

Mathematical Subject Classification: 74B05, 42A38
УДК 539.3

Ю. С. Процеров

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Процеров Ю. С. Вісесиметрична задача кручення багат шарового циліндра скінченої довжини. Побудовано точний розв'язок вісесиметричної задачі теорії пружності про кручення багат шарового суцільного або порожнистого циліндра під впливом дотичного навантаження, що прикладена до бічної поверхні циліндра. Шари знаходяться в умовах ідеального механічного контакту та відрізняються один від іншого товщиною та модулем зсуву. Нижня основа циліндра є нерухомо фіксована, верхня — вільна від напружень. За допомогою скінченого інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до сукупності одновимірних крайових задач з умовами спряження шарів. За допомогою матричного запису умов спряження отримано зручні рекурентні формули для відшукування сталих інтегрування кожного з шарів. Запропонований метод у порівнянні з традиційним дозволяє суттєво скоротити об'єм розрахунків та легко оцінити напружено-деформівний стан кожного з шарів. Метод проілюстровано двома прикладами для суцільного та порожнистого циліндрів.

Ключові слова: пружний багат шаровий циліндр, суцільний порожнистий циліндр, осьова симетрія, кручення, рекурентні формули.

Процеров Ю. С. Осесимметричная задача кручения многослойного цилиндра конечной длины. Построено точное решение осесимметричной задачи теории упругости о кручении многослойного сплошного или полого цилиндра под действием касательной нагрузки, приложенной к боковой поверхности цилиндра. Слои находятся в условиях идеального механического контакта и отличаются друг от друга толщиной и модулем сдвига. Нижнее основание цилиндра неподвижно закреплено, а верхнее свободно от напряжений. При помощи конечного интегрального преобразования Фурье задача сведена к совокупности одномерных краевых задач с условиями сопряжения слоев. При помощи матричной записи условий сопряжения получены удобные рекуррентные формулы для нахождения постоянных интегрирования в каждом из слоев. Предложенный метод, по сравнению с традиционными, позволяет существенно сократить объем вычислений и легко находить напряженно-деформируемое состояние в каждом из слоев. Метод проиллюстрирован двумя примерами для сплошного и полого двухслойных цилиндров.

Ключевые слова: упругий многослойный цилиндр, сплошной или полый, осевая симметрия, кручение, рекуррентные формулы.

Protserov Yu. S. Axisymmetric torsion problem for the finite length multilayered cylinder. The exact solution of the axisymmetric elasticity problem on the torsion of the multilayered massive and hollow cylinder under an influence of the torsion loading at the lateral cylinder's surface. The layers are in the conditions of the ideal mechanical contact and are difference from each other by the thickness and shear's module. The lower base is fixed unmovable, the upper one is free from stress. With the Fourier's finite integral transformation the problem is reduced to the system of the one dimensional boundary problems

with the conditions of the layer's conjugation. The matrix view of the conjugation conditions allows to obtain the comfortable recurrent formulas for the searching of the integration constants of the layers. In comparing with the traditional methods, the proposed method gives opportunity to reduce sufficiently the calculation volume and easy estimate the stress state in each layer. The method is illustrated on the examples of the massive and hollow two layered cylinders.

Key words: elastic multilayered cylinder, massive and hollow, axisymmetric, torsion, recurrent formulas.

