ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 3(23).–С. 7–13

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 60A05
УДК 512.5+519.21

О. О. Ємець, Т. М. Барболіна
Полтавський університет економіки і торгівлі
Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка

ПРО АДИТИВНУ ОПЕРАЦІЮ НА МНОЖИНІ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Ємець О. О., Барболіна Т. М. Про адитивну операцію на множині дискретних випадкових величин. Розглядається підхід до визначення адитивної операції на множині дискретних випадкових величин, у результаті якої зберігається кількість можливих значень випадкових величин. Встановлюються умови, за яких операція є комутативною та асоціативною.
Ключові слова: дискретна випадкова величина, адитивна операція, комутативність, асоціативність.

Емец О. А., Барболіна Т. Н. Об аддитивной операции на множестве дискретных случайных величин. Рассматривается подход к определению аддитивной операции на множестве дискретных случайных величин, в результате которой сохраняется количество возможных значений случайных величин. Устанавливаются условия, при которых операция является коммутативной и ассоциативной.
Ключевые слова: дискретная случайная величини, аддитивная операция, коммутативность, ассоциативность.

Iemets O. O., Barbolina T. M. About additive operation on set of discrete random variable. Authors propose an approach to determine an additive operation on set of discrete random variables. Result of this operation has as much possible values, how many operands. Conditions under which operation is commutative and associative are determined.
Key words: discrete random variable, additive operation, commutative, associative.

Вступ. Імовірнісний характер початкових даних, що має місце у багатьох практичних задачах, звертає увагу дослідників на розвиток моделей і методів теорії ймовірностей та стохастичного програмування (див., наприклад: [1–6]).

При побудові моделей задач стохастичної оптимізації виникає питання про те, що вважати допустимим розв'язком і як визначати кращий розв'язок. Один із підходів до вирішення зазначеної проблеми ґрунтується на введенні відношення порядка на множині дискретних випадкових величин, наприклад, так, як це було зроблено в [6]. Мінімум на скінченній множині дискретних випадкових величин розуміється як дискретна випадкова величина, що є першою у порядку випадкових величин, пронумерованих згідно з лінійним порядком.

Одна із запропонованих у [6] постановок задач полягає у пошуку мінімуму функції

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

© Ємець О. О., Барболіна Т. М., 2014

в області

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \preceq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Тут принаймні деякі з величин x_j, a_{ij}, b_i, c_j є дискретними випадковими величинами, $\preceq$ – символ відношення порядку на множині дискретних випадкових величин, який встановлюється на основі порівняння математичних сподівань, дисперсій, а у випадку їх рівності — можливих значень випадкових величин та їх імовірностей.

Слід відзначити, що при виконанні арифметичних операцій над дискретними випадковими величинами кількість можливих значень результату збільшується у порівнянні з операндами. Зокрема, як відомо, множина значень дискретної випадкової величини $Z = X + Y$ (X, Y — незалежні дискретні випадкові величини) є множина різних значень сум вигляду $x_i + y_j$, де x_i і y_j — можливі значення випадкових величин X і Y. Це означає, що коли X і Y мають відповідно k і m значень, то сума $X+Y$ може мати до nm значень. Отже, якщо кожний із n доданків має k можливих значень, то сума у найгіршому з точки зору обчислювальної складності випадку матиме k^n значень. Цей факт створює суттєві обчислювальні складності при значній кількості доданків.

Аналогічні труднощі виникають також і при виконанні операцій над нечіткими числами. Один із алгоритмів зменшення кількості елементів носія дискретного нечіткого числа розглянуто в [7]. Однак цей підхід не може бути використаний для випадкових величин, оскільки застосування запропонованих в [7] перетворень до ряду розподілу дискретної випадкової величини веде до порушення умови, що сума імовірностей повинна дорівнювати одиниці.

Дана стаття присвячена розгляду питання про можливість введення адитивної бінарної операції, у результаті якої зберігається кількість можливих значень дискретних випадкових величин.

Основні результати. Для простоти викладу розглядатимемо дискретні випадкові величини, які мають три можливих значення. Дискретні випадкові величини позначатимемо великими латинськими літерами (X, Y), їх можливі значення — малими (x_i, y_i), а відповідні ймовірності через $p_1^X, p_2^X, p_3^X, p_1^Y, p_2^Y, p_3^Y$.

