Mathematical Subject Classification: 74G05
УДК 539.3

А. А. Фесенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУСЛОЯ

Фесенко Г. О. Про один спосiб розв'язання контактної задачi для пружного пiвшару. Розв'язано контактну задачу про втискування з ексцентриситетом кругового штампа у пiвнескiнченний шар. На бiчнiй та нижнiй гранях пiвшару задано умови гладкого контакту. Задачу розв'язано розвиненням за малим параметром, у якостi якого обрано величину, обернену подвоєнiй вiдстанi вiд бiчної стiнки пiвшару до центра штампа. Отримано сингулярне iнтегральне рiвняння вiдносно невiдомого контактного напруження. Задачу зведено до системи рекурентних iнтегральних рiвнянь, якi розв'язано методом ортогональних многочленiв i зведено до нескiнчених одновимiрних систем алгебраїчних рiвнянь, що розв'язанi методом редукцiї. Отриманi осадка штампа i момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа.
Ключовi слова: контактна задача, круговий штамп, пiвнескiнченний шар, сингулярне iнтегральне рiвняння, метод редукцiї.

Фесенко А. А. Об одном способе решения контактной задачи для упругого полуслоя. Решена контактная задача о вдавливании кругового штампа в полубесконечный слой внецентренной силой. На боковой и нижней грани полуслоя заданы условия гладкого контакта. Задача решена путем разложения по малому параметру, где в качестве малого параметра выбрана величина, обратная удвоенному расстоянию от боковой стенки полуслоя до центра штампа. Выведено сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестного контактного давления. Задача сведена к системе рекуррентных интегральных уравнений, которые решены методом ортогональных многочленов и сведены к бесконечным одномерным системам алгебраических уравнений, решаемым методом редукции. Найдены осадка штампа и момент силы, обеспечивающий поступательное перемещение штампа.
Ключевые слова: контактная задача, круговой штамп, полубесконечный слой, сингулярное интегральное уравнение, метод редукции.

Fesenko A. A. About one solving method of the contact problem for an elastic semi-infinite layer. It is solved the contact problem on the action of a circular stamp with an extra-central power on the elastic semi-infinite layer. On the lateral and lower side of the layer the conditions of the smooth contact are given. The problem was solved with the decomposition to the slightest parameter. The singular integral equation with respect to unknown contact pressure was obtained. The problem was reduced to the system of recurrent integral equations which were solved by the method of the orthogonal polynomials and were reduced to the infinite one-dimensional systems of algebraic equations. These equations were solved by the reduction method. As a result the eccentricity and precipitation of the stamp that provide its forward movement were determined.
Key words: contact problem, circular stamp, semi-infinite layer, singular integral equation, reduction method.

Введение. К числу первых работ по контактной механике относится работа Ж. Буссинеска [10], где фактически было построено решение контактной задачи о вдавливании кругового штампа в упругое полупространство. В работе Н. Н. Лебедева и Я. С. Уфлянда [7] контактная задача о вдавливании кругового штампа в упругий слой, лежащий на жестком основании, решена сведением с помощью интегрального преобразования Ханкеля к уравнению Фредгольма с симметричным ядром. Эта же задача исследовалась в работе И. И. Воровича и Ю. А. Устинова [3], где было предложено асимптотическое решение для толстого слоя. Позже В. М. Александровым и И. И. Воровичем были разработаны более эффективные асимптотические методы, позволяющие находить решение как для толстого, так и для тонкого слоя [1]. Вдавливание штампа неосевой силой в упругий слой рассмотрено в работах К. Е. Егорова [6] и А. Л. Флоренса [11]. В работах Р. Лоу [12], К. Сриваставы и В. Саксены [13] рассмотрены осесимметричные контактные задачи для упругого слоя, сжимаемого парой штампов круговой или кольцевой формы. К. Е. Егоровым в работе [6] рассмотрена контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый жесткий штамп, где решение задачи разделяется на две части соответственно для центральной силы P и пары сил с моментом $M = Pe$, где e – эксцентриситет. Задача сводится к решению парных интегральных уравнений Фредгольма. В работе [2] рассмотрена неосесимметричная контактная задача для круглого штампа на упругом основании. Интегральное уравнение контактной задачи благодаря ортогонализации по системе косинусов сведено к раздельным интегральным уравнениям относительно контактных напряжений под штампом, которые в свою очередь решаются методом ортогональных многочленов [8] и сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, которые решаются методом редукции, при котором верхний предел в бесконечных суммах заменяется конечным числом с увеличивающимися значениями. Сходимость указанного метода доказывается известными способами [8].

