ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 3(23).–С. 106–111

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.375

І. П. Шацький
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Івано-Франківський відділ

ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ, ПОСЛАБЛЕНОЇ РОЗРІЗОМ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ

Шацький І. П. Поперечний згин пластини, послабленої розрізом з контактуючими берегами. У двовимірній постановці розглядаються задачі про контактну взаємодію берегів наскрізних тріщин під час поперечного згину ізотропних пластин. Явище закриття тріщини, зумовлене деформацією згину, враховується на підставі моделі контакту вздовж лінії. За припущенням розміри та розташування дефектів є такими, що можна проігнорувати їх взаємодію з межею пластини. Закріплення зовнішнього контура враховано у функціях основного напруженого стану бездефектної пластини. Детально розглянуто задачі про закриття короткої прямолінійної тріщини у круглій та трикутній пластинах під дією сталого тиску чи зосередженої сили.
Ключові слова: пластина, закриття тріщини, поперечний згин.

Шацкий И. П. Поперечный изгиб пластины, ослабленной разрезом с контактирующими кромками. В двумерной постановке рассмотрены задачи контактного взаимодействия кромок сквозных трещин при поперечном изгибе изотропных пластин. Явление закрытия трещины, вызванное деформацией изгиба, учитывается на основании модели контакта вдоль линии. По предположению размеры и положение дефектов такие, что можно пренебречь их взаимодействием с краем пластины. Закрепление внешнего контура учтено в функциях основного напряженного состояния пластины. Подробно рассмотрены задачи о закрытии короткой прямолинейной трещины в круговой и треугольной пластинах при действии постоянного давления либо сосредоточенной силы.
Ключевые слова: пластина, закрытие трещины, поперечный изгиб.

Shatsky I. P. Transverse bending of plate weakened by the cut with contacting edges. The problems of contact interaction of through cracks edges under transverse bending of isotropic plates are considered in two-dimensional statement. The crack closure phenomenon caused by bending deformation is taken into account on the basis of the model of contact along the line. By assumption, the size and location of the faults allow to ignore their interaction with the plate edges. Outer contour fixing has been accounted for in the basic stress state functions of the plate. The problems concerning short rectilinear crack closure in circular and triangular plates under the influence of constant pressure or concentrated force have been examined in depth.
Key words: plate, crack closure, transverse bending.

Вступ. Ефективним засобом дослідження контактної взаємодії берегів тріщин за згину тонких пластин є аналіз закриття тріщини в рамках гіпотез прямої нормалі на підставі моделі контакту вздовж лінії [1–6]. Цій моделі відповідають крайові задачі для пари бігармонічних рівнянь плоского напруженого стану та згину (за Кірхгофом) із взаємопов'язаними крайовими умовами контакту на розрізах. У працях [5, 6] засобами теорії варіаційних нерівностей висвітлено загальнотеоретичні аспекти існування, єдиності та гладкості розв'язків таких задач. Конкретні аналітичні результати для прямолінійної тріщини в безмежній пластині побудовано для випадку рівномірного згину [1, 3] та для довільного згинального навантаження, знакосталого на розрізі [2, 4]. В разі поперечного згину надтріснутої пластини несамозрівноваженим поперечним навантаженням виникає потреба задовольнити додатковим крайовим умовам на контурі закріплення, що, зазвичай, унеможливлює побудови аналітичних розв'язків.

Метою цього повідомлення є побудова головних членів асимптотичних розв'язків задач поперечного згину обмежених пластин з віддаленими від краю короткими наскрізними тріщинами, береги яких контактують у лицьовій поверхні.

Основні результати

1. Постановка задачі. Нехай тонка ізотропна пластина, що займає в декартових координатах область $(x, y, z) \in \Omega \times [-h, h]$, послаблена прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$, розташованою вздовж відрізка осі абсцис: $y = 0,\ x \in (-l,\ l)$. На лицьових поверхнях $z = \pm h$ пластини задано поперечне навантаження $\sigma_z(x,\ y,\ h) - \sigma_z(x,\ y,\ -h) = q(x,\ y)$, її край довільним чином закріплений, береги розрізу вільні від зовнішньої дії. Слід визначити напружений стан пластини з урахуванням контакту берегів тріщини, спричиненого деформацією згину.