Визначимо операцію $\oplus$ таким рядом розподілу

Значення $X \oplus Y$	$x_1 + y_1$	$x_2 + y_2$	$x_3 + y_3$
Їх ймовірності	$p_1^{X\oplus Y}$	$p_2^{X\oplus Y}$	$p_3^{X\oplus Y}$

де імовірності визначаються так (α_{ij}^t — деякі невід'ємні дійсні коефіцієнти):

$$p_t^{X\oplus Y} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^t p_i^X p_j^Y \quad t = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Зауважимо, що сума величин (1) повинна дорівнювати одиниці:

$$p_1^{X\oplus Y} + p_2^{X\oplus Y} + p_3^{X\oplus Y} = \sum_{t=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^t p_i^X p_j^Y = 1.$$

З точки зору потреб моделювання цілком природно вимагати, щоб уведена операція була комутативною й асоціативною. Наприклад, знаходження суми дискретних випадкових величин виникає в деяких задачах упакування прямокутників зі стохастичними параметрами (можливі підходи до побудови відповідних моделей див. в [8]). Зрозуміло, що при цьому результат повинен визначатися лише розміщенням прямокутників і не залежати від порядку обчислення суми.

З'ясуємо, які умови повинні задовольняти коефіцієнти α_{ij}^t, щоб операція $\oplus$ була комутативною й асоціативною. Оскільки значення величин $X \oplus Y$ і $Y \oplus X$, а також $(X \oplus Y) \oplus Z$ і $X \oplus (Y \oplus Z)$, очевидно, однакові, то залишається перевірити рівність імовірностей.

Розглянемо спочатку виконання комутативності. Для цього обчислимо різниці $(t = 1, 2, 3)$

$$p_t^{X\oplus Y} - p_t^{Y\oplus X} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^t p_i^X p_j^Y - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^t p_i^Y p_j^X =$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^t \left(p_i^X p_j^Y - p_i^Y p_j^X\right) = \alpha_{12}^t \left(p_1^X p_2^Y - p_1^Y p_2^X\right) +$$
$$+\alpha_{21}^t \left(p_2^X p_1^Y - p_2^Y p_1^X\right) + \alpha_{13}^t \left(p_1^X p_3^Y - p_1^Y p_3^X\right) + \alpha_{31}^t \left(p_3^X p_1^Y - p_3^Y p_1^X\right) +$$
$$+\alpha_{23}^t \left(p_2^X p_3^Y - p_2^Y p_3^X\right) + \alpha_{32}^t \left(p_3^X p_2^Y - p_3^Y p_2^X\right) = \left(p_1^X p_2^Y - p_1^Y p_2^X\right)\left(\alpha_{12}^t - \alpha_{21}^t\right) +$$
$$+ \left(p_1^X p_3^Y - p_1^Y p_3^X\right)\left(\alpha_{13}^t - \alpha_{31}^t\right) + + \left(p_2^X p_3^Y - p_2^Y p_3^X\right)\left(\alpha_{23}^t - \alpha_{32}^t\right).$$

Уведена операція $\oplus$ є комутативною тоді і лише тоді, коли при будь-яких значеннях імовірностей p_1^X, p_2^X, p_3^X, p_1^Y, p_2^Y, p_3^Y різниці $p_t^{X\oplus Y} - p_t^{Y\oplus X}$ дорівнюють нулю $(t = 1, 2, 3)$.

Зокрема, для $p_1^X = \frac{1}{3}$, $p_2^X = 0$, $p_3^X = \frac{2}{3}$, $p_1^Y = \frac{3}{4}$, $p_2^Y = 0$, $p_3^Y = \frac{1}{4}$ маємо

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\alpha_{13}^t - \alpha_{31}^t\right) = 0,$$

звідки $\alpha_{13}^t = \alpha_{31}^t$. Аналогічно при $p_1^X = 0$, $p_2^X = \frac{1}{3}$, $p_3^X = \frac{2}{3}$, $p_1^Y = 0$, $p_2^Y = \frac{3}{4}$, $p_3^Y = \frac{1}{4}$ маємо $\alpha_{23}^t = \alpha_{32}^t$, а з $p_1^X = \frac{1}{3}$, $p_2^X = \frac{2}{3}$, $p_3^X = 0$, $p_1^Y = \frac{3}{4}$, $p_2^Y = \frac{1}{4}$, $p_3^Y = 0$ отримуємо $\alpha_{12}^t = \alpha_{21}^t$.