Основные результаты

1. Постановка задачи. В полубесконечный упругий слой (модуль сдвига G, коэффициент Пуассона μ) конечной толщины h, опирающийся на абсолютно жесткое основание без трения, описываемый в декартовой системе координат соотношениями $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < h$ под действием внешней силы P на грани $z = h$ вдавливается жесткий круговой в плане штамп (рис. 1) (A — радиус штампа, B — расстояние от начала координат до центра штампа), причем линия действующей на штамп силы не совпадает с его осью. Принимаем также, что трение между штампом и слоем отсутствует. Требуется определить момент силы, обеспечивающий поступательное перемещение штампа и его осадку.

2. Вывод интегрального уравнения. Введем малый параметр $1/(2B)$. Очевидно, что при существенном увеличении расстояния B от боковой стенки слоя до центра штампа исходная задача сводится к известной задаче о вдавливании кругового штампа в бесконечный слой [3]. В работе [9] при решении смешанной задачи теории упругости для полубесконечного слоя $0 < x < -\infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < h$, когда на боковой и нижней грани заданы условия скользящей заделки, а на верхней грани слоя в произвольной точке с координатами (a, b) действует единичная сосредоточенная сила, было найдено вертикальное

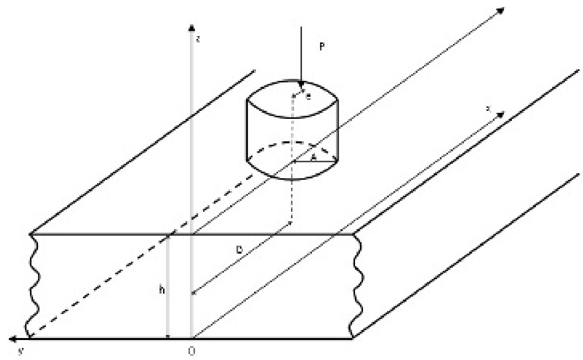

Рис.1

смещение точек $w_0(x,y,z)$:

$$w_0(x,y,z) = \frac{1}{4\pi G} \int\limits_0^\infty t \frac{J_0(t,x,y,a,b)}{D_i} F(t,z)\,dt,$$

$$D_t = 4ht + 2\,\mathrm{sh}(2ht),$$

$$\frac{1}{2}F(t,z) = (z+h)\,\mathrm{sh}\,t(h-z) - (h-z)\,\mathrm{sh}\,t(h+z) - \mu_1^{-1}\frac{1}{t}(\mathrm{ch}\,t(h+z) - \mathrm{sh}\,t(h-z)),$$

$$\begin{aligned} &J_0(t,x,y,a,b) = \\ &\qquad = J_0(t\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) + J_0(t\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $J_0(t)$ – функция Бесселя, $\mu_1 = (2-2\mu)^{-1}$. Найдем вертикальное смещение по верхней грани $z = h$

$$w_0(x,y,h) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G}\int_0^\infty J_0(t,x,y,a,b)F(ht)dt, \quad F(ht) = \frac{\mathrm{ch}(2ht)-1}{\mathrm{sh}(2ht)+2ht}$$

и выделим асимптотику подынтегральной функции исходя из того, что $\lim\limits_{t\to 0} J_0(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 1$ по следующему правилу $F(t) - 1 + 1 = R(t) + 1$.