Аналіз закриття тріщини проводили у двовимірній постановці в рамках гіпотез прямої нормалі на підставі моделі контакту вздовж лінії [1–6]. Цій моделі відповідають крайові задачі для пари бігармонічних рівнянь теорій плоского напруженого стану та згину із взаємопов'язаними крайовими умовами гладкого контакту на розрізі:

$$\Delta\Delta\varphi = 0,\ D\Delta\Delta w = q(x,\ y),\ \ (x, y) \in \Omega \backslash \{y = 0,\ x \in (-l,\ l)\}; \tag{1}$$

$$[u_y] = h|[\vartheta_y]|\ > 0, M_y = hN_y sgn[\vartheta_y], N_y \leqslant 0,\ \ y = 0, x \in (-l,\ l); \tag{2}$$

$$N_{xy} = 0,\ P_{xy} = C,\ y = 0,\ x \in (-l,\ l). \tag{3}$$

Тут φ – функція Ері, w – прогин пластини, Δ – оператор Лапласа; $[u_x]$, $[u_y]$, $[\vartheta_x]$, $[\vartheta_y]$ – стрибки переміщень та кутів повороту нормалі на розрізі; N_y, N_{xy} – нормальне та дотичне мембранні зусилля; M_y, P_{xy} – згинальний та узагальнений крутний моменти ($P_{xy} = \partial^{-1}Q_y/\partial x + M_{xy}$, Q_y – перерізувальна сила); C – довільна стала; $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Під значеннями функцій $N_y,\ N_{xy}, M_y, P_{xy}$ на $(-l,\ l)$ розуміємо півсуми їхніх граничних значень на берегах розрізу. Самі ж функції при переході через розріз змінюються неперервно:

$$[N_y] = 0, [N_{xy}] = 0, [M_y] = 0, [P_{xy}] = 0,\ x \in (-l,\ l).$$

На зовнішній межі $\partial\Omega$ слід задати іще певні умови закріплення. Ця обставина не дає можливості побудувати аналітичний розв'язок задачі; у разі використання методу інтегральних рівнянь необхідним є знання функцій Ґріна бігармонічних рівнянь для області Ω з однорідними крайовими умовами на $\partial\Omega$ або ж побудова чотирьох додаткових рівнянь на зовнішньому контурі.

2. Побудова наближеного розв'язку. Нехай розміри та розташування дефекту є такими, що можна проігнорувати його взаємодію з межею пластини. Це означає, що виконується сильна нерівність: $l << a_{\min}$, де $a_{\min}$ – найкоротша віддаль від центра розрізу до краю пластини. Відтак, для побудови інтегральних рівнянь задач плоского напруженого стану та згину із взаємопов'язаними умовами на розрізі використаємо фундаментальні розв'язки бігармонічних рівнянь у безмежній площині. Закріплення зовнішнього контура, яке забезпечує глобальну рівновагу об'єкта, врахуємо у функціях основного напруженого стану бездефектної пластини. Інтегральні подання зусиль та моментів на розрізі через похідні від функцій стрибка будуть [7–9]:

$$N_y(x,\,0) = \frac{B}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{[u_y]'(\xi)}{\xi - x}d\xi, \;\; M_y(x,\,0) = M_y^0(x,\,0) - \frac{Da_0}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{[\vartheta_y]'(\xi)}{\xi - x}d\xi,$$

$$N_{xy}(x,\,0) = \frac{B}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{[u_x]'(\xi)}{\xi - x}d\xi, \; P_{xy}(x,\,0) = P_{xy}^0(x,\,0) - \frac{Da_0}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{[\vartheta_x]'(\xi)}{\xi - x}d\xi, \qquad (4)$$

де $M_y^0(x,\,0)$, $P_{xy}^0(x,\,0)$ – відомі компоненти основного напруженого стану бездефектної пластини, навантаженої $q(x,\,y)$ та ідентично закріпленої на $\partial\Omega$; $B = 2Eh$, $a_0 = (3+\nu)(1-\nu)$.