Якщо виконуються рівності $\alpha_{12}^t = \alpha_{21}^t$, $\alpha_{13}^t = \alpha_{31}^t$, $\alpha_{23}^t = \alpha_{32}^t$ $(t = 1, 2, 3)$, то

$$p_t^{X\oplus Y} - p_t^{Y\oplus X} = \left(p_1^X p_2^Y - p_1^Y p_2^X\right)\cdot 0 + \left(p_1^X p_3^Y - p_1^Y p_3^X\right)\cdot 0 +$$
$$+ \left(p_2^X p_3^Y - p_2^Y p_3^X\right)\cdot 0 = 0$$

незалежно від значень імовірностей $p_1^X, p_2^X, p_3^X, p_1^Y, p_2^Y, p_3^Y$. Таким чином, необхідною й достатньо умовою комутативності операції $\oplus$ є виконання умов $\alpha_{ij}^t = \alpha_{ji}^t$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$.

Розглянемо тепер умови, при яких введена операція буде асоціативною. Обчислимо відповідні ймовірності:

$$p_t^{(A\oplus B)\oplus C} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \alpha_{kl}^t p_k^{A\oplus B} p_l^C = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \alpha_{kl}^t p_l^C \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^k p_i^A p_j^B\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \alpha_{kl}^t \alpha_{ij}^k p_i^A p_j^B p_l^C,$$

$$p_t^{A\oplus(B\oplus C)} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}^t p_i^A p_k^{B\oplus C} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}^t p_i^A\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{jl}^k p_j^B p_l^C\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{ik}^t\alpha_{jl}^k p_i^A p_j^B p_l^C.$$

Розглянемо спочатку доволі сильну достатню умову асоціативності: рівність коефіцієнтів у сумах при однакових значеннях індексів i, j, k, l:

$$\alpha_{ij}^k\alpha_{kl}^t = \alpha_{ik}^t\alpha_{jl}^k \ \forall i, j, k, l, t = 1, 2, 3 \tag{2}$$

або

$$\frac{\alpha_{ij}^k}{\alpha_{jl}^k} = \frac{\alpha_{ik}^t}{\alpha_{kl}^t} \ \forall i, j, k, l, t = 1, 2, 3.$$

Звідси

$$\frac{\alpha_{i1}^k}{\alpha_{j1}^k} = \frac{\alpha_{i2}^k}{\alpha_{j2}^k} = \frac{\alpha_{i3}^k}{\alpha_{j3}^k} = \frac{\alpha_{ik}^t}{\alpha_{kl}^t} \ \forall i, k, l, t = 1, 2, 3.$$

Зокрема, $\frac{\alpha_{11}^k}{\alpha_{21}^k} = \frac{\alpha_{12}^k}{\alpha_{22}^k}$, звідки $\alpha_{12}^k = \sqrt{\alpha_{11}^k\alpha_{22}^k}$ для всіх $k = 1, 2, 3$. Аналогічно для всіх $k = 1, 2, 3$ маємо $\alpha_{13}^k = \sqrt{\alpha_{11}^k\alpha_{33}^k}$, $\alpha_{23}^k = \sqrt{\alpha_{22}^k\alpha_{33}^k}$.