Рассмотрим функцию

$$R(x) = \frac{2e^{-4x} - 2e^{-2x} - 4xe^{-2x}}{1 + 4xe^{-2x} - e^{-4x}} = \frac{e^{-2x} - 2x - 1}{\mathrm{sh}(2x) + 2x}, \quad x = ht,$$

для которой примем следующее приближение

$$R(x) \approx -e^{-2x}\frac{2(1+2x)}{1+4xe^{-2x}} = -e^{-2x}f(x) = -e^{-2x}\sum_{k=0}^\infty a_k x^k, \tag{2}$$

где a_k – коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена.

Для перехода к круговому штампу $0 < r < A$, $-\pi < \varphi < \pi$ сделаем замену к полярной системе координат $x = B + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $a = B + \rho\cos\psi$,

$b = \rho \sin\psi$, где B – расстояние от начала координат до центра штампа. Тогда вместо функции $J_0(t,x,y,a,b)$ в (1) получим

$$J_0(t,r,\rho,\varphi,\psi,B) = J_0(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)})+ \\ +J_0(t\sqrt{4B^2+4B(r\cos\varphi+\rho\cos\psi)+r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\varphi+\psi)}).$$

Рассмотрим вертикальное перемещение под действием кругового штампа

$$w_p(r,\varphi) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G}\left\{w_p^0(r,\varphi)+w_p^B(r,\varphi)\right\},$$

где

$$w_p^0(r,\varphi) = \\ = \int\limits_0^A \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^{\infty} (1+R(ht))J_0(2Bt\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)})p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi dt.$$

Рассмотрим интеграл по переменной ψ, для которого можно получить представление

$$\int\limits_0^{\pi}\Big[2J_0(tr)J_1(t\rho)+4\sum_{k=1}^{\infty}J_k(tr)J_k(t\rho)\cos k\varphi\cos k\psi\Big]p(\rho,\psi)d\psi.$$

Здесь интеграл разбивался на сумму интегралов по промежуткам $(-\pi,\pi) = (-\pi,0)+(0,\pi)$, в первом интеграле осуществлялась замена переменных $\psi=-\psi'$, а затем к сумме интегралов применялась теорема сложения для функции Бесселя [4, 8.531]. Обозначим

$$K_h(r,\rho,\varphi,\psi) = \\ = \int\limits_0^{\infty}(1+R(ht))\Big[J_0(tr)J_0(t\rho)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_0(tr)J_0(t\rho)\cos k\varphi\cos k\psi\Big]dt \tag{3}$$

и запишем интегральное уравнение относительно контактного давления

$$-\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G}\Big\{2\int\limits_0^A\int\limits_0^{\pi}K_h(r,\rho,\varphi,\psi)p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi + w_p^B(r,\varphi)\Big\} = -\delta,\ 0<r<A. \tag{4}$$

Рассмотрим слагаемое

$$w_p^B(r,\varphi) = \int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\infty}(1+R(ht))J_0(t\widetilde{R})p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi dt,$$

где

$$\widetilde{R} = 2B\sqrt{1+\frac{2(r\cos\varphi+\rho\cos\psi}{2B}+\frac{r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\varphi+\psi)}{(2B)^2}} \tag{5}$$

и интеграл

$$\int_0^\infty (1+R(ht))J_0(t\widetilde{R})dt = \frac{1}{\widetilde{R}} + \int_0^\infty R(ht)J_0(t\widetilde{R})\,dt, \tag{6}$$

Здесь использована формула [4, 6.511.(1)].

3. Первое приближение. Отбросим в радикале $\widetilde{R}$, определенном соотношением (5), слагаемое, пропорциональное $1/(2B)^2$, и рассмотрим приближение

$$\widetilde{R} = 2B\sqrt{1+\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2B}f_0, \quad f_0(r,\rho,\varphi,\psi) = 2(r\cos\varphi + \rho\cos\psi).$$

Тогда формула, определяющая смещение, примет вид

$$\begin{aligned} &w_p^B(r,\varphi) = \\ &= \int_0^A \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2B\sqrt{1+\beta}} + \int_0^\infty R(ht)J_0(2Bt\sqrt{1+\beta})\,dt\right] p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставим в соотношение (6) вместо функции $R(ht)$ ее приближение (2)

$$\frac{1}{2B\sqrt{1+\beta}} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^\infty e^{-2th}(ht)^k J_0(2Bt\sqrt{1+\beta})\,dt \tag{8}$$