Нехай функція $M_y^0(x,\,0)$ – знакостала на $(-l,\; l)$. За такого припущення умови контакту вздовж лінії (2) виконуються на всьому розрізі [3] (в іншому разі слід розглядати змішану задачу з невідомими підконтурами контакту та вільного краю). Підстановкою виразів (4) в умови (2), (3) дістали систему сингулярних інтегральних рівнянь, що розпадається на дві незалежні системи, які відповідають симетричному та антисиметричному відносно осі абсцис розподілам напружень:

$$[u_y]'(x) = h[\vartheta_y]'(x)sgn[\vartheta_y](x),$$

$$\frac{Da_0}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{[\vartheta_y]'(\xi)}{\xi - x}d\xi + \frac{Bh}{4\pi}sgn[\vartheta_y](x)\int\limits_{-l}^{l}\frac{[u_y]'(\xi)}{\xi - x}d\xi = M_y^0(x,\,0),\; x\in(-l,\; l); \qquad (5)$$

$$\frac{B}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{[u_x]'(\xi)}{\xi - x}d\xi = 0, \quad \frac{Da_0}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{[\vartheta_x]'(\xi)}{\xi - x}d\xi = P_{xy}^0(x,\,0) + C, \;\; x\in(-l,\; l). \qquad (6)$$

Рівняння (5), (6) за додаткових умов

$$[u_y](\pm l) = 0,\; [u_x](\pm l) = 0,\; [\vartheta_y](\pm l) = 0,\; [\vartheta_x](\pm l) = 0,\; [w](\pm l) = 0$$

мають замкнутий розв'язок:

$$[u_y](x) = \frac{4\kappa\,|m(x)|}{Bh(1+\kappa)}, \quad [\vartheta_y](x) = -\frac{4m(x)}{Da_0(1+\kappa)};$$

$$[u_x](x) = 0,\; [\vartheta_x](x) = -\frac{4p(x)}{Da_0}; \qquad (7)$$

$$m(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-l}^{l} \Gamma_0(x,\xi)\; M_y^0(\xi,0)d\xi,$$

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-l}^{l} \Gamma_0(x,\xi)\;(P_{xy}^0(\xi,0)+C)\,d\xi; \tag{8}$$

$$C = -\int\limits_{-l}^{l}\sqrt{l^2-\xi^2}\;P_{xy}^0(\xi,\,0)\,d\xi,\;\Gamma_0(x,\xi) = \ln\frac{l^2-\xi x+\sqrt{l^2-\xi^2}\sqrt{l^2-x^2}}{l^2-\xi x-\sqrt{l^2-\xi^2}\sqrt{l^2-x^2}},$$

$$\kappa = \frac{Bh^2}{Da_0} = \frac{3(1+\nu)}{3+\nu}.$$

Підставляючи стрибки переміщень у вирази (4), знаходимо контактну реакцію між зімкнутими берегами розрізу

$$N_y(x,\,0) = -\frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{|M_y^0(x,\,0)|}{h}, \tag{9}$$

розподіл якої повторює профіль знакосталого моменту основного напруженного стану.

Розв'язкові (7) відповідають коефіцієнти інтенсивності зусиль $(K_N,\ K_S)$ та моментів $(K_M,\ K_H)$:

$$K_N^{\pm} = \frac{\sqrt{l}}{h}\frac{\kappa}{1+\kappa}|I_m^{\mp}|,\; K_M^{\pm} = \frac{\sqrt{l}}{1+\kappa}I_m^{\mp},\; K_S^{\pm} = 0,\; K_H^{\pm} = \sqrt{l}I_p^{\mp}; \tag{10}$$

$$I_m^{\pm} = \frac{1}{\pi\sqrt{l}}\int\limits_{-l}^{l}\sqrt{\frac{l\pm\xi}{l\mp\xi}}M_y^0(\xi,0)d\xi, I_p^{\pm} = \frac{1}{\pi\sqrt{l}}\int\limits_{-l}^{l}\sqrt{\frac{l\pm\xi}{l\mp\xi}}(P_{yx}^0(\xi,0)+C)\,d\xi. \tag{11}$$

При побудові інтегральних рівнянь задачі знехтували регулярними ядрами завбільшки $O((l/a_{\min})^2)$. Щоби зберегти прийнятий рівень точності, у функціях $M_y^0(x,\,0),\ P_{xy}^0(x,\,0)$ теж доцільно зберігати лише величини, більші, ніж $O((l/a_{\min})^2)$. Тоді вирази (7)–(11) трактуємо як головні члени асимптотичного розв'язку задачі поперечного згину.

3. Приклади. Розглянуті нижче приклади стосуються випадків симетрії області Ω та навантаження q відносно лінії розташування тріщини, для яких $P_{xy}^0(x,\,0) = 0$, а отже $p(x) = 0$, $I_p^{\pm} = 0$. Підраховуючи квадратури (8) і (11), у виразах для $M_y^0(x,\,0)$, взятих із книги [10], зберігали члени, не менші, ніж $O((l/a_{\min}))$.

