ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2014 .–Т.19, вип. 3(23).–С. 14–26

Mathematical Subject Classification: 42A10
УДК 517.5

О. А. Новиков, О. Г. Ровенская
Донбасский государственный педагогический университет

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА r-ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Новiков О. О., Ровенська О. Г. Наближення класiв iнтегралiв Пуассона r-повторними сумами Валле Пуссена. Отримано асимптотичнi формули для верхнiх граней вiдхилень тригонометричних полiномiв, породжуваних повторними методами пiдсумовування Валле Пуссена, на класах iнтегралiв Пуассона.
Ключовi слова: ряд Фур'є, асимптотична формула, класи перiодичних функцiй, модуль неперервностi.

Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторными методами суммирования Валле Пуссена, на классах интегралов Пуассона.
Ключевые слова: ряд Фурье, асимптотическая формула, классы периодических функций, модуль непрерывности.

Novikov O. A., Rovenska O. G. Approximation of classes of Poisson integrals by r-repeated de la Vallee Poussin sums. We obtain asymptotic formulas for upper bounds of the deviations of trigonometric polynomials, generated by repeated de la Vallee Poussin methods of summation, taken over classes of Poisson integrals.
Key words: Fourier series, asymptotic formula, classes of periodic functions, modulus of continuity.

Введение. Целью работы является решение одной из экстремальных задач теории приближения классов периодических функций линейными методами. Изучены вопросы асимптотического поведения верхних граней уклонений линейных операторов, порождаемых повторным применением методов суммирования Валле Пуссена на классах периодических функций, представимых в виде интегралов Пуассона. В работе применены методы исследования интегральных представлений уклонений полиномов на классах функций, возникшие и получившие свое развитие благодаря работам С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, Н. П. Корнейчука, В. К. Дзядика, А. И. Степанца и других.

Следуя А. И. Степанцу [1], обозначим $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$ — классы непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

в которой

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q\in(0;1),\ \beta\in\mathbb{R}$$

— ядро Пуассона, а функция $\varphi(t)$, соответственно, такая, что выполняется условие $\operatorname{esssup}|\varphi(t)| \leqslant 1$ или

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in \mathbb{R},$$

где $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности.

Известно (см., например, [2, с. 31]), что классы $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций $f(x)$, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \leqslant \ln \frac{1}{q}$.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L$

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ (см. [2, с. 47]) определяются соотношением

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x).$$

Пусть $p_1,\ p_2, ..., p_r$ — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} ... \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f;x), \qquad (1)$$

которые будем называть r-повторними суммами Валле Пуссена (при $r = 2$ см. [3]).

Задача приближения классов интегралов Пуассона тригонометрическими полиномами имеет свою историю. В 1946 году С.М. Никольский [4] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_{n-1}(f;x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

где величина $O(1)$ не зависит от n. В 1980 году С. Б. Стечкин [5] показал, что остаточный член в этой формуле можно записать в виде $O(1)\frac{q^{n+1}}{(1-q)n}$, где величина $O(1)$ равномерно ограничена по n и по q.

Аналогичная задача для классов $C^q_\beta H_\omega$ была решена в 2001 году А. И. Степанцом. В работе [1] было показано, что при $n \to \infty$ справедлива формула

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_\beta H_\omega\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in C^q_\beta H_\omega} ||f(x) - S_{n-1}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{4q^n\theta_n(\omega)}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\ dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega(1/n),$$

где $\theta_n(\omega)\in[1/2;1]$, причем $\theta_n(\omega)=1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

В работе [6] (см. также [7, с. 218]) для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} ||f(x)-V_{n,p}(f;x)||_C = \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x)-V_{n,p}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), 1<p<n. \qquad (3)$$

А. С. Сердюком [8] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (3):

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos pt+q^2}dt, \quad s=s(p)=\begin{cases}1, & p=1\\ 3, & p=2,3,....\end{cases}$$

Асимптотические формулы для верхних граней уклонений r-повторных сумм Валле Пуссена при $r=2$ на классах интегралов Пуассона получены в работе [3].