ВВЕДЕНИЕ. Осесимметричным задачам кручения упругих многослойных цилиндров посвящено значительное число работ, что обусловлено их широким применением в инженерной практике. Традиционный метод решения задач кручения – это сведение их к краевым задачам относительно функции напряжения или функции смещения [1, 3, 6]. Однако он имеет тот недостаток, что при его применении к слоистым средам возникает необходимость решения систем большой размерности относительно постоянных интегрирования. В настоящей работе реализуется подход, предложенный Г. Я. Поповым [4, 5] к решению задач для слоистых сред. Суть его в применении интегрального преобразования непосредственно к уравнения Ламе (в данном случае к уравнению относительно углового смещения u_φ) и условиям сопряжения слоев (в данной задаче предполагается, что между ними имеет место идеальный механический контакт). После получения одномерной задачи условия сопряжения записываются в матрично-векторной форме и путем последовательного исключения неизвестных получают рекуррентные формулы для нахождения постоянных интегрирования. Этот подход значительно уменьшает объем вычислений и позволяет эффективно находить смещение и напряжения в каждом из любого числа слоев. Кроме того, положив равным нулю модуль сдвига самого внутреннего слоя, получим решение задачи о кручении многослойного полого цилиндра.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругий цилиндр, заданный в цилиндрической системе координат соотношениями $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$. Цилиндр состоит из n слоев: $r_{j-1} \leq r \leq r_j$, $j = 1, 2, \dots, n$; $r_0 = 0$, $r_n = a$, каждый из которых характеризуется своим модулем сдвига G_j . Между слоями выполняются условия идеального механического контакта, заключающиеся в непрерывности смещений и напряжений при переходе от слоя к слою. Нижнее основание цилиндра неподвижно закреплено, а верхнее свободно от напряжений. К боковой поверхности цилиндра приложено осесимметричное касательное напряжение, вызывающее кручение цилиндра.

В такой постановке в каждом из слоев отлично от нуля только смещение $u_\varphi^j(r, z)$, которое должно удовлетворять уравнению Ламе [3]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi^j}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} u_\varphi^j + r \frac{\partial^2 u_\varphi^j}{\partial z^2} = 0, \quad r_{j-1} < r < r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad 0 < z < h.$$

Отличными от нуля будут только два касательных напряжения

$$\tau_{r\varphi}^j(r, z) = G_j \left(\frac{\partial u_\varphi^j}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi^j \right), \quad \tau_{z\varphi}^j(r, z) = G_j \frac{\partial u_\varphi^j}{\partial z}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_\varphi^j(r, 0) = 0, \quad \tau_{z\varphi}^j(r, h) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \tau_{r\varphi}^n(a, z) = p(z), \end{aligned}$$

а условия сопряжения будут следующими

$$u_\varphi^j(r_j, z) = u_\varphi^{j+1}(r_j, z), \quad \tau_{z\varphi}^j(r_j, z) = \tau_{z\varphi}^{j+1}(r_j, \varphi), \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Перейдем к безразмерным координатам $\rho = ra^{-1}$, $\zeta = zh^{-1}$ и обозначим $u_j(\rho, \zeta) = u_\varphi^j(a\rho, h\zeta)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Требуется найти решения уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho} u_j + \alpha^2 \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial \zeta^2} = 0, \\ c_{j-1} < \rho < c_j, \quad 0 < \zeta < 1, \quad c_j = r_j h^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = ah^{-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$u_j(\rho, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_j}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$G_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial \rho} - u_n \right) \Big|_{\rho=1} = aP(\zeta), \quad P(\zeta) = p(h\zeta) \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u_j(c_j, \zeta) = u_{j+1}(c_j, \zeta), \\ G_j \left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial \rho} - u_j \right) \Big|_{\rho=c_j} = G_{j+1} \left(\rho \frac{\partial u_{j+1}}{\partial \rho} - u_{j+1} \right) \Big|_{\rho=c_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Сведение краевой задачи к одномерной. Для сведения поставленной краевой задачи к одномерной воспользуемся конечным интегральным преобразованием Фурье по переменной ζ

$$\begin{aligned} u_{jk}(\rho) = \int_0^1 u_j(\rho, \zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta, \\ u_j(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk}(\rho) \sin \beta_k \zeta, \quad \beta_k = \frac{\pi}{2} (2k-1). \end{aligned} \quad (5)$$

Применив его к уравнениям (1) и условиям (3) и (4) (краевые условия (2) при этом будут удовлетворены), приходим к одномерной краевой задаче

$$(\rho u'_{jk})' - \left(\frac{1}{\rho} + \alpha^2 \beta_k^2 \rho \right) u_{jk} = 0, \quad c_{j-1} < \rho < c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$G_n [u'_{nk}(1) - u_{nk}(1)] = aP_k, \quad P_k = \int_0^1 P(\zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta. \quad (7)$$

