{5}$$

или разрешима относительно вектор-функции S, или разрешима относительно части компонент вектор-функции S. Это позволит с учетом (3), т. е. с учетом того, что

$$(\pi_0)'_t = \pi_1, \tag{6}$$

перейти от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) к задаче Коши, разрешенной или частично разрешенной относительно производных. При этом могут возникнуть условия совместности.

Рассмотрим различные случаи разрешимости или частичной разрешимости системы (5) в окрестности точки $(0,0,0)$, относительно вектор-функции S, или относительно части компонент вектор-функции S и получим в каждом из случаев соответствующую задаче Коши (1) с дополнительным условием (2), новую начальную задачу.

Случай 1:

Предположим, что $p = l$ и функция T удовлетворяет условию $\boldsymbol{A}$, где пункт 4) имеет вид: функциональный определитель $\frac{DT}{DS}\Big|_{(0,0,0)} \neq 0$.

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что система (5) однозначно разрешима в окрестности точки $(0;0;0)$ относительно вектор-функции S, причем вектор-функция $S = w(t,Y)$, где $w(t,Y) = col\,(\mathrm{w}_1(\mathrm{t},\mathrm{Y}),...,\mathrm{w}_\ell(\mathrm{t},\mathrm{Y}))$, непрерывна в области $J_1 \times J_2$, $J_1 \times J_2 \subseteq G_1 \times G_2$, $(0,0) \in J_1 \times J_2$, и функции $w_1,...,w_\ell$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и $w(0,0) = 0$.

Случай 2:

Предположим, что $1 \leqslant p < l$, функция T удовлетворяет условию $\boldsymbol{A}$, где пункт 4) имеет вид: функциональный определитель $\frac{D(T_1,...,T_p)}{D(S_1,...,S_p)}\Big|_{(0,0,...,0)} \neq 0$.

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что система

$$T_j(t,Y_1,...,Y_k,S_1,...,S_p,S_{p+1},...,S_l) = 0, j = 1,...,p \tag{7}$$

однозначно разрешима в окрестности точки $(0,0,\ldots,0)$ относительно вектор-функций $S_j = w_j(t,Y,S_{p+1},\ldots,S_\ell)$, $j = 1,\ldots,p$, причем вектор-функции $w_j(t,Y, S_{p+1},\ldots,S_\ell)$, $j = 1,\ldots,p$ непрерывны в области

$$J_1 \times J_2 \times J_3, J_1 \times J_2 \times J_3 \subseteq G_1 \times G_2 \times \tilde{G}_3, \tilde{G}_3 \subseteq \Re^{\ell-p}, (0,0,\ldots,0) \in J_1 \times J_2 \times J_3,$$

функции $w_1,...,w_p$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и $w_j(0,0,\ldots,0) = 0, j = 1,\ldots,p$.

Случай 3:

Предположим, что $l < p$, функция T удовлетворяет условию $\boldsymbol{A}$, где пункт 4) имеет вид: $\frac{D(T_1,...,T_l)}{D(S)}\Big|_{(0,0,....,0)} \neq 0$.

Тогда система

$$T_i(t,Y_1,...,Y_k,S_1,...,S_l) = 0, i = 1,...,l \tag{8}$$

однозначно разрешима в окрестности точки $(0,\ldots,0)$ относительно вектор-функций $S_i = w_i(t,Y)$, $i = 1,...,l$, причем они непрерывны в области $J_1 \times J_2$, точка $(0,0) \in J_1 \times J_2$, и функции $w_1,...,w_\ell$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и $w_i(0,0) = 0$, $i = 1,\ldots,l$.

На систему

$$T_q(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_l) = 0, q = \ell + 1, ..., p \tag{9}$$

будем смотреть, как на условие совместности.

Случай 4:

Предположим, что существует такое число $m : 1 \leqslant m < p, 1 \leqslant m < l$, что функция удовлетворяет условию ***A,*** где пункт 4) имеет вид: функциональный определитель $\frac{D(T_1,...,T_m)}{D(S_1,...,S_m)}\Big|_{(0,...,0)} \neq 0$.