Основные результаты. В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $n\to\infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} ||f(x)-V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C.$$

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $q\in(0;1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $p_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2,...,r$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^r p_i = \Sigma_p < n$ и $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности. Тогда при $n-\Sigma_p\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}) = \frac{2q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi^2\prod\limits_{i=1}^r p_i}e_{n-\Sigma_p}(\omega)\int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx +$$

$$+O(1)\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\prod_{i=1}^r p_i}\frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)}\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}}+\frac{1}{(1-q)^{2r}}\right]+$$

$$+O(1)\frac{1}{\prod_{i=1}^r p_i}\left(\sum_{\alpha(r-1)\subset\overline{r}}\frac{q^{(n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}+r)}}{(1-q)^{r+1}}\omega\left(\left[n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}\right]^{-1}\right)\right), \tag{4}$$

где $\overline{r}=\{1;2;...;r\}$, $\Sigma_p^\alpha=\sum\limits_{j\in\alpha}p_j$, $\alpha(i)$ *– множество, содержащее* i *элементов,*

$$Z_q(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}, e_{n-\Sigma_p}(\omega)=\theta_n(\omega)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t(n-\Sigma_p)^{-1})\sin t dt,$$

$\theta_n(\omega)\in[1/2;1]$, *причем* $\theta_n(\omega)=1$, *если* $\omega(t)$ *– выпуклый модуль непрерывности,* $O(1)$ *– величина равномерно ограниченная по* n, q, β, p_i, $i=1,2,...,r$.

Для $r=2\nu-1$, $\nu\in\mathbb{N}$,

$$\int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx=\int\limits_0^\pi\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu}=\frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2q^{2k}, \tag{5}$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *– коэффициенты биномиального разложения.*

Доказательство. Найдем удобные интегральные представления для величин

$$\delta_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x)=f(x)-V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x).$$

Применяя метод математической индукции и формулы Эйлера, можно показать, что для любого $r\in\mathbb{N}$

$$\delta_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left(\sigma_1^{(r)}\cos\frac{\beta\pi}{2}-\sigma_2^{(r)}\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \tag{6}$$

где величины $\sigma_1^{(r)}=\sigma_1^{(r)}(t,q,n)$, $\sigma_2^{(r)}=\sigma_2^{(r)}(t,q,n)$ заданы соотношениями

$$\sigma_1^{(r)}=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-\Sigma_p^\alpha+r+\nu}\cos(n-\Sigma_p^\alpha+r-\nu)t,$$

$$\sigma_2^{(r)}=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-\Sigma_p^\alpha+r+\nu}\sin(n-\Sigma_p^\alpha+r-\nu)t,$$

$|\alpha|$ – количество элементов множества α.

Поэтому, выполняя элементарные преобразования и применяя обозначение

$$b_m^{q,\beta}(t)=$$
$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\cos\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\cos(mt+\tfrac{\beta\pi}{2})+\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu\sin\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\sin(mt+\tfrac{\beta\pi}{2}),$$

находим

$$\delta_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x)=\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)b_{n-\Sigma_p+r}^{q,\beta}(t)dt+$$

$$+O(1)\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\left(\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{\alpha(m)\subset\overline{r}}q^{(n-\Sigma_p^{\alpha(m)}+r)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_\beta^q(x+t)b_{n-\Sigma_p^{\alpha(m)}+r}^{q,\beta}(t)\right|dt\right). \tag{7}$$

Для изучения функции $b_m^{q,\beta}(t)$ воспользуемся известной формулой

$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\theta),$$

где $\sin\theta=B/\sqrt{A^2+B^2};\cos\theta=A/\sqrt{A^2+B^2}$. Применяя формулы Эйлера, получаем

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r}C_r^\nu(-1)^\nu q^\nu\cos\nu t\right)^2+\left(\sum_{\nu=0}^{r}C_r^\nu(-1)^\nu q^\nu\sin\nu t\right)^2=\left(1-2q\cos t+q^2\right)^r.$$

Обозначим $\xi(t)=\mathrm{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}$. Применяя метод математической индукции, можно показать, что для всякого $n\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{-\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu C_n^\nu q^\nu\sin\nu t}{\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu C_n^\nu q^\nu\cos\nu t}\right)=n\mathrm{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}.$$

Поэтому получаем

$$b_m^{q,\beta}(t)=Z_q^{r+1}(t)\cos\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t)\right),m\in\mathbb{N}.$$

Для множеств $\alpha\subset\overline{r}$ обозначим

$$J_{n,\overline{p}}^{\alpha}(f)=\int\limits_0^{2\pi}f(t)Z_q^{r+1}(t)\cos\left((n-\Sigma_p^\alpha+r)t+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t)\right)dt \tag{8}$$

и положим $J_{n,\overline{p}}^{\alpha}(f)=J_{n,\overline{p}}(f)$ для случая $\alpha=\overline{r}$.