с условиями сопряжения

$$\begin{aligned} u_{jk}(c_j) = u_{j+1k}(c_j), \\ G_j [c_j u'_{jk}(c_j) - u_{jk}(c_j)] = G_{j+1} [c_j u'_{j+1k}(c_j) - u_{j+1k}(c_j)], \\ j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Решение полученной одномерной задачи. Общее решение уравнений (6) имеет вид

$$u_{1k}(\rho) = A_{1k}I_1(\alpha\beta_k\rho), \quad 0 < \rho < c_1,$$

$$u_{jk}(\rho) = A_{jk}I_1(\alpha\beta_k\rho) + B_{jk}K_1(\alpha\beta_k\rho), \quad c_{j-1} < \rho < c_j, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

где $I_1(x)$ и $K_1(x)$ модифицированные функции Бесселя.

Условия сопряжения (8) и оставшееся краевое условие (7) приводит нас к системе уравнений относительно неизвестных постоянных A_{jk} и B_{jk}

$$\begin{aligned} A_{1k}I_1(t_{1k}) &= A_{2k}I_1(t_{1k}) + B_{2k}K_1(t_{1k}), \\ G_1A_{1k}I_2(t_{1k}) &= G_2[A_{2k}I_2(t_{1k}) - B_{2k}K_2(t_{1k})], \\ A_{jk}I_1(t_{jk}) + B_{jk}K_1(t_{jk}) &= A_{j+1k}I_1(t_{jk}) + B_{j+1k}K_1(t_{jk}), \\ G_j[A_{jk}I_2(t_{jk}) - B_{jk}K_2(t_{jk})] &= G_{j+1}[A_{j+1k}I_2(t_{jk}) - B_{j+1k}K_2(t_{jk})], \\ j &= 2, 3, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (9)$$

где $t_{jk} = \alpha\beta_k c_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ и

$$G_n t_{nk} [A_{nk}I_2(t_{nk}) - B_{nk}K_2(t_{nk})] = aP_k. \quad (10)$$

При их записи были учтены формулы [2]

$$xI_1'(x) - I_1(x) = xI_2(x), \quad xK_1'(x) - K_1(x) = -xK_2(x).$$

Для эффективного решения полученной системы введем вектора

$$\bar{X}_{1k} = \begin{pmatrix} A_{1k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_{jk} = \begin{pmatrix} A_{jk} \\ B_{jk} \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, n \text{ и матрицы}$$

$$\begin{aligned} g_j &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad R_{1k}^0 = \begin{pmatrix} I_1(t_{1k}) & 0 \\ I_2(t_{1k}) & 0 \end{pmatrix}, \\ R_{jk} &= \begin{pmatrix} I_1(t_{jk}) & K_1(t_{jk}) \\ I_2(t_{jk}) & -K_2(t_{jk}) \end{pmatrix}, \quad j = 1 - 1, 2, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Тогда систему (9) можно записать в матричном виде

$$\begin{aligned} g_1 R_{1k}^0 \bar{X}_{1k} &= g_2 R_{1k} \bar{X}_{2k}, \\ g_j R_{jk} \bar{X}_{jk} &= g_{j+1} R_{jk} \bar{X}_{j+1k}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \bar{X}_{2k} &= R_{1k}^{-1} g_2^{-1} g_1 R_{1k}^0 \bar{X}_{1k}, \\ \bar{X}_{j+1k} &= R_{jk}^{-1} g_{j+1}^{-1} g_j R_{jk} \bar{X}_{jk}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя соотношение 7.11.39 из [2] $I_1(x)K_2(x) + I_2(x)K_1(x) = x^{-1}$, несложно получить, что

$$R_{jk}^{-1} = t_{jk} \begin{pmatrix} K_2(t_{jk}) & K_1(t_{jk}) \\ I_2(t_{jk}) & -I_1(t_{jk}) \end{pmatrix}.$$

