

Mathematical Subject Classification: 70F15  
УДК 521.1

**А. Л. Рачинская**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

## ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

**Рачинська А. Л. Обертання твердого тіла в середовищі з опором.** Досліджується обертальний рух динамічно несиметричного твердого тіла відносно центру мас під дією моменту сил опору. Момент сил опору визначається лінійною функцією кутової швидкості. Проводиться чисельне моделювання кривої годографа вектора кінетичного моменту у тривимірному просторі. Будується критерій виникнення різних видів годографа.

**Ключові слова:** тверде тіло, опір, вектор кінетичного моменту, годограф.

**Рачинская А. Л. Вращение твердого тела в среде с сопротивлением.** Исследуется вращательное движение динамически несимметричного твердого тела относительно центра масс под действием момента сил сопротивления. Момент сил сопротивления предполагается линейной функцией угловой скорости. Проводится численное моделирование кривой годографа вектора кинетического момента в трехмерном пространстве. Строится критерий возникновения различных видов годографа.

**Ключевые слова:** твердое тело, сопротивление, вектор кинетического момента, годограф.

**Rachinskaya A. L. Rotation of a rigid body in a resistant medium.** We study the rotational motion of a dynamically rigid body about the center of mass under the action of the resistance moment. Resistance moment assumes a linear function of the angular velocity. Numerical modeling of the curve locus angular momentum vector in three-dimensional space. Constructed criterion for the occurrence of different types of locus.

**Key words:** rigid body, resistance, the angular momentum vector, hodograph.

**ВВЕДЕНИЕ.** Задача вращательного движения динамически несимметричного твердого тела является классической задачей теоретической механики. Законы движения твердого тела найдены в аналитическом виде при определенных допущениях [1]. Вращательное движение твердого тела в среде с сопротивлением допускает нахождение аналитического решения только в упрощенной постановке [2]. Представляет интерес численное исследование вращательного движения твердого тела в среде с сопротивлением, момент диссипации которой имеет различную аналитическую форму. Исследования, близкие к приводимому ниже, проведены в работах [3–5].

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим вращение динамически несимметричного твердого тела в среде с сопротивлением. Пусть  $Ox_1x_2x_3$  подвижная система координат, жестко связанная с твердым телом, начало которой совпадает с центром инерции твердого тела, и оси связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Уравнения Эйлера имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}] = \sum_{i=1}^3 \mathbf{M}_i^r. \quad (1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$  — вектор абсолютной угловой скорости тела, где  $p, q, r$  — ее проекции на соответствующие оси инерции;  $\mathbf{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  — тензор инерции тела;  $\mathbf{M}^r$  — вектор момента сил сопротивления среды.

В задаче предполагается, что вектор момента сил диссипации пропорционален вектору кинетического момента  $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = (G_1, G_2, G_3)$ , где  $G_1 = A_1 p$ ,  $G_2 = A_2 q$ ,  $G_3 = A_3 r$ ,

$$\mathbf{M}^r = -\mathbf{L}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{L} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — диагональный тензор сопротивления среды,  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды. Это допущение не является противоречивым. Сопротивление, действующее на тело, представлено тремя парами приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами  $-\lambda_1 A_1 p$ ,  $-\lambda_2 A_2 q$ ,  $-\lambda_3 A_3 r$ .

Уравнения (1) в проекциях на оси  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют вид [3]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + rq(A_3 - A_2) &= -\lambda_1 A_1 p, \\ A_2 \dot{q} + pr(A_1 - A_3) &= -\lambda_2 A_2 q, \\ A_3 \dot{r} + pq(A_2 - A_1) &= -\lambda_3 A_3 r. \end{aligned} \quad (3)$$