Нехай кругова пластина з радіусом a послаблена центральною тріщиною завдовжки $2l << a$ і навантажена рівномірно розподіленим тиском $q(x,\,y) = q = const$. Для жорстко затиснутого краю

$$M_y^0(x,\,0) = qa^2\frac{1+\nu}{16};$$

$$m(x) = qa^2 \frac{1+\nu}{16} \sqrt{l^2 - x^2}, \quad I_m^{\pm} = qa^2 \frac{1+\nu}{16};$$

для шарнірно опертого краю

$$M_y^0(x,\, 0) = qa^2 \frac{3+\nu}{16};$$

$$m(x) = qa^2 \frac{3+\nu}{16} \sqrt{l^2 - x^2}, \quad I_m^{\pm} = qa^2 \frac{3+\nu}{16}.$$

У разі навантаження кругової пластини зосередженою силою $q(x,\, y) = Q\delta(x,\, y)$, прикладеною в початку координат, для затиснутого краю

$$M_y^0(x,0) = \frac{P}{4\pi} \left((1+\nu) \ln \frac{a}{|x|} - \nu \right);$$

$$m(x) = \frac{P}{4\pi} \left(\left(1 + (1+\nu) \ln \frac{2a}{l} \right) \sqrt{l^2 - x^2} - (1+\nu) \left(\frac{\pi}{2}|x| - x \arcsin \frac{x}{l} \right) \right),$$

$$I_m^{\pm} = \frac{P}{4\pi} \left((1+\nu) \ln \frac{2a}{l} - \nu \right);$$

для шарнірно опертого краю

$$M_y^0(x,0) = \frac{P}{4\pi} \left((1+\nu) \ln \frac{a}{|x|} + 1 - \nu \right);$$

$$m(x) = \frac{P}{4\pi} \left(\left(2 + (1+\nu) \ln \frac{2a}{l} \right) \sqrt{l^2 - x^2} - (1+\nu) \left(\frac{\pi}{2}|x| - x \arcsin \frac{x}{l} \right) \right),$$

$$I_m^{\pm} = \frac{P}{4\pi} \left((1+\nu) \ln \frac{2a}{l} + 1 - \nu \right).$$

Нехай трикутна пластина з шарнірно опертим краєм навантажена сталим за координатами тиском q. Розріз $(-l, l)$ розташований на бісектрисі $[-a/3,\ 2a/3]$ рівнобічного трикутника заввишки a. Тоді

$$M_y^0(x,\, 0) = qa^2 \left(\frac{1+\nu}{54} + \frac{1-\nu}{24} \frac{x}{a} \right);$$

$$m(x) = qa^2 \left(\frac{1+\nu}{54} + \frac{1-\nu}{48} \frac{x}{a} \right) \sqrt{l^2 - x^2}, \quad I_m^{\pm} = qa^2 \left(\frac{1+\nu}{54} \mp \frac{1-\nu}{48} \frac{l}{a} \right).$$

Формальною підстановкою $\kappa = 0$ із виразів (7)–(11) можна дістати наближені розв'язки, які відповідають класичній постановці без урахування контакту берегів [8, 11].

Висновки. Таким чином, побудовано головні члени асимптотичного розв'язку задачі поперечного згину пластини Кірхгофа з прямолінійною контактною тріщиною, які рекомендуємо для наближеної (з точністю $O((l/a_{\min})^2)$) експрес-оцінки пружної та граничної рівноваги пластинчастих конструкцій з дефектами. Число прикладів, подібних до наведених, можна без значних зусиль збільшити, оскільки в літературі є багато готових розв'язків для суцільних пластин під поперечним навантаженням з різноманітним закріпленням криволінійних границь.

1. **Шацький І. П.** Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
2. **Шацкий И. П.** О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжении и изгибе / И. П. Шацкий // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 46–50.
3. **Young M. J.** Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates — A classical plate solution / M. J. Young, C. T. Sun // Intern. J. Fract. – 1992. – V. 55. – P. 81–93.
4. **Шацкий И. П.** Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И. П. Шацкий // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 91–97.
5. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. – Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. – 408 p.
6. **Хлуднев А. М**. Теория трещин с возможным контактом берегов / А. М. Хлуднев // Успехи механики. – 2005. – Т. 3, № 4. – С. 41–82.
7. **Хижняк В. К.** Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. – 126 с.
8. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
10. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновски-Кригер. – М.: Физматгиз, 1964. – 636 с.
11. **Бережницкий Л. Т.** Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.