Введем матрицы

$$U_{jk} = R_{jk}^{-1} g_{j+1}^{-1} g_j = t_{jk} \begin{pmatrix} K_2(t_{jk}) & G_j^* K_1(t_{jk}) \\ I_2(t_{jk}) & -G_j^* I_1(t_{jk}) \end{pmatrix}, \quad G_j^* = \frac{G_j}{G_{j+1}},$$

$$V_{jk} = U_{jk} R_{jk} = \begin{pmatrix} 1 - (1 - G_j^*) t_{jk} K_1(t_{jk}) I_2(t_{jk}) & (1 - G_j^*) t_{jk} K_1(t_{jk}) K_2(t_{jk}) \\ (1 - G_j^*) t_{jk} I_1(t_{jk}) I_2(t_{jk}) & 1 - (1 - G_j^*) t_{jk} I_1(t_{jk}) K_2(t_{jk}) \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения (11) можно записать в виде

$$\bar{X}_{2k} = U_{1k} R_{1k}^0 \bar{X}_{1k}, \quad \bar{X}_{j+1k} = V_{jk} \bar{X}_{jk}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1. \quad (12)$$

Отсюда последовательно находим $\bar{X}_{nk} = V_{n-1k} \bar{X}_{n-1k} = V_{n-1k} V_{n-2k} \bar{X}_{n-2k} = \dots = V_{n-1k} V_{n-2k} \dots V_{2k} \bar{X}_{2k} = V_{n-1k} V_{n-2k} \dots V_{2k} U_{1k} R_{1k}^0 \bar{X}_{1k}$.

Если теперь ввести матрицу

$$\Phi(k) = V_{n-1k} V_{n-2k} \dots V_{2k} U_{1k} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(k) & \Phi_{12}(k) \\ \Phi_{21}(k) & \Phi_{22}(k) \end{pmatrix},$$

то мы выразим вектор коэффициентов для n -го слоя через вектор коэффициентов первого слоя

$$\bar{X}_{nk} = \begin{pmatrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{pmatrix} = \Phi(k) R_{1k}^0 X_{1k} = A_{1k} \begin{pmatrix} \Phi_{11}(k) I_1(t_{1k}) + \Phi_{12}(k) I_2(t_{1k}) \\ \Phi_{21}(k) I_1(t_{1k}) + \Phi_{22}(k) I_2(t_{1k}) \end{pmatrix}.$$

Подставив найденные значения A_{nk} и B_{nk} в краевое условие (10), найдем $A_{1k} = \frac{aP_k}{G_n t_{nk} \Delta_n(k)}$, где

$$\Delta_n(k) = I_2(t_{nk}) [\Phi_{11}(k) I_1(t_{1k}) + \Phi_{12}(k) I_2(t_{1k})] - \\ - K_2(t_{nk}) [\Phi_{21}(k) I_1(t_{1k}) + \Phi_{22}(k) I_2(t_{1k})].$$

Теперь при помощи формул (12) мы можем последовательно вычислить коэффициенты \bar{X}_{2k} , \bar{X}_{3k} и так далее.

Используя формулу обращения (5), находим смещения в каждом из слоев

$$u_1(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} I_1(\alpha \beta_k \rho) \sin \beta_k \zeta, \quad 0 < \rho < c_1, \\ u_j(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [A_{jk} I_1(\alpha \beta_k \rho) + B_{jk} K_1(\alpha \beta_k \rho)] \sin \beta_k \zeta, \\ c_{j-1} < \rho < c_j, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Зная смещения, можно определить касательные напряжения в каждом из слоев, например,

$$\tau_{\rho\varphi}^1(\rho, \zeta) = 2\alpha G_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k1} \beta_k I_2(\alpha \beta_k \rho) \sin \beta_k \zeta, \quad 0 < \rho < c_1, \\ \tau_{\rho\varphi}^j(\rho, \zeta) = 2\alpha G_j \sum_{k=1}^{\infty} [A_{jk} I_2(\alpha \beta_k \rho) - B_{jk} K_2(\alpha \beta_k \rho)] \beta_k \sin \beta_k \zeta, \\ c_{j-1} < \rho < c_j, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Таким образом, построено точное решение задачи о кручении многослойного цилиндра, при этом получены простые рекуррентные соотношения для нахождения постоянных интегрирования, что значительно упрощает проведение расчетов.