Тогда система (5) распадается на 2 системы:

$$T_i(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_m, S_{m+1}, ..., S_l) = 0, i = 1, ..., m, \tag{10}$$

$$T_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_m, S_{m+1}, ..., S_l) = 0, j = m + 1, ..., p. \tag{11}$$

Система (10) однозначно разрешима в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$ относительно вектор-функций $S_i = w_i\ (t, Y, S_{m+1}, \ldots, S_l)$, $i = 1, \ldots, m$, причем $w_i(t, Y, S_{m+1}, \ldots, S_l)$, $i = 1, \ldots, m$ непрерывны в области $J_1 \times J_2 \times J_4, J_1 \times J_2 \times J_4 \subseteq G_1 \times G_2 \times \tilde{G}_4, \tilde{G}_4 \subseteq \Re^{\ell - m}$, и точка $(0, 0, \ldots, 0) \in J_1 \times J_2 \times J_4$, функции $w_1, ..., w_m$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и выполнено условие $w_i(0, \ldots, 0) = 0, i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим случаи 1 и 2 более подробно.

Случай 1:

Функция $S = w(t, Y)$ — непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем переменным в окрестности точки $(0, 0) \in J_1 \times J_2$, $J_1 \times J_2 \subseteq G_1 \times G_2$, и удовлетворяет условиям $w_j(0, 0) = 0, j = 1, \ldots, l$.

Кроме того, если в $J_1 \times J_2$ — области непрерывности функции $w(t, Y)$, справедливо:

$$F(t, Y, w(t, Y), T(t, Y, w(T, Y)) \equiv 0,$$

тогда:

$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, w(t, Y)), \pi_1(t, Y, w(t, Y)) \equiv 0, \text{ при } (t, Y) \in J_1 \times J_2.$$

При $S_j = w_{\mathrm{j}}(t, Y), j = 1, ..., \ell$, замена (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} x &= \pi_0(t, Y, w_1(t, Y), ..., w_\ell(t, Y)), \\ \dot{x} &= \pi_1(t, Y, w_1(t, Y), ..., w_\ell(t, Y)), \end{aligned} \tag{12}$$

Дифференцируя по t первое из соотношений (12) и приравнивая его второму, получим систему дифференциальных уравнений с неизвестной вектор-функцией $Y(t)$ вида:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \pi_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \pi_0}{\partial Y_j} Y_j' + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left(\sum_{m=1}^{k} \frac{\partial w_i}{\partial Y_m} Y_m' \right) = \\ &\quad = \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k), ..., w_\ell(t, Y_1, ..., Y_k)). \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим различные виды функций $\pi_i(t, Y, S), i = 0, 1$, которые с учетом условия связи (6) позволят разрешить задачу (1) с дополнительным условием (2) относительно производной новой неизвестной функции.

1.1. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y), \end{array} \right. \tag{14}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \varphi_2 : G_1\times G_2 \to \Re^{n\times l}, \psi_2 : G_1\times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t, Y), \psi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4): $\psi_1(0) = 0$ и $\psi_2(0, 0) = 0$. Система (13) имеет вид:

$$\varphi_1^{'}(t)Y + \varphi_1(t)Y^{'} + \psi_1^{'}(t) = \varphi_2(t, Y)w(t, Y) + \psi_2(t, Y).$$

Т. е. вид:

$$A_1(t)Y^{'} = B_1(t)Y + f_1(t, Y), \tag{15}$$

где $A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = -\varphi_1^{'}(t);\ f_1(t, Y) = \psi_2(t, Y) - \psi_1^{'}(t) + \varphi_2(t, Y)w(t, Y)$.