Представляют интерес численное исследование и моделирование годографа вектора кинетического момента тела относительно осей  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Для численного исследования системы (3) приведем ее к безразмерному виду. В качестве характерных параметров задачи выберем момент инерции твердого тела относительно оси  $x_1 - A_1$ , начальную скорость вращения спутника  $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$ . Введем безразмерное медленное время  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\tilde{p} = \frac{p}{\omega_0}$ ,  $\tilde{q} = \frac{q}{\omega_0}$ ,  $\tilde{r} = \frac{r}{\omega_0}$ ,  $\tilde{A}_2 = \frac{A_2}{A_1}$ ,  $\tilde{A}_3 = \frac{A_3}{A_1}$ . В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -\tilde{r}\tilde{q}(\tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) - \lambda_1 \tilde{p}, \\ \tilde{A}_2 \frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{r}(1 - \tilde{A}_3) - \lambda_2 \tilde{A}_2 \tilde{q}, \\ \tilde{A}_3 \frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{q}(\tilde{A}_2 - 1) - \lambda_3 \tilde{A}_3 \tilde{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Изначально проведем построение годографа вектора кинетического момента для невозмущенного движения твердого тела в случае Эйлера—Пуансо, для этого в системе (4) зададим  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . В этом случае построение годографа можно проводить на сфере единичного радиуса, так как вектор кинетического момента постоянен. Изначально проведем численный расчет при  $\tilde{q}_0 = 0$ , что позволит провести сравнительный анализ известного аналитического [1] и численного решения.

Рассматривается твердое тело, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству  $A_1 > A_2 > A_3$  или в безразмерном виде  $1 >$

$\tilde{A}_2 > \tilde{A}_3$ , для  $\tilde{A}_2 = 0.8$  и  $\tilde{A}_3 = 0.6$ . Результаты численного расчета системы (4) представлены на рис. 1. Первый расчетный случай при начальных значениях угловой скорости  $\tilde{p}_0 = 0.9$ ,  $\tilde{q}_0 = 0$ ,  $\tilde{r}_0 = 0.43$  соответствует движению твердого тела, полюдии которого заключают в себе ось  $x_1$  (кривая 1), а второй случай  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{q}_0 = 0$ ,  $\tilde{r}_0 = 1.44$  со значениями около оси  $x_3$  (кривая 2). Кривые 3–4 соответствуют вращениям тела, близким к движению по сепаратрисам. Кривая 3 соответствует значениям  $\tilde{p}_0 = 0.791$ ,  $\tilde{q}_0 = 0$ ,  $\tilde{r}_0 = 1.22$ , кривая 4 –  $\tilde{p}_0 = 0.79$ ,  $\tilde{q}_0 = 0$ ,  $\tilde{r}_0 = 1.02$ . Из рисунка 1 видно, что направление и характер движения совпадают с полученными в [1].

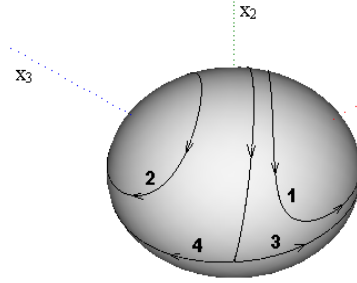


Рис. 1

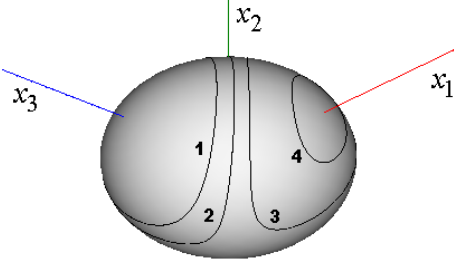


Рис. 2

Известное аналитическое решение для случая Эйлера–Пуансо в форме [1] получено только для  $\tilde{q}_0 = 0$ . Аналитического решения для движения Эйлера–Пуансо при  $\tilde{q}_0 \neq 0$  не существует. Проведено построение годографа вектора кинетического момента для  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  при начальных значениях  $\tilde{q}_0 \neq 0$ . Результаты численного исследования представлены на рис. 2. Характер кривой годографа вектора кинетического момента аналогичен представленному на рис. 1. Кривые охватывают ось наибольшего момента инерции при выполнении неравенства  $2TA_1 \geq G_0^2 > 2TA_2$  или ось наименьшего момента инерции при  $2TA_2 > G_0^2 \geq 2TA_3$ , где  $G_0$  – величина кинетического момента в начальный момент времени  $t = 0$  и  $T = 1/2 (A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2)$  – кинетическая энергия твердого тела.