Если в построенном решении принять $G_1 = 0$, то мы получим решение задачи о кручении полого многослойного цилиндра.

4. Частные случаи и численные результаты. Рассмотрим сначала двухслойный цилиндр. В этом случае выражения для коэффициентов принимают вид

$$A_{1k} = \frac{aP_k}{G_2 t_{2k} \Delta_2(k)},$$

$$A_{2k} = \frac{aP_k}{G_2 t_{2k} \Delta_2(k)} [1 - (1 - G_1^*) t_{1k} K_1(t_{1k}) I_2(t_{1k})],$$

$$B_{2k} = \frac{aP_k t_{1k}}{G_2 t_{2k} \Delta_2(k)} (1 - G_1^*) I_1(t_{1k}) I_2(t_{1k}),$$

$$\Delta_2(k) = I_2(t_{2k}) - (1 - G_1^*) t_{1k} I_2(t_{1k}) [K_1(t_{1k}) I_2(t_{2k}) + I_1(t_{1k}) K_2(t_{2k})].$$

Возьмем внешнюю нагрузку в виде равномерно распределенной нагрузки интенсивности P^* на участке $b < \zeta < 1$ боковой поверхности цилиндра

$$P(\zeta) = \begin{cases} P^*, & b < \zeta < 1, \\ 0, & 0 < \zeta < b, \end{cases}$$

для которой $P_k = P^* \beta_k^{-1} \cos \beta_k b$.

Вычислим для нее касательное напряжение

$$\tau_{\rho\varphi}^1(\rho, \zeta) = 2P^* G_1^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_k b \sin \beta_k \zeta}{\beta_k \Delta_2(k)} I_2(\alpha \beta_k \rho)$$

на линии $\rho = c_1$ сопряжения слоев.

Для цилиндра с соотношением радиуса к высоте $a : h = 1 : 4$ и $c_1 = 0.5$; $b = 0.8$ значения величины $\tau = \tau_{\rho\varphi}^1(c_1, \zeta) : P^*$ приведены на рисунке 1. Кривые 1, 2 и 3 отвечают соответственно отношению модулей сдвига слоев $G_1 : G_2 = 2 : 1$, $G_1 : G_2 = 1 : 1$, $G_1 : G_2 = 1 : 2$. Из результатов счета следует, что касательные напряжения существенны только вблизи участка приложения нагрузки и тем больше, чем больше модуль сдвига внутреннего слоя по отношению к модулю сдвига внешнего слоя.

Рассмотрим теперь двухслойный полый цилиндр. Как уже отмечалось выше, для этого достаточно рассмотреть решение для трехслойного цилиндра с $G_1 = 0$. В этом случае выражения для коэффициентов следующие

$$A_{2k} = \frac{aP_k}{G_3 t_{3k} \Delta_3(k)} K_2(t_{1k}), \quad B_{2k} = \frac{aP_k}{G_3 t_{3k} \Delta_3(k)} I_2(t_{1k}),$$

$$A_{3k} = \frac{aP_k}{G_3 t_{3k} \Delta_3(k)} [K_2(t_{1k}) + (1 - G_2^*) t_{2k} K_1(t_{2k}) \times \\ \times [I_2(t_{1k}) K_2(t_{2k}) - I_2(t_{2k}) K_2(t_{1k})]]$$

$$B_{3k} = \frac{aP_k}{G_3 t_{3k} \Delta_3(k)} [I_2(t_{1k}) + (1 - G_2^*) t_{2k} I_1(t_{2k}) \times \\ \times [I_2(t_{2k}) K_2(t_{1k}) - I_2(t_{1k}) K_2(t_{2k})]] ,$$