и воспользуемся формулой [4, 6.611]

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(\beta x)dx = \frac{\beta^{-\nu}\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right]^\nu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(\alpha \pm i\beta) > 0.$$

Получим в результате

$$\begin{aligned} k=0; \quad & \int_0^\infty e^{-2th}J_0(2Bt\sqrt{1+\beta})\,dt = \frac{1}{\sqrt{(2h)^2+4B^2(1+\beta)}} = \\ & = \frac{1}{2B}\left[\left(\frac{2h}{2B}\right)^2 + 1 + \beta\right]^{-\frac{1}{2}}; \\ k=1: \quad & h\int_0^\infty e^{-2th}tJ_0(2Bt\sqrt{1+\beta})\,dt = \\ & = h\Big(-\frac{\partial}{\partial(2h)}\Big)\frac{1}{\sqrt{(2h)^2+4B^2(1+\beta)}} = \\ & = \frac{2h^2}{(2B)^3}\left[\left(\frac{2h}{2B}\right)^2 + 1 + \beta\right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда разложение для соотношения (8) запишем так

$$\frac{1}{2B}[1+\beta]^{-\frac{1}{2}} - a_0\frac{1}{2B}\left[\left(\frac{2h}{2B}\right)^2 + 1 + \beta\right]^{-\frac{1}{2}} - a_1\frac{2h^2}{(2B)^3}\left[\left(\frac{2h}{2B}\right)^2 + 1 + \beta\right]^{-\frac{1}{2}} - \ldots$$

Воспользуемся формулами [5, 9.03, 9.05]

$$
\begin{aligned}
[1+\beta]^{-\frac{1}{2}} &= \Big[1+\frac{f_0}{2B}\Big]^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}_k\Big(\frac{f_0}{2B}\Big)^k = \\
&= 1+\widetilde{a}_1\frac{f_0}{2B}+\widetilde{a}_2\Big(\frac{f_0}{2B}\Big)^2+\widetilde{a}_3\Big(\frac{f_0}{2B}\Big)^3+\ldots;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big[1+\frac{f_0}{2B}+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}_k\Big(\frac{f_0}{2B}+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2\Big)^k = \\
&= \quad 1+\widetilde{a}_1\Big(\frac{f_0}{2B}+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2\Big)+\widetilde{a}_2\Big(\Big(\frac{f_0}{2B}\Big)^2+2\frac{f_0}{2B}\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^4\Big)+ \\
&\quad +\widetilde{a}_3\Big(\Big(\frac{f_0}{2B}\Big)^3+3\Big(\frac{f_0}{2B}\Big)^2\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2+3\frac{f_0}{2B}\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^4+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^6\Big)+\ldots;
\end{aligned}
$$

$$
\Big[1+\frac{f_0}{2B}+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Big(\frac{f_0}{2B}+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^4\Big)^k..
$$

Запишем в результате соотношение (7)

$$
w_p^B(r,\varphi) = \int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_B(r,\rho,p,\psi)p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi,
$$

$$
\begin{aligned}
f_B(r,\rho,p,\psi) = \frac{1}{2B}\Big\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}_k\Big(\frac{f_0}{2B}\Big)^k\Big\}-& \\
-a_0\frac{1}{2B}\Big\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}_k\Big(\frac{f_0}{2B}+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2\Big)^k\Big\}-& \\
-a_1\frac{2h^2}{(2B)^2}\Big\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}_k\Big(\frac{f_0}{2B}+\Big(\frac{2h}{2B}\Big)^2\Big)^k\Big\}-\ldots&
\end{aligned}
$$

В полученном соотношении воспользуемся четностью подынтегральной функции по переменной ψ, переписав уравнение (4) в форме

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h(r,\rho,p,\psi)p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi+\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_B(r,\rho,p,\psi)p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi = \\
&\qquad = 2\pi G\mu_1\delta, \qquad 0<r<A.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Решение уравнения (9) будем искать в виде разложения по малому параметру

$$
p(\rho,\psi) = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2B}\Big)^m p_m(\rho,\psi). \tag{10}
$$