В итоге от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1(t)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y) \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{array} \right. \tag{16}$$

Если матрица $\varphi_1(t) = A_1(t) = A_1$ постоянная при $t \in G_1$, $A_1 \in \Re^{n\times k}$, то матрица $B_1 = 0$ и задача (16) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1Y' = f_1(t, Y) \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{array} \right.$$

1.2. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi(t, Y). \end{array} \right. \tag{17}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\xi : G_1\times$ $\times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t, Y)$, $\xi(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4):

$$\psi_1(0) = 0, \quad \xi(0, 0) = 0.$$

Система (13) примет вид (15). Тогда от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче вида (16), где

$$A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t, Y) = \psi_2(t, Y)w(t, Y) - \psi_1^{'}(t) + \xi(t, Y).$$

Если матрицы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ постоянны при $t \in G_1$, то в системе (16) матрицы $A_1(t)$ и $B_1(t)$ будут постоянными.

1.3. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t)S + \xi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi_2(t, Y). \end{array} \right. \tag{18}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^{n\times l}, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\xi_1 : G_1 \to \Re^n, \xi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t), \xi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t), \psi_2(t, Y), \xi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4):

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0, 0) = 0.$$

Используя систему (6) и заданные функции $\pi_i, i = 0, 1$ в (18), получим ветвь для задачи Коши (1) с дополнительным условием (2):

$$\varphi_1'(t)Y + \varphi_1(t)Y' + \psi_1'(t)w(t, Y) + \psi_1(t)w_t'(t, Y) + \psi_1(t)w_Y'(t, Y)Y' + \xi_1'(t) =$$
$$= \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)w(t, Y) + \xi_2(t, Y).$$

Тогда получим систему:

$$A_1(t, Y)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y),$$

где $A_1(t, Y) = \varphi_1(t) + \psi_1(t)w_Y'(t, Y); B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1'(t);$

$$f_1(t, Y) = \psi_2(t, Y)w(t, Y) - \psi_1(t)w_t'(t, Y) - \xi_1'(t) + \xi_2(t, Y) - \psi_1'(t)w(t, Y).$$

В итоге от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши вида:

$$\begin{cases} A_1(t, Y)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y), \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases} \tag{19}$$

1.4. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)S + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y). \end{cases} \tag{20}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times l}, \varphi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t, Y), \psi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4):

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0, 0) = 0.$$

Продифференцируем первое уравнение системы (20) по t, получим:

$$(\pi_0)_t' = \varphi_1'(t)w(t, Y) + \varphi_1(t)w_t'(t, Y) + \varphi_1(t)w_Y'(t, Y)Y' + \psi_1'(t).$$

Тогда получим систему:

$$A_1(t, Y)Y' = B_1(t, Y),$$

где

$$A_1(t, Y) = \varphi_1(t)w_Y'(t, Y);$$

$$B_1(t, Y) = -\varphi_1'(t)w(t, Y) - \varphi_1(t)w_t'(t, Y) - \psi_1'(t) + \varphi_2(t, Y)w(t, Y) + \psi_2(t, Y).$$

Тогда задача Коши (1) с дополнительным условием (2) свелась к задаче Коши вида:

$$\begin{cases} A_1(t, Y)Y' = B_1(t, Y) \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases} \tag{21}$$

В итоге справедлива:

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функция* $\Phi : D \longrightarrow \Re^m$ *— непрерывна в* D*;*

2) *существуют такие непрерывно-дифференцируемая функция* π_0*, непрерывная функция* π_1 *при* $(t, Y, S) \in G_1 \times G_2 \times G_3$*, удовлетворяющие условию (4), что функция* T *удовлетворяет условию* $\boldsymbol{A}$*;*

3) *справедливо тождество:*

$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, \omega(t, Y)), \pi_1(t, Y, \omega(t, Y))) \equiv 0,$$

при $(t, Y) \in J_1 \times J_2$.

Тогда:

a) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (14) или (17), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (16);*

b) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (18), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (19);*

c) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (20), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (21).*

Теперь рассмотрим ***случай 2***, здесь появляются две логические ситуации относительно переменных $S_j, j = 1, \dots, p$.

Функции $w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell)$, $j = 1, \dots, p$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем переменным в окрестности точки $(0, 0, \dots, 0) \in J_1 \times J_2 \times J_3$, и удовлетворяет условию $w_j(0, 0, \dots, 0) = 0$, где $j = 1, \dots, p$.