Кривые 1 и 2 соответствуют вращению около оси  $x_3$  при соответствующих значениях проекций угловой скорости  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.25$  и  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{r}_0 = 0.75$ . Кривые 3 и 4 численно определены для начальных значений  $\tilde{p}_0 = 0.7$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.7$  и  $\tilde{p}_0 = 0.9$ ,  $\tilde{r}_0 = 0.2$  соответственно.

Численное исследование показало, что графики изменений величин проекций вектора кинетического момента  $\tilde{G}_i = \tilde{G}_i(\tau)$  не отличаются по характеру в случае  $\tilde{q}_0 = 0$  и  $\tilde{q}_0 \neq 0$  для невозмущенного движения твердого тела.

Проведем исследование движения твердого тела в среде с сопротивлением, т.е. исследована система (3) при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ . Сначала проведено исследование для случая  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . В данной постановке может быть найдено аналитическое решение при  $q_0 = 0$  [2]. Это решение находится за счет введения функций вида

$$p = p_1 \exp(-\lambda t), \quad q = q_1 \exp(-\lambda t), \quad r = r_1 \exp(-\lambda t), \quad (5)$$

где функции  $p_1 = p_1(\tilde{t})$ ,  $q_1 = q_1(\tilde{t})$  и  $r_1 = r_1(\tilde{t})$  имеют вид, аналогичный случаю Эйлера–Пуансо, за исключением того, что само время  $\tilde{t}$  определяется специаль-

ным образом, поэтому для  $t = 0$  время  $\tilde{t} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \mp \sqrt{\frac{2T_0 A_3 - G_0^2}{A_1 (A_3 - A_1)}} \operatorname{cn} \tilde{t}, & q_1 &= \pm \sqrt{\frac{2T_0 A_3 - G_0^2}{A_2 (A_3 - A_2)}} \operatorname{sn} \tilde{t}, \\
 r_1 &= \sqrt{\frac{G_0^2 - 2T_0 A_1}{A_3 (A_3 - A_1)}} \operatorname{dn} \tilde{t}, & \text{для } 2T_0 A_2 > G_0^2 &\geq 2T_0 A_3, \\
 \text{где } \tilde{t} &= \frac{\exp(-\lambda t)}{\lambda} \sqrt{\frac{(A_3 - A_2)(G_0^2 - 2T_0 A_1)}{A_1 A_2 A_3}}; \\
 p_1 &= \sqrt{\frac{2T_0 A_3 - G_0^2}{A_1 (A_3 - A_1)}} \operatorname{dn} \tilde{t}, & q_1 &= \pm \sqrt{\frac{2T_0 A_1 - G_0^2}{A_2 (A_1 - A_2)}} \operatorname{sn} \tilde{t}, \\
 r_1 &= \mp \sqrt{\frac{G_0^2 - 2T_0 A_1}{A_3 (A_3 - A_1)}} \operatorname{cn} \tilde{t}, & \text{для } 2T_0 A_1 &\geq G_0^2 > 2T_0 A_2, \\
 \text{где } \tilde{t} &= \frac{\exp(-\lambda t)}{\lambda} \sqrt{\frac{(A_1 - A_2)(G_0^2 - 2T_0 A_3)}{A_1 A_2 A_3}}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $T_0$  – величина кинетической энергии твердого тела в начальный момент времени при  $t = 0$ .

Проведен численный расчет для начальных условий проекций угловых скоростей тела  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.25$ . Тогда для  $\tilde{G}_0 = 1$  имеем  $\tilde{r}_0 = 1.4$ . На рис. 3 представлены две кривые годографа вектора кинетического момента: кривая 1 – при  $\lambda = 0.1$ , кривая 2 –  $\lambda = 0.005$ . Из рисунка видно, что вектор кинетического момента убывает, охватывая ось наименьшего момента инерции твердого тела  $x_3$ . Причем при заданных расчетных значениях в начальный момент времени выполняется  $2T_0 A_2 > G_0^2 \geq 2T_0 A_3$ .