После подстановки (10) в уравнение (9) получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2B}\Big)^m\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_h(r,\rho,p,\psi)p_m(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2B}\Big)^m\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_B(r,\rho,p,\psi)p_m(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi=2\pi G\mu_1\delta,$$

приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и получим систему рекуррентных сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_h(r,\rho,p,\psi)p_0(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi=2\pi G\mu_1\delta,\\
&\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_h(r,\rho,p,\psi)p_1(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi+(1-a_0)\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}p_0(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi=0,\\
&\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_h(r,\rho,p,\psi)p_1(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi+(1-a_0)\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}p_2(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi=0,\\
&\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_h(r,\rho,p,\psi)p_1(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi+(1-a_0)\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}p_2(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi-\\
&\qquad-\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}(a_0\widetilde{a}_1(2h)^2+a_1 2h^2)p_0(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi=0.
\end{aligned}\tag{11}$$

Найдем постоянные коэффициенты в (2) $a_0=\frac{f(0)}{0!}=2$, $a_1=\frac{f(1)}{1!}=-4$, $\widetilde{a}_1=\frac{1}{2}$ и рассмотрим первое уравнение системы (11)

$$\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_h(r,\rho,p,\psi)p_0(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi=2\pi G\mu_1\delta.\tag{12}$$

Решение будем искать в виде

$$p_0(\rho,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^0(\rho)\cos n\psi.\tag{13}$$

Подставим (13) в уравнение (12), учтем (3) и воспользуемся ортогональностью системы косинусов

$$\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^A p_n^0(\rho)\rho\int\limits_0^{\pi}[1+R(ht)]J_n(rt)J_n(\rho t)\,d\rho\,dt\cdot\cos n\varphi=2\pi G\mu_1\delta.$$

Разложим правую часть по системе косинусов. В общем случае имеем

$$\begin{aligned}
&f(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)\cos n\varphi=f_0(r)+f_1(r)\cos\varphi+\dots,\\
&f_0=2G\mu_1\delta,\quad f_1(r)=2G\mu_1 r\sin\omega.
\end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях косинусов, получим систему парных интегральных уравнений

$$n=0: \qquad \int\limits_0^A p_0^0(\rho)\rho\int\limits_0^\infty [1+R(ht)]J_0(rt)J_0(\rho t)\,d\rho dt = 2G\mu_1\delta,$$

$$n=1: \qquad \int\limits_0^A p_1^0(\rho)\rho\int\limits_0^\infty [1+R(ht)]J_1(rt)J_1(\rho t)\,d\rho dt = 2G\mu_1 r\sin\omega.$$

Решение (13) приобретет вид

$$p_0(\rho,\psi)=p_0^0(\rho)+p_1^0(\rho)\cos\psi.$$

В постановке задачи поворот штампа не осуществляется, т.е. $\omega=0$, тогда останется только первое уравнение и решение будет иметь вид

$$p_0(\rho,\psi)=p_0^0(\rho).$$

Сделаем в уравнении замену

$$\begin{array}{llll} r=r'A, & r'\in[0,1], & \rho=\rho'A, & \rho'\in[0,1], \\ d\rho=Ad\rho', & t=t'/A, & dt=dt'/A, & a=h/A. \end{array}.$$

Штрихи далее писать не будем, подразумевая замену

$$\int\limits_0^1 p_0^0(\rho)\rho\int\limits_0^\infty [1+R(ta)]J_0(rt)J_0(\rho t)\,d\rho\,dt = 2G\mu_1\delta/A.$$

Решение ищем в виде разложения по многочленам Якоби

$$p_0^0(\rho)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{m=0}^\infty p_{0m}^0 P_m^{0,-\frac12}(1-2\rho^2).$$