Кроме того, если в области непрерывности функций $w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_l)$, $j = 1, \dots, p$, справедливо:

$$\begin{gathered} F(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell)), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} T(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell)) \equiv 0, \end{gathered}$$

тогда:

$$\begin{gathered} \Phi(t, \pi_0(t, Y_1 ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\[1ex] w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell), \\[1ex] \pi_1(t, Y_1 ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\[1ex] w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell))) \equiv 0, \end{gathered}$$

при $(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell) \in J_1 \times J_2 \times J_3$.

При помощи функций $w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell)$, $j = 1, \dots, p$, осуществляется переход от системы (1) к системе, разрешенной или частично разрешенной относительно производных.

При $S_j = w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell)$, $j = 1, \dots, p$, замена (3) принимает вид:

$$\begin{cases} x = \pi_0(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ \qquad w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell), \\ \dot{x} = \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ \qquad w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell), \end{cases} \tag{22}$$

Дифференцируя первое из соотношений (22) по t и приравнивая его второму, получим систему дифференциальных уравнений (6) с неизвестной функцией $Y(t)$. Здесь возможны две логические ситуации.

Первая ситуация:
Считаем $S_{p+1}, ..., S_l$ — параметрами, тогда система (6) имеет вид:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \pi_0}{\partial Y_j} Y_j' + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left(\sum_{m=1}^{k} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial Y_m} Y_m' \right) =$$

$$= \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ...,$$
$$w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell).$$

Вторая ситуация:
Считаем, что $S_j = S_j(t)$, $j = p+1, \dots, l$. Тогда система дифференциальных уравнений (6) примет вид:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \pi_0}{\partial Y_j} Y_j' + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left(\sum_{m=1}^{k} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial Y_m} Y_m' \right) +$$

$$+ \sum_{j=p+1}^{l} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} S_j' + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left(\sum_{m=p+1}^{l} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial S_m} S_m' \right) =$$
$$= \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}(t), ..., S_\ell(t)), ...,$$
$$w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}(t), ..., S_\ell(t)), S_{p+1}(t), ..., S_\ell(t)).$$

Рассмотрим различные виды функций $\pi_i(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_l), i = 0, 1,$ которые с учетом (22) позволят разрешить задачу Коши (1) с дополнительным условием (2) относительно производной новой неизвестной функции.

Рассмотрим некоторые виды функций $\pi_i, i = 0, 1$.

2.1. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t) Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t, Y) S + \psi_2(t, Y), \end{cases} \tag{23}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n \times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n$, $\varphi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n \times \ell}$, $\psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t, Y), \psi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0, 0) = 0.$$

Используя систему (6) и функции $\pi_i, i = 0, 1$ в (23), получим:

$$\varphi_1'(t)Y + \varphi_1(t)Y' + \psi_1'(t) = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y),$$

где $S = col(S_1, \ldots, S_p, S_{p+1}, \ldots, S_\ell)$, причем $S_j = w_j(t, Y, S_{p+1}, \ldots, S_\ell), j = 1, \ldots, p$. Получим систему вида:

$$A_1(t)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), \tag{24}$$

где $A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = -\varphi_1^{'}(t);$

$$f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) = \psi_2(t, Y) - \psi_1^{'}(t) + \varphi_2(t, Y)col(w_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), ...,$$

$$w_p(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), S_{p+1}, ..., S_\ell).$$

Таким образом, от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши

$$\begin{cases} A_1(t)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases} \tag{25}$$

2.2. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi(t, Y), \end{cases} \tag{26}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}, \xi : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t), \psi_2(t, Y)$, $\xi(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \xi(0, 0) = 0.$$

Тогда от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче вида (25), где

$$A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell) = \psi_2(t, Y)col(w_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), ...,$$

$$w_p(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), S_{p+1}, ..., S_l) - \psi_1^{'}(t) + \xi(t, Y).$$

2.3. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t)S + \xi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi_2(t, Y), \end{cases} \tag{27}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^{n\times l}, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\xi_1 : G_1 \to \Re^n, \xi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t), \xi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t), \psi_2(t, Y), \xi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0, 0) = 0.$$

Используя систему (6) и заданные функции $\pi_i, i=0,1$ в (27), получим ветвь для задачи Коши (1) с дополнительным условием (2).