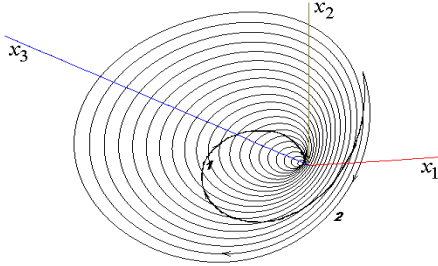


Рис. 3

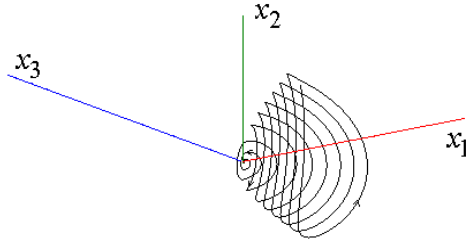


Рис. 4

Изучено вращательное движение твердого тела для  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . Результаты численного интегрирования системы (4) представлены на рис. 4. Расчет проводился при начальных значениях угловой скорости  $\tilde{p}_0 = 0.8$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{r}_0 = 0.74$  и коэффициентов  $\lambda_1 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ ,  $\lambda_3 = 0.003$ .

Из рисунка 4 видно, что при движении твердого тела получается следующая картина: изначально выполняется неравенство  $2T A_1 \geq G^2 > 2T A_2$ , что соответствует движению около оси  $x_1$ . Затем со временем при убывании величин кинетического момента  $G$  и кинетической энергии  $T$  наступает некий момент времени, когда величина  $G^2$  становится близкой  $2T A_2$ , что соответствует пере-

ходу через сепаратрису. А далее выполняется неравенство  $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$ , что соответствует вращению около оси  $x_3$ . Подобные результаты получены в [3].

Из неравенства  $G^2 > 2TA_2$  можно получить соотношение между проекциями угловой скорости на оси  $x_1$  и  $x_3$

$$\tilde{p}^2 > \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2. \quad (7)$$

Рассмотрим квадранты неравенства (7) на рис. 5. Прямая на рисунке соответствует равенству

$$\tilde{p}^2 = \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2, \quad (8)$$

квадрант А – годограф вектора кинетического момента, охватывающий ось  $x_1$ , квадрант В – ось  $x_3$ . Угол наклона прямой зависит от геометрии масс твердого тела, а следовательно, и величина квадрантов зависит от геометрии масс твердого тела.

Из равенства (8) можно сделать вывод о том, что в случае динамически симметричного тела  $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_3$  угол наклона прямой равен нулю, следовательно, тело может совершать вращение только около оси  $x_1$ . Проведен численный эксперимент при значениях  $\tilde{A}_2 = 0.8$ ,  $\tilde{p}_0 = 0.8$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{r}_0 = 0.56$ ,  $\lambda_1 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ ,  $\lambda_3 = 0.003$ . Результат расчета представлен на рис. 6.

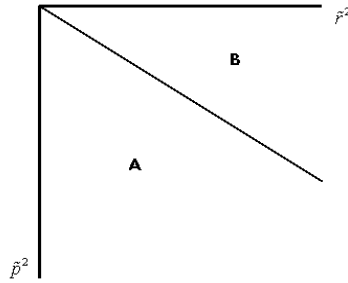


Рис. 5

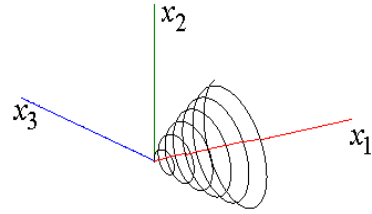


Рис. 6

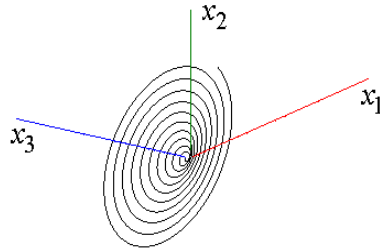


Рис. 7

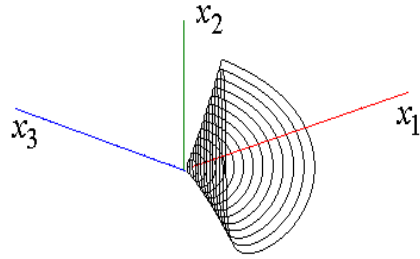


Рис. 8

Из равенства (8) можно сделать еще один вывод о том, что для динамически симметричного тела  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$  угол наклона прямой равен  $90^0$ , следовательно,

тело может совершать вращение только около оси  $x_3$ . Проведен численный эксперимент при значениях  $\tilde{A}_2 = 1$ ,  $\tilde{A}_3 = 0.6$ ,  $\tilde{p}_0 = 0.8$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{r}_0 = 0.55$ ,  $\lambda_1 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ ,  $\lambda_3 = 0.003$ . Результат расчета представлен на рис. 7.