После подстановки решения в уравнение получим

$$\sum_{m=0}^\infty p_{0m}^0\Bigg[\int\limits_0^1 \frac{W_{0,0}(r,\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}P_m^{0,-\frac12}(1-2\rho^2)\rho\,d\rho+ \\ +\int\limits_0^1 \frac{\rho P_m^{0,-\frac12}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_0^\infty R(ta)J_0(rt)J_0(\rho t)\,d\rho dt\Bigg]=2G\mu_1\delta/A,$$

$$W_{k,k}(r,\rho)=\int\limits_0^\infty J_k(rt)J_k(\rho t)\,dt.$$

Исходя из соотношения [8]

$$\int\limits_0^1 \frac{W_{k,k}(x,y)}{\sqrt{1-y^2}}P_m^{k,-\frac12}(1-2y^2)y^{k+1}\,dy=\sigma_{mk}x^kP_m^{k,-\frac12}(1-2x^2),$$

где $\sigma_m = \dfrac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+k+\frac{1}{2})}{2m!\Gamma(m+k+1)}$, $P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2)$ — многочлены Якоби, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{0m}^0 \Bigg[\sigma_{m0} P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2r^2) + \\ + \int_0^1 \frac{\rho P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{\infty} R(ta) J_0(rt) J_0(\rho t) d\rho dt\Bigg] = 2G\mu_1\delta/A.$$

Умножим обе части уравнения на множитель $\dfrac{rP_j^{0,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}}$ и проинтегрируем на промежутке $0 < r < 1$. Получим одномерную бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\Lambda_{j0} p_{0j}^0 + \sum_{m=0}^{\infty} p_{0m}^0 A_{mj}^{(0)} = 2G\mu_1\delta \cdot f_{0j}/A,$$

где

$$\Lambda_{j0} = \sigma_{j0}\widetilde{\sigma}_{j0} = \left[\frac{\Gamma(j+1/2)}{2j!}\right]^2 \frac{1}{2j+1/2},$$

$$f_{0j} = \int_0^1 \frac{rP_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}}\, dr,$$

$$A_{mj}^{(0)} = \int_0^1 \frac{\rho P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{rP_j^{0,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{\infty} R(ta) J_0(rt) J_0(\rho t)\, d\rho\, dr\, dt,$$

$$R(ta) = \frac{2e^{-2ta} - 2 - 4ta}{2\,\mathrm{sh}(2ta) - 4ta}.$$

Регуляризируем бесконечную систему, для этого сделаем замену $\widetilde{p}_{0j}^0 = \sqrt{\Lambda_{j0}} p_{0j}^0$ и разделим обе части уравнения на величину $\sqrt{\Lambda_{m0}}$, где $t_{mj}^{(0)} = -\dfrac{A_{mj}^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_{m0}}\sqrt{\Lambda_{j0}}}$, $f_{0j} = \dfrac{2G\mu_1\delta}{A} \cdot \dfrac{f_{0j}}{\sqrt{\Lambda_{j0}}}$.

Систему будем решать методом редукции. Как показано в [8], должны выполняться такие условия: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_{mj}^2 < \infty$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_{0j}^2 < \infty$. Можем записать окончательное решение в данном приближении:

$$p(\rho,\psi) = p_0^0(\rho) + \frac{1}{2B}p_1^1(\rho) + \frac{1}{(2B)^2}[p_0^2(\rho) + p_2^2(\rho)\cos\psi] + \\ + \frac{1}{(2B)^3}[p_0^3(\rho) + p_1^3(\rho)\cos\psi + p_2^3(\rho)\cos 2\psi], \tag{14}$$

где функции $p_j^i(\rho)$, $i = 0, 1, 2$, $j = \overline{0,3}$ найдены на основании решения p_{ij}^i одномерных систем вида $\widetilde{p}_{ij}^i - \sum\limits_{m=0}^{N} \widetilde{p}_m^i t_{mj}^{(i)} = \widetilde{f}_{ij}$, $i = \overline{1,N}$. Условия равновесия штампа с учетом замены примут вид

$$A^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi p(\rho,\varphi)\rho d\rho d\psi = P, \qquad A^3 \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi p(\rho,\varphi)\rho^2 \sin\psi d\rho d\psi = M.$$