Тоді

$$p_t^{A\oplus B} = \alpha_{11}^t p_1^A p_1^B + \sqrt{\alpha_{11}^t\alpha_{22}^t}p_1^A p_2^B + \sqrt{\alpha_{11}^t\alpha_{33}^t}p_1^A p_3^B + \sqrt{\alpha_{11}^t\alpha_{22}^t}p_2^A p_1^B +$$
$$+\alpha_{22}^t p_2^A p_2^B + \sqrt{\alpha_{22}^t\alpha_{33}^t}p_2^A p_3^B + \sqrt{\alpha_{11}^t\alpha_{33}^t}p_3^A p_1^B + \sqrt{\alpha_{22}^t\alpha_{33}^t}p_3^A p_3^B + \alpha_{33}^t p_3^A p_3^B =$$
$$= \alpha_{11}^t\left(p_1^A + \sqrt{\tfrac{\alpha_{22}^t}{\alpha_{11}^t}}p_2^A + \sqrt{\tfrac{\alpha_{33}^t}{\alpha_{11}^t}}p_3^A\right)\left(p_1^B + \sqrt{\tfrac{\alpha_{22}^t}{\alpha_{11}^t}}p_2^B + \sqrt{\tfrac{\alpha_{33}^t}{\alpha_{11}^t}}p_3^B\right).$$

При $i = 1$, $j = 1$, $k = 2$, $l = 2$, $t = 1$ з (2) маємо $\alpha_{11}^2\alpha_{22}^1 = \alpha_{12}^1\alpha_{12}^2$, звідки $\alpha_{12}^2 = \frac{\alpha_{11}^2\alpha_{22}^1}{\alpha_{12}^1}$, а при $i = 1$, $j = 2$, $k = 2$, $l = 2$, $t = 1$ отримаємо $\alpha_{12}^2\alpha_{22}^1 = \alpha_{12}^1\alpha_{22}^2$. Отже, $\frac{\alpha_{11}^2\alpha_{22}^1}{\alpha_{12}^1}\alpha_{22}^1 = \alpha_{12}^1\alpha_{22}^2$, звідки $\frac{\alpha_{11}^2}{\alpha_{22}^2} = \frac{\left(\alpha_{12}^1\right)^2}{\left(\alpha_{22}^1\right)^2} = \frac{\alpha_{11}^1\alpha_{22}^1}{\left(\alpha_{22}^1\right)^2} = \frac{\alpha_{11}^1}{\alpha_{22}^1}$.

Аналогічно отримуємо, що $\frac{\alpha_{11}^3}{\alpha_{22}^3} = \frac{\alpha_{11}^1}{\alpha_{22}^1}$ та $\frac{\alpha_{11}^k}{\alpha_{33}^k} = \frac{\alpha_{11}^1}{\alpha_{33}^1}$ $(k = 1, 2)$. Позначимо $\frac{\alpha_{22}^t}{\alpha_{11}^t} = \lambda$, $\frac{\alpha_{33}^t}{\alpha_{11}^t} = \mu$ $(k = 1, 2, 3)$. Тоді

$$p_t^{A\oplus B} = \alpha_{11}^t\left(p_1^A + \lambda p_2^A + \mu p_3^A\right)\left(p_1^B + \lambda p_2^B + \mu p_3^B\right).$$

З умови $p_1^{A\oplus B} + p_2^{A\oplus B} + p_3^{A\oplus B} = 1$, отримуємо, що незалежно від значень p_1^A, p_2^A, p_3^A, p_1^B, p_2^B, p_3^B повинна виконуватися рівність

$$\left(\alpha_{11}^1 + \alpha_{11}^2 + \alpha_{11}^3\right)\left(p_1^A + \lambda p_2^A + \mu p_3^A\right)\left(p_1^B + \lambda p_2^B + \mu p_3^B\right) = 1.$$

Зокрема, для $p_1^A = 1$, $p_2^A = p_3^A = 0$, $p_1^B = 1$, $p_2^B = p_3^B = 0$ маємо

$$\alpha_{11}^1 + \alpha_{11}^2 + \alpha_{11}^3 = 1,$$

а тоді також $\left(p_1^A + \lambda p_2^A + \mu p_3^A\right)\left(p_1^B + \lambda p_2^B + \mu p_3^B\right) = 1$. При $p_1^A = p_3^A = 0$, $p_2^A = 1$. $p_1^B = p_3^B = 0$, $p_2^B = 1$ одержимо $\lambda = 1$, а при $p_1^A = p_2^A = 0$, $p_3^A = 1$, $p_1^B = p_2^B = 0$, $p_3^B = 1$ отримуємо $\mu = 1$. Таким чином, $\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = \alpha_{11}^t$ $\forall t = 1, 2, 3$. Тоді також $\alpha_{12}^t = \alpha_{21}^t = \sqrt{\alpha_{11}^t \alpha_{11}^t} = \alpha_{11}^t$, $\alpha_{13}^t = \alpha_{31}^t = \alpha_{11}^t$, $\alpha_{23}^t = \alpha_{32}^t = \alpha_{11}^t$. За таких умов