Годограф вектора кинетического момента для динамически несимметричного тела не всегда имеет вид, представленный на рис. 4. Вид годографа зависит от величин коэффициентов сопротивления  $\lambda_i$ . Например, для  $\tilde{A}_2 = 0.8$  и  $\tilde{A}_3 = 0.6$  при  $\tilde{p}_0 = 0.8$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{r}_0 = 0.74$ ,  $\lambda_1 = 0.003$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ ,  $\lambda_3 = 0.005$  годограф имеет вид, представленный на рис. 8.

Проведенный численный эксперимент при различных значениях коэффициентов сопротивления  $\lambda_i$  позволил сделать вывод о том, что построение годографа вектора кинетического момента твердого тела имеет смысл проводить только для малого сопротивления среды. Для коэффициентов сопротивления  $\lambda_i < 0.01$  характер кривой годографа существенно зависит от абсолютной разности  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_3$ . Чем больше эта величина, тем быстрее годограф вектора кинетического момента переходит от движения около оси  $x_1$  к движению около оси  $x_3$ . Данное утверждение можно проиллюстрировать с помощью квадрантов, представленных на рис. 5. На рис. 9–11 в одном масштабе представлены кривые, образованные точками с координатами  $(\tilde{p}^2, \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2)$  согласно проведенному численному эксперименту. На рис. 9 приведен результат расчета для  $\Delta\lambda = 0$ . Это означает, что характер кривой годографа подобен рис. 6 или 8. На рис. 10 представлен результат расчета для  $\Delta\lambda = 0.002$ , где область точек в квадранте В незначительная, что соответствует годографу кинетического момента рис. 4. Рис. 11 получен для  $\Delta\lambda = 0.003$ , где область точек в квадранте В уже существенная.

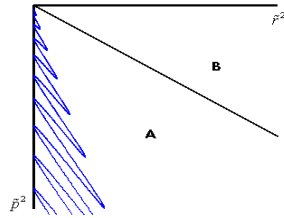


Рис. 9

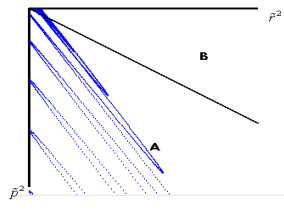


Рис. 10

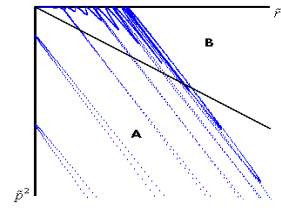


Рис. 11

Аналогичный численный эксперимент можно провести для тела с другой геометрией масс, что изменяет количественные характеристики, но не меняет качественно результаты.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим движение твердого тела в среде с сопротивлением в предположении, что

$$\mathbf{M}^r = -\mathbf{I}\omega. \tag{9}$$

Здесь  $\mathbf{I}$  – тензор сопротивления среды, компоненты которого предполагаются постоянными. Уравнения (1) в проекциях на оси  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют вид [5]

$$\begin{aligned} A_1\dot{p} + rq(A_3 - A_2) &= -(I_{11}p + I_{12}q + I_{13}r), \\ A_2\dot{q} + pr(A_1 - A_3) &= -(I_{21}p + I_{22}q + I_{23}r), \\ A_3\dot{r} + pq(A_2 - A_1) &= -(I_{31}p + I_{32}q + I_{33}r). \end{aligned} \tag{10}$$