Так как классы $C_\beta^qH_\omega$ инвариантны относительно сдвига аргумента, то в силу соотношения (7) в принятых обозначениях имеем

$$\mathcal{E}(C_\beta^qH_\omega;V_{n,\overline{p}}^{(r)})=$$

$$=\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sup_{f\in H_\omega}\|J_{n,\overline{p}}(f)\|+O(1)\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{\alpha(i)\subset\overline{r}}q^{n-\Sigma_p^{\alpha(i)}+r}\sup_{f\in H_\omega}\left\|J_{n,\overline{p}}^{\alpha(i)}(f)\right\|. \tag{9}$$

Изучим величины $J_{n,\overline{p}}(f)$. Положим

$$\tau=\tilde{y}(t)=t+\tfrac{1}{n-\Sigma_p}\left((r+1)\xi(t)+rt+\tfrac{\beta\pi}{2}\right),$$

$$Z_{q,n,\overline{p}}(t)=\left(\tfrac{n-\Sigma_p+r}{n-\Sigma_p}-\tfrac{2(n-\Sigma_p)+r-1}{n-\Sigma_p}q\cos t+\tfrac{n-\Sigma_p-1}{n-\Sigma_p}q^2\right)^{-1/2}.$$

Тогда выполняя преобразования, получаем $\tilde{y}'(t) = Z_q^2(t)Z_{q,n,\overline{p}}^{-2}(t)$. Так как для любых $t \in \mathbb{R}$ и $q \in (0;1)$ выполнено $Z_q^2(t) > Z_{q,n,\overline{p}}^2(t)$, то $\tilde{y}'(t) > 1$. Следовательно, функция $\tilde{y}(t)$ имеет обратную функцию $t = y(\tau) = \tilde{y}^{-1}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой выполнено $y'(\tau) = Z_{q,n,\overline{p}}^2(y(\tau))Z_q^{-2}(y(\tau))$ и $0 < y'(\tau) < 1$.

Выполняя замену переменной $t = y(\tau)$, получаем

$$J_{n,\overline{p}}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau))Z_q^{r+1}(y(\tau))\cos\left([n-\Sigma_p]\tau\right)d\tau + R_{n,\overline{p}}^{(1)}(f), \tag{10}$$

где

$$R_{n,\overline{p}}^{(1)}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau))r_{n,\overline{p}}^{(1)}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau,$$
$$r_{n,\overline{p}}^{(1)}(\tau) = Z_q^{r+1}(y(\tau))[Z_{q,n,\overline{p}}^2(y(\tau)) - Z_q^2(y(\tau))].$$

Покажем, что $\forall f \in H_\omega$ при $n \to \infty$

$$|R_{n,\overline{p}}^{(1)}(f)| = O(1)\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)(1-q)^{-2r}(n-\Sigma_p)^{-1}, \tag{11}$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по всем параметрам.

Заметим, что функция $F(\tau) = f(y(\tau)) \in H_\omega[\tilde{y}(0);\tilde{y}(2\pi)]$. Изучим нули функции $\varphi(t) = r_{n,\overline{p}}^{(1)}(t)\cos([n-\Sigma_p]t)$. Выполнив элементарные преобразования, получаем, что $\operatorname{sign}\left(r_{n,\overline{p}}^{(1)}(\tau)\right)' = \operatorname{sign}(\sin y(\tau))$, $\tau \in [\tilde{y}(0);\tilde{y}(2\pi)]$. Так как для любых $t \in \mathbb{R}$ и $q \in (0;1)$ выполнено $Z_q(t) > Z_{q,n,\overline{p}}(t)$, то $r_{n,\overline{p}}^{(1)}(\tau)$ на промежутке $[\tilde{y}(0);\tilde{y}(2\pi)]$ принимает отрицательные значения, на промежутке $[\tilde{y}(0);\tilde{y}(\pi)]$ строго возрастает, а на промежутке $[\tilde{y}(\pi);\tilde{y}(2\pi)]$ строго убывает.

Пусть $x_k = \frac{k\pi}{n-\Sigma_p}$ и $\tau_k = x_k + \frac{\pi}{2(n-\Sigma_p)}$. Не нарушая общности, можно считать, что $0 \leqslant \beta < 4$. Тогда справедливы неравенства: $0 \leqslant \tilde{y}(0) \leqslant x_2$; $x_{n-\Sigma_p+r} \leqslant \tilde{y}(\pi) < x_{n-\Sigma_p+r+2}$; $x_{2(n-\Sigma_p+r)} \leqslant \tilde{y}(2\pi) \leqslant x_{2(n-\Sigma_p+r+1)}$.