$$p_t^{A \oplus B} = \alpha_{11}^t \left(p_1^A + p_2^A + p_3^A\right)\left(p_1^B + p_2^B + p_3^B\right) = \alpha_{11}^t.$$

Але це означає, що ймовірності ряду розподілу результату операції $\oplus$ не залежать від імовірностей у рядах розподілу операндів. Тому такий підхід до визначення операції недоцільний. Послабимо тепер достатню умову і вимагатимемо рівності коефіцієнтів при однакових добутках $p_i^A p_j^B p_l^C$, тобто

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ij}^k \alpha_{kl}^t = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}^t \alpha_{jl}^k \ \forall i, j, l, t = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Система містить 81 рівняння з 27 невідомими. Проте кількість рівнянь можна зменшити, якщо врахувати, що при перестановці місцями значень i та l у рівності (2) отримується така сама рівність. Дійсно, при такій перестановці рівність $\alpha_{ij}^k \alpha_{kl}^t = \alpha_{ik}^t \alpha_{jl}^k$ набуде вигляду $\alpha_{lj}^k \alpha_{ki}^t = \alpha_{lk}^t \alpha_{ji}^k$. Оскільки $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ji}^k$, $\alpha_{lj}^k = \alpha_{jl}^k$, $\alpha_{ki}^t = \alpha_{ik}^t$, $\alpha_{kl}^t = \alpha_{lk}^t$, то ця рівність, очевидно, збігається з початковою. А тоді однаковими при такій перестановці є і рівності вигляду (3). Отже, немає сенсу розглядати рівняння, які відповідають тим наборам індексів, у яких $i > l$. Також при $i = l$ відповідна рівність перетворюється на тотожність: $\alpha_{ij}^k \alpha_{ki}^t = \alpha_{ik}^t \alpha_{ji}^k$. Таким чином, у системі (3) можна розглядати лише ті індекси, для яких виконується умова $i < l$. Таких рівнянь буде 27:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}^1\alpha_{12}^1 + \alpha_{11}^2\alpha_{22}^1 + \alpha_{11}^3\alpha_{32}^1 = \alpha_{11}^1\alpha_{12}^1 + \alpha_{12}^1\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^1\alpha_{12}^3,\\
&\alpha_{11}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{11}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{11}^3\alpha_{33}^1 = \alpha_{11}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{12}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{13}^1\alpha_{13}^3,\\
&\alpha_{12}^1\alpha_{12}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{22}^1 + \alpha_{12}^3\alpha_{32}^1 = \alpha_{11}^1\alpha_{22}^1 + \alpha_{12}^1\alpha_{22}^2 + \alpha_{13}^1\alpha_{22}^3,\\
&\alpha_{12}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{12}^3\alpha_{33}^1 = \alpha_{11}^1\alpha_{23}^1 + \alpha_{12}^1\alpha_{23}^2 + \alpha_{13}^1\alpha_{23}^3,\\
&\alpha_{13}^1\alpha_{12}^1 + \alpha_{13}^2\alpha_{22}^1 + \alpha_{13}^3\alpha_{32}^1 = \alpha_{11}^1\alpha_{32}^1 + \alpha_{12}^1\alpha_{32}^2 + \alpha_{13}^1\alpha_{32}^3,\\
&\alpha_{13}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{13}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{13}^3\alpha_{33}^1 = \alpha_{11}^1\alpha_{33}^1 + \alpha_{12}^1\alpha_{33}^2 + \alpha_{13}^1\alpha_{33}^3,\\
&\alpha_{21}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{21}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{21}^3\alpha_{33}^1 = \alpha_{21}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{22}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^1\alpha_{13}^3,\\
&\alpha_{22}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{22}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{22}^3\alpha_{33}^1 = \alpha_{21}^1\alpha_{23}^1 + \alpha_{22}^1\alpha_{23}^2 + \alpha_{23}^1\alpha_{23}^3,\\
&\alpha_{23}^1\alpha_{13}^1 + \alpha_{23}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{23}^3\alpha_{33}^1 = \alpha_{21}^1\alpha_{33}^1 + \alpha_{22}^1\alpha_{33}^2 + \alpha_{23}^1\alpha_{33}^3,\\