Для численного исследования системы (10) приведем ее к безразмерному виду. В качестве характерных параметров задачи выберем момент инерции твердого тела относительно оси  $x_1 - A_1$ , начальную скорость вращения спутника  $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$ . Введем безразмерное медленное время  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\tilde{p} = \frac{p}{\omega_0}$ ,  $\tilde{q} = \frac{q}{\omega_0}$ ,  $\tilde{r} = \frac{r}{\omega_0}$ ,  $\tilde{A}_i = \frac{A_i}{A_1}$  ( $i = 2, 3$ ),  $\tilde{I}_{ij} = \frac{I_{ij}}{A_1}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). В результате получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -\tilde{r}\tilde{q} \left( \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2 \right) - \left( \tilde{I}_{11}\tilde{p} + \tilde{I}_{12}\tilde{q} + \tilde{I}_{13}\tilde{r} \right), \\ \tilde{A}_2 \frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{r} \left( 1 - \tilde{A}_3 \right) - \left( \tilde{I}_{21}\tilde{p} + \tilde{I}_{22}\tilde{q} + \tilde{I}_{23}\tilde{r} \right), \\ \tilde{A}_3 \frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{q} \left( \tilde{A}_2 - 1 \right) - \left( \tilde{I}_{31}\tilde{p} + \tilde{I}_{32}\tilde{q} + \tilde{I}_{33}\tilde{r} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Численное исследование системы (11) проводилось при начальных значениях угловой скорости  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.25$  для постоянных коэффициентов сопротивления  $\tilde{I}_{ij} = 0.005$  ( $i, j = 1, 3$ ). Результаты численного расчета системы представлены на рис. 12.

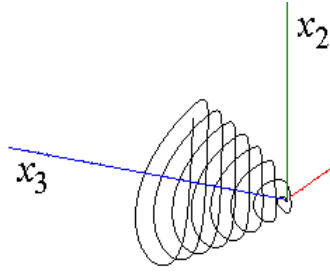


Рис. 12

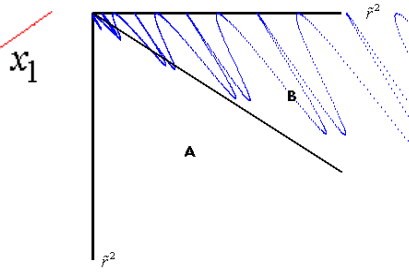


Рис. 13

Из рисунка видно, что годограф вектора кинетического момента сначала охватывает ось  $x_3$ , так как в начальный момент времени выполняется неравенство  $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$ . Затем в некоторый момент времени вектор кинетического момента поворачивается и начинает совершать движение около оси наибольшего момента инерции  $x_1$ . Изменение величины коэффициентов сопротивления приводит к изменению частоты линий годографа, но не меняет характер самой кривой годографа. На рис.13 представлен результат исследования с помощью квадрантов неравенства (7).

Если провести численное исследование для твердого тела с той же геометрией масс и со значениями проекций угловой скорости, чтобы в начальный момент времени выполнялось неравенство  $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$ , то результирующая кривая годографа вектора кинетического момента имеет другой характер. Для  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.25$  при постоянных коэффициентах сопротивления  $I_{ij} = 0.005$  ( $i, j = 1, 3$ ) результат представлен на рис. 14. Изменение величин проекций угловой скорости в начальный момент времени, коэффициентов сопротивления не дает результата, при котором вектор кинетического момента явно охватывает ось наименьшего момента инерции  $x_3$ . На рис. 15 проведен анализ полученных результатов с помощью квадрантов.

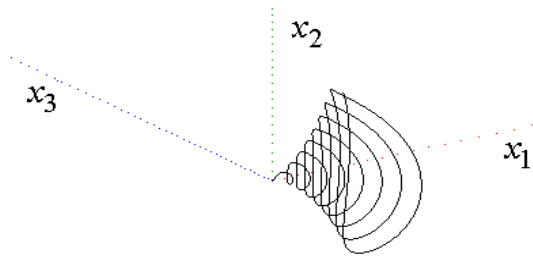


Рис. 14

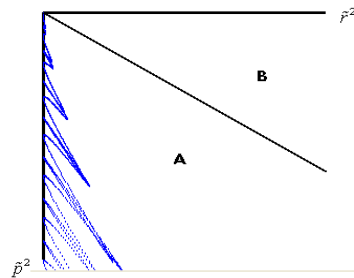


Рис. 15

Видно, что в данной модели сопротивления вращение твердого тела около оси  $x_3$  является неустойчивым, при этом вращение около оси  $x_1$  всегда остается в квадранте А.