Из первого условия получим

$$p_{00}^0 + \frac{1}{2B} p_{00}^1 + \frac{1}{(2B)^2} p_{00}^2 + \frac{1}{(2B)^3} p_{00}^3 = \frac{1}{A^3 \pi}$$

$$\delta\Big[2.101554 + \frac{1}{2B}\cdot 2.944353 + \frac{1}{(2B)^2}\cdot 4.125145 - \frac{1}{(2B)^3}\cdot 29.552763\Big] = \frac{1}{A^2\pi G}.$$

Из второго условия равновесия выведем, что

$$2A^3 \int\limits_0^1 p(\rho)\rho^2 d\rho - \frac{2}{3} A^3 \frac{1}{(2B)^3} \int\limits_0^1 p_2^3(\rho)\rho^2 d\rho = M$$

или после подстановки решения

$$2A^3 \sum_{m=0}^{6} p_{0m}^k \int\limits_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho -$$
$$- \frac{2}{3} A^3 \frac{1}{(2B)^3} \sum_{m=0}^{1} p_{2m}^3(\rho) \int\limits_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} P_m^{2,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho = M.$$

4. Второе приближение. Уточним полученный результат следующим приближением. Для этого сохраним в выражении для радикала $\widetilde{R} = 2B\sqrt{1+\beta}$ все входящие слагаемые. Используем обозначение

$$\beta = \frac{1}{2B}\Big[f_0 + \frac{f_1}{2B}\Big],$$

$$f_0(r,\rho,\varphi,\psi) = 2(r\cos\varphi + \rho\cos\psi), \qquad f_1(r,\rho,\varphi,\psi) = r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos(\varphi+\psi).$$

Проделаем те же действия, что и в первом приближении, но с учетом вида β и получим систему рекуррентных интегральных уравнений

$$\int\limits_0^A \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h(r,\rho,p,\psi) p_0(\rho,\psi)\rho\, d\rho\, d\psi = 2\pi G\mu_1\delta,$$

$$\int\limits_0^A \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h(r,\rho,p,\psi) p_1(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi + (1-a_0)\int\limits_0^A \int\limits_{-\pi}^{\pi} p_0(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi = 0,$$

$$\int\limits_0^A \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h(r,\rho,p,\psi) p_2(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi + (1-a_0)\int\limits_0^A \int\limits_{-\pi}^{\pi} p_1(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi +$$
$$+\int\limits_0^A \int\limits_0^{\pi} (\widetilde{a}_1 f_0 - a_0\widetilde{a}_1 f_0) p_0(\rho,\psi)\rho\, d\rho\, d\psi = 0,$$

$$\int\limits_0^A \int\limits_0^{\pi} K_h(r,\rho,p,\psi) p_3(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi + (1-a_0)\int\limits_0^A \int\limits_0^{\pi} p_2(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi -$$
$$-\int\limits_0^A \int\limits_0^{\pi} (\widetilde{a}_1 f_0 - a_1\widetilde{a}_1 f_0) p_1(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi +$$
$$+\int\limits_0^A \int\limits_0^{\pi} (\widetilde{a}_2 f_0^2 - a_0\widetilde{a}_1 (2h)^2 - a_1\widetilde{a}_2 f_0^2 - a_1 2h^2 + h\widetilde{a}_1 f_1) p_1(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi = 0.$$

Для первого уравнения найдено

$$p_0(\rho,\psi) = p_0^0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{6} p_{0m}^0 P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2).$$

Подставив полученное решение во второе уравнение системы, получим

$$p_1(\rho,\psi) = p_1(\rho)\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = \sum_{m=0}^{6} p_{0m}^0 P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2).$$

Рассмотрим третье уравнение в системе, решение которого разложим по системе косинусов. После подстановки в уравнение получена система парных интегральных уравнений и, учитывая, что угол поворота штампа $\omega = 0$, решение примет вид

$$p_2(\rho,\psi) = p_0^2(\rho) + p_1^2(\rho)\cos\psi.$$

Слагаемые в решении найдены методом редукции

$$p_0^2(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{0m}^2 P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2),$$
$$p_1^2(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{1m}^2 P_m^{1,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2),$$