&\alpha_{11}^1\alpha_{12}^2 + \alpha_{11}^2\alpha_{22}^2 + \alpha_{11}^3\alpha_{32}^2 = \alpha_{11}^2\alpha_{12}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{12}^3,\\
&\alpha_{11}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{11}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{11}^3\alpha_{33}^2 = \alpha_{11}^2\alpha_{13}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{13}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{13}^3,\\
&\alpha_{12}^1\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}^2\alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^3\alpha_{32}^2 = \alpha_{11}^2\alpha_{22}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{22}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{22}^3,\\
&\alpha_{12}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{12}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{12}^3\alpha_{33}^2 = \alpha_{11}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{23}^3,\\
&\alpha_{13}^1\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{22}^2 + \alpha_{13}^3\alpha_{32}^2 = \alpha_{11}^2\alpha_{32}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{32}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{32}^3,\\
&\alpha_{13}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{13}^3\alpha_{33}^2 = \alpha_{11}^2\alpha_{33}^1 + \alpha_{12}^2\alpha_{33}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{33}^3,\\
&\alpha_{21}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{21}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{21}^3\alpha_{33}^2 = \alpha_{21}^2\alpha_{13}^1 + \alpha_{22}^2\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2\alpha_{13}^3,\\
&\alpha_{22}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{22}^3\alpha_{33}^2 = \alpha_{21}^2\alpha_{23}^1 + \alpha_{22}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{23}^2\alpha_{23}^3,\\
&\alpha_{23}^1\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2\alpha_{23}^2 + \alpha_{23}^3\alpha_{33}^2 = \alpha_{21}^2\alpha_{33}^1 + \alpha_{22}^2\alpha_{33}^2 + \alpha_{23}^2\alpha_{33}^3,\\
&\alpha_{11}^1\alpha_{12}^3 + \alpha_{11}^2\alpha_{22}^3 + \alpha_{11}^3\alpha_{32}^3 = \alpha_{11}^3\alpha_{12}^1 + \alpha_{12}^3\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^3\alpha_{12}^3,\\
&\alpha_{11}^1\alpha_{13}^3 + \alpha_{11}^2\alpha_{23}^3 + \alpha_{11}^3\alpha_{33}^3 = \alpha_{11}^3\alpha_{13}^1 + \alpha_{12}^3\alpha_{13}^2 + \alpha_{13}^3\alpha_{13}^3,\\
&\alpha_{12}^1\alpha_{12}^3 + \alpha_{12}^2\alpha_{22}^3 + \alpha_{12}^3\alpha_{32}^3 = \alpha_{11}^3\alpha_{22}^1 + \alpha_{12}^3\alpha_{22}^2 + \alpha_{13}^3\alpha_{22}^3,\\
&\alpha_{12}^1\alpha_{13}^3 + \alpha_{12}^2\alpha_{23}^3 + \alpha_{12}^3\alpha_{33}^3 = \alpha_{11}^3\alpha_{23}^1 + \alpha_{12}^3\alpha_{23}^2 + \alpha_{13}^3\alpha_{23}^3,\\
&\alpha_{13}^1\alpha_{12}^3 + \alpha_{13}^2\alpha_{22}^3 + \alpha_{13}^3\alpha_{32}^3 = \alpha_{11}^3\alpha_{32}^1 + \alpha_{12}^3\alpha_{32}^2 + \alpha_{13}^3\alpha_{32}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{13}^1\alpha_{13}^3+\alpha_{13}^2\alpha_{23}^3+\alpha_{13}^3\alpha_{33}^3=\alpha_{11}^3\alpha_{33}^1+\alpha_{12}^3\alpha_{33}^2+\alpha_{13}^3\alpha_{33}^3,\\
\alpha_{21}^1\alpha_{13}^3+\alpha_{21}^2\alpha_{23}^3+\alpha_{21}^3\alpha_{33}^3=\alpha_{21}^3\alpha_{13}^1+\alpha_{22}^3\alpha_{13}^2+\alpha_{23}^3\alpha_{13}^3,\\
\alpha_{22}^1\alpha_{13}^3+\alpha_{22}^2\alpha_{23}^3+\alpha_{22}^3\alpha_{33}^3=\alpha_{21}^3\alpha_{23}^1+\alpha_{22}^3\alpha_{23}^2+\alpha_{23}^3\alpha_{23}^3,\\
\alpha_{23}^1\alpha_{13}^3+\alpha_{23}^2\alpha_{23}^3+\alpha_{23}^3\alpha_{33}^3=\alpha_{21}^3\alpha_{33}^1+\alpha_{22}^3\alpha_{33}^2+\alpha_{23}^3\alpha_{33}^3.
\end{aligned}$$