Проведенное численное исследование позволяет сделать вывод, что при заданной модели момента сопротивления для постоянного тензора сопротивления годограф вектора кинетического момента стремится к предельному положению оси наибольшего момента инерции.

Зададим тензор сопротивления таким образом, чтобы диагональные элементы были равны одной постоянной, а недиагональные — другой константе.

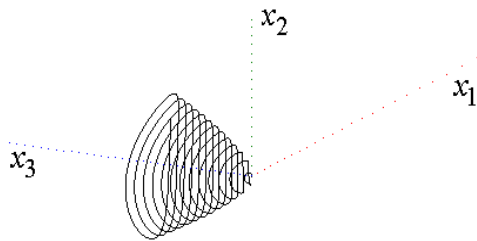


Рис. 16

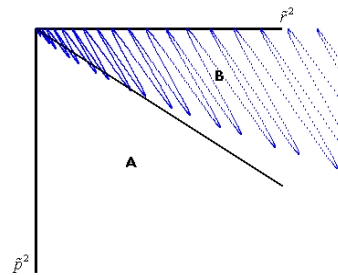


Рис. 17

Первый расчет проводился при начальных значениях угловой скорости  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.25$ , для коэффициентов сопротивления  $\tilde{I}_{ii} = 0.003$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\tilde{I}_{ij} = 0.001$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ). Результаты представлены на рис. 16–17. В этом случае квадрант А закрашен незначительно, поэтому зрительно годограф вектора кинетического момента не охватывает ось  $x_1$ .

Второй расчет проводился при начальных значениях угловой скорости  $\tilde{p}_0 = 0.5$ ,  $\tilde{q}_0 = 0.25$ , для коэффициентов сопротивления  $\tilde{I}_{ii} = 0.001$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\tilde{I}_{ij} = 0.003$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ). Результаты представлены на рис. 18–19. Видно, что квадрант А закрашен значительно, поэтому зрительно годограф вектора кинетического момента охватывает ось  $x_1$ .



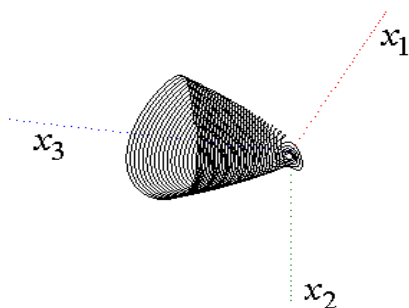


Рис. 18

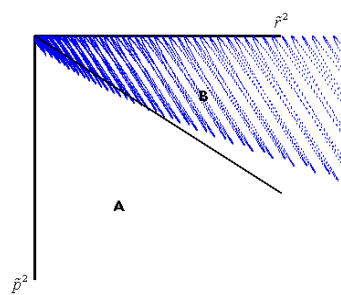


Рис. 19

Из проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что величина диагональных коэффициентов сопротивления больше влияет на частоту кривых годографа, т.е. на скорость убывания вектора кинетического момента. Недиagonальные элементы тензора сопротивления влияют в большей части на величину области движения около оси  $x_1$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Таким образом, проведено исследование вращательного движения твердого тела в среде с сопротивлением. Построен годограф вектора кинетического момента в трехмерном пространстве. Получен критерий (9), позволяющий провести оценку возникновения поворота вектора кинетического момента.

Автор благодарит Л. Д. Акуленко и Д. Д. Лещенко за полезные обсуждения.

1. Маркеев А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев. – М. : Наука, 1990. – 416 с.
2. Padova E. Sul moto di rotazione di un corpo rigido / E. Padova // Atti Accad. di Torino. – 1885–1886. – V. XXI. – P. 38–47.
3. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В. Н. Кошляков. – М. : Наука, 1985. – 288 с.
4. Пузырев В. Е. О движении твердого тела вокруг центра масс при частичной диссипации энергии / В. Е. Пузырев, А. С. Суйков // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 157–166.
5. Акуленко Л. Д. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – №3. – С. 5–13.