Первая ситуация: считаем $S_{p+1},...,S_l$ — параметрами. Пусть:

$$\Phi_i(t)=\begin{pmatrix} \varphi'_{i_{11}}(t) & \dots & \varphi'_{i_{1k}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{i_{n1}}(t) & \dots & \varphi'_{i_{nk}}(t) \end{pmatrix}, i=1,2$$

$$\Psi_1(t)=\begin{pmatrix} \psi_{1_{11}}(t) & \dots & \psi_{1_{1l}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1_{n1}}(t) & \dots & \psi_{1_{nl}}(t) \end{pmatrix}, \Psi_2(t,Y)=\begin{pmatrix} \psi_{2_{11}}(t,Y) & \dots & \psi_{2_{1l}}(t,Y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{2_{n1}}(t,Y) & \dots & \psi_{2_{nl}}(t,Y) \end{pmatrix},$$

$$W(t,Y,S_{p+1},...,S_l)=\begin{pmatrix} w_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ \vdots \\ w_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right]_{\substack{i=1,...,p,\\ j=1,...,k}} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial\omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial\omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial\omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_k} \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right]_{\substack{i=1,...,p,\\ g=p+1,...,\ell}} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial\omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_{p+1}} & \dots & \frac{\partial\omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_{p+1}} & \dots & \frac{\partial\omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_l} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем:

$$\Phi'_1(t)\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix}+\Phi_1(t)\begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix}+\Psi'_1(t)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix}+$$

$$+\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left(W(t,Y,S_{p+1},...,S_l)\right)'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right]_{\substack{i=1,...,p,\\ j=1,...,k}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t) \end{pmatrix} = \Phi_2(t) \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} + \Psi_2(t,Y) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y) \end{pmatrix}.$$

Тогда получим систему:

$$A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)Y' = B_1(t)Y + f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell), \tag{28}$$

где

$$A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell) = \Phi_1(t) + \Psi_1(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell) = \Psi_2(t,Y) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y) \end{pmatrix} -$$

$$-\Psi_1^{'}(t) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} - \Psi_1(t) \begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t) \end{pmatrix}.$$

Вторая ситуация:
Считаем, что $S_j = S_j(t)$, $j = p+1,\ldots,l$. Тогда система дифференциальных уравнений (6) примет вид:

$$\Phi_1^{'}(t) \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} + \Phi_1(t) \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix} + \Psi_1^{'}(t) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t) \end{pmatrix} +$$

$$+\Psi_1(t) \begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ S'_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S'_l(t) \end{pmatrix} + \Psi_1(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix} +$$

$$+\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] & i=1,...,p, \\ & g=p+1,...,\ell \\ 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S'_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S'_l(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\Phi_2(t)\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k\end{pmatrix}+\Psi_2(t,Y)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y)\end{pmatrix}.$$

Тогда получим систему (28),

где $A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)=\Phi_1(t)+\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] & i=1,...,p, \\ & j=1,...,k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$B_1(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)=\Psi_2(t,Y)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y)\end{pmatrix}-$$

$$-\Psi_1^{'}(t)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t)\end{pmatrix}-\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] & i=1,...,p, \\ & g=p+1,...,\ell \\ 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S'_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S'_l(t)\end{pmatrix}-$$

$$-\Psi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью преобразований от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши вида:

$$\begin{cases} A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)Y'=B_1(t)Y+f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell), \\ Y(t)\to 0, t\to 0, \end{cases} \tag{29}$$

где $S_{p+1},...,S_\ell$ — либо функции, зависящие от t, либо параметры.