Розв'язування даної системи досить складне і громіздке, проте можемо вказати деякі її розв'язки. Одним із розв'язків цієї системи буде розв'язок, одержаний вище за більш сильних умов: $\alpha_{ij}^t=\alpha_{11}^t\ \forall i,j=1,2,3$. Іншим розв'язком є такий: $\alpha_{11}^1=x\ (x\in[0;1])$, $\alpha_{12}^1=\alpha_{21}^1=\alpha_{13}^1=\alpha_{31}^1=1$, $\alpha_{11}^2=1-x$, $\alpha_{22}^2=\alpha_{23}^2=\alpha_{32}^2=1$, $\alpha_{33}^2=z\ (z\in[0;1])$, $\alpha_{33}^3=1-z$, решта величин дорівнюють нулю. У цьому випадку

$$\begin{aligned}
p_1^{X\oplus Y}&=xp_1^Xp_1^Y+p_1^Xp_2^Y+p_2^Xp_1^Y+p_1^Xp_3^Y+p_3^Xp_1^Y,\\
p_2^{X\oplus Y}&=(1-x)\,p_1^Xp_1^Y+p_2^Xp_2^Y+p_2^Xp_3^Y+p_3^Xp_2^Y+zp_3^Xp_3^Y,\\
p_3^{X\oplus Y}&=(1-z)\,p_3^Xp_3^Y.
\end{aligned}$$

Висновки. У статті розглянуто властивості бінарної адитивної операції на множині дискретних випадкових величин, яка має властивість незростання кількості можливих значень у результаті. Така характеристика введеної операції робить її привабливою з обчислювальної точки зору, зокрема, в задачах стохастичного програмування. Актуальним напрямком подальших досліджень є встановлення взаємозв'язку між класичною операцією додавання дискретних випадкових величин та операцією, запропонованою у даній статті, з урахуванням відношень порядку.

1. **Ермольев Ю. М.** Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 256 с.
2. **Сергиенко И. В.** Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике / И. В. Сергиенко, М. В. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 4. – С. 7–29.
3. **Кан Ю. С.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями / Ю. С. Кан, А. И. Кибзун. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 375 с.
4. **Емец О. А.** О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №5. – С. 35–44.
5. **Зорин А. В.** Стохастическая модель сообщающихся систем массового обслуживания с повторными вызовами и циклическим управлением в случайной среде / А. В. Зорин // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №5. – С. 100–109.
6. **Емец О. А.** Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Доповіді НАН України. – 2014. – №11. – С. 40–45.
7. **Iemets O.** Solving of the Problem of Discrete Fuzzy Number Carrier's Growing / O. Iemets, O. Yemets' // Taurida Journal Of Computer Science Theory and Mathematics. – 2013. – V. 2. – P. 40–43.

8. **Ємець О. О.** Формалізація взаємного розташування прямокутників з випадковими параметрами / О. О. Ємець, Т. М. Барболіна // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2014) : abstracts of XXIV International Conference, September 1-5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic / Taras Shevchenko National University of Kyiv, University of Defence, Brno etc. – К.: ТВіМС, 2014. – С. 124–125.