тогда решение примет форму

$$p_2^2(\rho,\psi)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{m=0}^{6}p_{0m}^2P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{m=0}^{6}p_{1m}^2P_m^{1,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)\cos\psi.$$

Рассмотрим четвертое уравнение в рекуррентной системе, решение которого строим в виде

$$p_2(\rho,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}p_n^3(\rho)\cos n\psi.$$

После подстановки решения получена система из трех интегральных уравнений, откуда найдено

$$p_3(\rho,\psi)=p_0^3(\rho)+p_1^3(\rho)\cos\psi+p_2^3(\rho)\cos 2\psi,$$

$$p_0^3(\rho)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{m=0}^{6}p_{0m}^3P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2),$$
$$p_1^3(\rho)=\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{m=0}^{6}p_{1m}^3P_m^{0,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2).$$

Окончательное решение имеет структуру (14), где отличие заключается в значениях p_{ij}^i, $j=\overline{1,N}$, найденных из соответствующих одномерных систем.

5. Анализ численных результатов. Было проведено сравнение результатов для $B >> 1$ с результатами работы [3]. Значения контактных напряжений отличались в пятом знаке. Также было проведено сравнение результатов, полученных двумя приближениями. Так, в таблице 1 приведены значение осадки штампа и 1 — момента силы в 1-м приближении; 2 — момента силы во 2-м приближении; для $\mu=1/3$, $G=44.7$ГПа, $A=1$, $h=1$ в зависимости от расстояния B.

Таблица 1. Значение момента силы и осадки штампа

B	δ	$M1$	$M2$
1	0.00270	0.51454	0.51450
2	0.00277	0.51423	0.51422
3	0.00277	0.51411	0.51401
5	0.00285	0.51402	0.51404

Заключение. Решена контактная задача о вдавливании кругового штампа внецентренной силой в полубесконечный слой. Найдены величина осадки штампа и момент силы, обеспечивающий поступательное перемещение штампа. Проблема сведена к системе рекуррентных сингулярных интегральных уравнений, каждое из которых сведено к одномерной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений методом ортогональных многочленов. При тестировании метода было выявлено, что точность 10^{-3} достигается при сохранении второго члена разложения асимптотики.

1. **Александров В. М.** О действии штампа на упругий слой конечной толщины / В. М. Александров, И. И. Ворович // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, вып. 2. – С. 323–330.
2. **Босаков С. В.** Об одном подходе в контактной задаче для круглого штампа на упругом основании / С. В. Босаков // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 4. – С. 65–71.
3. **Ворович И. И.** О давлении штампа на слой конечной толщины / И. И. Ворович, Ю. А. Устинов // Прикл. математика и механика. – 1959. – 22, вып. 3. – С. 445–454.
4. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
5. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М.: Наука, 1977. – 228 с.
6. **Егоров К. Е.** Контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый жесткий штамп / К. Е. Егоров // Докл. АН СССР. – 1960. – 133, № 4. – С. 781–784.
7. **Лебедев Н. Н.** Осесимметричная контактная задача для упругого слоя / Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд // Прикл. математика и механика. – 1958. – 22, № 3. – С. 320–326.
8. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
9. **Фесенко А. А.** Смешанная задача теории упругости для толстой полубесконечной плиты / А. А. Фесенко // Пробл. выч. мех. и прочности конструкций. – 2009. – Вып. 11. – С. 138–149.
10. **Boussinesq J.** Application des potentiels a l'etude l'equilibre et du mouvement des solides elastiques / J. Boussinesq. – Paris: Gauthiers – Villars, 1885.
11. **Florence A. L.** Two contact problems for an elastic layer / A. L. Florence // Quart. Journ. Mech. and Appl. Math. – 1961. – Vol. 14, № 4. – P. 456.
12. **Low R.** On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer / R. Low // Quart. Appl. Math. – 1964. – Vol.22, № 2. – P. 153–160.
13. **Srivastava K.** Axisymmetric problem of an infinite elastic plane in contact with two punches / K. Srivastava, V. Saxena // Ind. J. Pure and Appl. Math. – 1972. – Vol. 3, № 6. – P. 1278–1285.