2.4. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)S + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y), \end{cases} \tag{30}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n \times l}, \varphi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n \times l}, \psi_1 : G_1 \to \Re^n, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывны, $\varphi_2(t, Y), \psi_2(t, Y)$ — непрерывны и дифференцируемы в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0, 0) = 0.$$

Продифференцируем первое уравнение системы (30) по t, и при условии, что $S_{p+1}, ..., S_l$ — параметры, получим:

$$(\pi_0)'_t = \varphi'_1(t) \begin{pmatrix} W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \varphi_1(t) \begin{pmatrix} (W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l))'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_1(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i = 1, ..., p, \\ j = 1, ..., k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix} + \psi'_1(t).$$

Тогда задача Коши (1) с дополнительным условием (2) примет вид:

$$\begin{cases} A_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l)Y' = f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ Y(t) \to 0, t \to 0, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$A_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell) = \varphi_1(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i = 1, ..., p, \\ j = 1, ..., k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) = -\varphi'_1(t) \begin{pmatrix} W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} -$$

$$-\varphi_1(t) \begin{pmatrix} (W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l))'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \psi'_1(t) + \varphi_2(t, Y) \begin{pmatrix} W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \psi_2(t, Y).$$

Далее будем рассматривать $S_j = S_j(t)$, $j = p+1, \ldots, l$. Тогда, продифференцировав первое уравнение системы (30) по t, получим:

$$\varphi_1'(t)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \varphi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1' \\ \vdots \\ Y_k' \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_1(t) + \Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ g=p+1,...,\ell \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{p+1}'(t) \\ \vdots \\ S_l'(t) \end{pmatrix} + \psi_1'(t).$$

Тогда задача Коши (1) с дополнительным условием (2) примет вид (31), где

$$A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell) = \varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l) = -\varphi_1^{'}(t)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} -$$

$$-\varphi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ g=p+1,...,\ell \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{p+1}'(t) \\ \vdots \\ S_l'(t) \end{pmatrix} -$$

$$-\psi_1^{'}(t) + \varphi_2(t,Y)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \psi_2(t,Y).$$

В итоге справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функция* $\Phi : D \longrightarrow \Re^m$ *— непрерывна в* D*;*
2) *существуют такие непрерывно-дифференцируемая функция* π_0*, непрерывная функция* π_1 *при* $(t, Y, S) \in G_1 \times G_2 \times G_3$*, удовлетворяющие условию (4), что функция* T *удовлетворяет условию* ***A****;*
3) *справедливо тождество:*

$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, \omega(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell), \pi_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell)) \equiv 0,$$

при $(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell) \in J_1 \times J_2 \times J_3$.

Тогда:

a) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (23) или (26), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (25);*
b) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (27), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (29);*
c) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (30), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (31).*

Заключение. В данной работе изучена задача Коши (1)–(2), предложен алгоритм или разрешимости системы в задаче (1) относительно производной, или разрешимости системы в задаче (1) относительно части компонент вектора производной. Рассмотрены два случая, в каждом из которых предложены виды функций $\pi_i, i = 0, 1$, при помощи которых можно осуществить переход от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) для ***случая 1*** к задачам Коши видов (16), (20), (22), и для ***случая 2*** к задачам Коши видов (25), (29), (31).

1. **Грабовская Р. Г.** Асимптотика систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных / Р. Г. Грабовская, Й. Диблик. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1786. – С. 78.
2. **Самкова Г. Е.** О разрешимости и асимптотическом поведении решений некоторых полуявных систем / Г. Е. Самкова // Reports of enlarge session of the seminar of L. N. Vekua Institute of applied mathematics. – Tbilisi, 1992. – V. 7, № 3.
3. **Самойленко А. М.** Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных / А. М. Самойленко // Укр. мат. журнал. – 2002. – Вип. 54, №11. – С. 1505–1517.
4. **Шарай Н. В.** Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь / Н. В. Шарай, Г. Є. Самкова // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 181–188.
5. **Шкиль Н. И.** Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – Киев: Вища школа, 1991. – 207 с.
6. **Diblic J.** On the an asymptotic behavior of solutions of a certain system of quasilinear differential equations not solved wich respect to derivatives / J. Diblic // Rici Math. Univ. Parma. – 1987. – № 13. – P. 413–419.