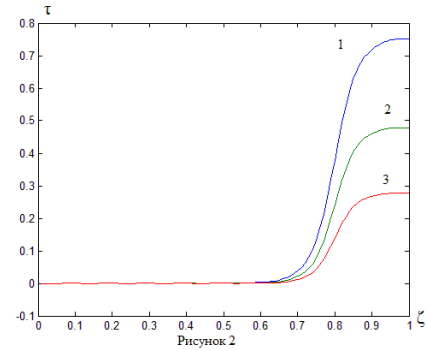
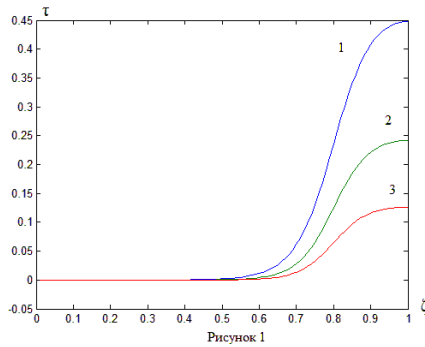
$$\Delta_3(k) = I_2(t_{3k})K_2(t_{1k}) - I_2(t_{1k})K_2(t_{3k}) + (1 - G_2^*)t_{2k} \times \\ \times [I_2(t_{1k})K_2(t_{2k}) - I_2(t_{2k})K_2(t_{1k})] [I_2(t_{3k})K_1(t_{2k}) + I_1(t_{2k})K_2(t_{3k})].$$

При той же внешней нагрузке, что и в предыдущем примере, вычислим касательное напряжение

$$\tau_{\rho\varphi}^2(\rho, \zeta) = 2P^*G_2^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_k b \sin \beta_k \zeta}{\beta_k \Delta_3(k)} [K_2(t_{1k})I_2(\alpha\beta_k\rho) - I_2(t_{1k})K_2(\alpha\beta_k\rho)]$$

на линии $\rho = c_2$ сопряжения слоев.

Для цилиндра с параметрами $a : h = 1 : 4$, $c_1 = 0.5$; $c_2 = 0.75$ и $b = 0.8$ значения величины $\tau = \tau_{\rho\varphi}^2(c_2, \zeta) : P^*$ приведены на рисунке 2. Кривые 1, 2 и 3 отвечают соответственно отношению модулей сдвига слоев $G_1 : G_2 = 2 : 1$, $G_1 : G_2 = 1 : 1$, $G_1 : G_2 = 1 : 2$. Из приведенных результатов видно, что касательное напряжение здесь существенно больше, чем в сплошном двухслойном цилиндре, но в целом характер его распределения аналогичен первому примеру.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Для решения осесимметричной задачи о кручении многослойного цилиндра использован новый подход, заключающийся в применении конечного интегрального преобразования Фурье непосредственно к уравнению Ламе относительно смещения. В результате решения полученной одномерной задачи выведены рекуррентные соотношения для определения неизвестных постоянных интегрирования для каждого из слоев, что позволяет быстро и эффективно их вычислять. Приведены формулы для определения смещения и напряжения в каждом из слоев. Из построенного решения для сплошного многослойного цилиндра, взяв равным нулю модуль сдвига самого внутреннего слоя, получено решение для полого многослойного цилиндра.

Изложенный метод решения проиллюстрирован двумя примерами — найдено напряженное состояние в сплошном и полом двухслойных цилиндрах. Результаты счета представлены в виде графиков.

1. **Арутюнян Н. Х.** Кручение упругих тел / Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. – М.: Физматгиз, 1963. – 686 с.

2. **Бейтмен Г.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Бейтмен Г., Эрдейи А. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
3. **Новацкий В.** Теория упругости / Новацкий В. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Попов Г. Я. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
5. **Popov G. Ya.** The torsion of the conical layered elastic cone / Popov G. Ya., Vaysfeld N. D. // Acta Mechanica. – 2011. – Vol. 221, Iss. 3-4. – P. 261–270.
6. **Tarn J. Q.** Laminated composite tubes under extension, torsion, bending, shearing and pressuring: a state space approach / Tarn J. Q., Wang Y. M. // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38, Iss. 50-51. – P. 9053–9075.