На каждом промежутке $[\tau_k;\tau_{k+1}]$, $k = 2,3,...,2(n-\Sigma_p+r-1)$ функция $\cos(n-\Sigma_p)\tau$ сохраняет знак $(-1)^{k+1}$. Учитывая, кроме того, что функция $r_{n,\overline{p}}^{(1)}(\tau)$ на промежутке $[\tilde{y}(0);\tilde{y}(\pi)]$ отрицательна и строго возрастает, а на промежутке $[\tilde{y}(\pi);\tilde{y}(2\pi)]$ отрицательна и строго убывает, заключаем, что числа

$$\alpha_k = \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} r_{n,\overline{p}}^{(1)}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau$$

таковы, что для $k \in \{2,3,...,n-\Sigma_p+r-2\}$ числа $|\alpha_k|$ убывают, а для $k \in \{n-\Sigma_p+r+2, n-\Sigma_p+r+3,...,2(n-\Sigma_p+r-1)\}$ числа $|\alpha_k|$ возрастают, и кроме того, выполняется условие $\operatorname{sign}(\alpha_k) = (-1)^k$. Следовательно, $\operatorname{sign}\left(\sum\limits_{k=m}^{n-\Sigma_p+r-2}\alpha_k\right) = (-1)^m$, $\forall m \in \{2,3,...,n-\Sigma_p+r-2\}$. Поэтому для функций

$$r_{n,\overline{p}}^{(+)}(t) = \int\limits_{t}^{\tau_{n-\Sigma_p+r-1}} r_{n,\overline{p}}^{(1)}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau$$

для таких m выполнено условие $\operatorname{sign}\left(r^{(+)}_{n,\overline{p}}(\tau_m)\right) = (-1)^m$. Это значит, что на концах каждого отрезка $[\tau_k;\tau_{k+1}]$, $k \in \{2, 3, ..., n - \Sigma_p + r - 2\}$ функция $r^{(+)}_{n,\overline{p}}(t)$ принимает значения различные по знаку. Поэтому она на каждом из этих промежутков $[\tau_k;\tau_{k+1}]$ имеет единственный простой нуль $\overline{\tau}_k$ и для таких k выполнено

$$\int\limits_{\overline{\tau}_k}^{\overline{\tau}_{k+1}} r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau = 0. \tag{12}$$

Аналогично функция

$$r^{(-)}_{n,\overline{p}}(t) = \int\limits_{\tau_{n-\Sigma_p+r+1}}^{t} r^{(1)}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau$$

на каждом промежутке $[\tau_k;\tau_{k+1}]$, $k \in \{n-\Sigma_p+r+2, \ldots, 2(n-\Sigma_p+r-1)\}$ имеет единственный простой нуль $\overline{\tau}_k$.

Это значит, что для $k \in \{n-\Sigma_p+r+2, ..., 2(n-\Sigma_p+r-1)\}$ также имеет место соотношение (12), то есть выполнены требования леммы 5.1.3 работы [9, с. 206]. Применяя эту лемму, получаем, что $\forall\ f \in H_\omega$ имеет место оценка (11).

Следующий шаг состоит в дальнейшем упрощении интеграла в соотношении (10). С этой целью определим функцию $l_{n,\overline{p}}(\tau)$, положив

$$l_{n,\overline{p}}(\tau) = \begin{cases} Z_q(y(\tau_k)), & \tau \in [x_k;x_{k+1}], k = 2, 3, ..., 2(n-\Sigma_p+r)-3; \\ 0, & \tau \in [\tilde{y}(0), x_2] \cup (x_{2(n-\Sigma_p+r-1)}, \tilde{y}(2\pi)). \end{cases} \tag{13}$$

Тогда

$$J_{n,\overline{p}}(f) = \int\limits_{x_2}^{x_{2(n-\sum_p+r-1)}} f(y(\tau))l^{r+1}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau + R^{(1)}_{n,\overline{p}}(f) + R^{(2)}_{n,\overline{p}}(f), \tag{14}$$

где

$$R^{(2)}_{n,\overline{p}}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau))r^{(2)}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau, r^{(2)}_{n,\overline{p}}(\tau) = Z^{r+1}_q(y(\tau)) - l^{r+1}_{n,\overline{p}}(\tau). \tag{15}$$

Для изучения величины $R^{(2)}_{n,\overline{p}}(f)$ снова будет использована лемма 5.1.3 работы [9, с. 206]. Покажем, что функция $\varphi(\tau) = r^{(2)}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)$ удовлетворяет требованиям этой леммы. Для этого найдем промежутки, на которых функция $Z^{r+1}_q(y(\tau))$ сохраняет характер монотонности и выпуклости. Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\tau}Z^{r+1}_q(y(\tau)) = -rq\sin y(\tau)Z^{r+1}_q(y(\tau))Z^2_{q,n,\overline{p}}(y(\tau)), \\ \frac{d^2}{d\tau^2}Z^{r+1}_q(y(\tau)) = (r+1)qy'(\tau)Z^{r+1}_q(y(\tau))Z^2_{q,n,\overline{p}}(y(\tau))\times \\ \times\left[\left\{(r+1)Z^2_q(y(\tau)) + \frac{2(n-\Sigma_p)+(r-1)}{n-\Sigma_p}Z^2_{q,n,\overline{p}}(y(\tau))\right\}q\sin^2(y(\tau)) - \cos(y(\tau))\right]. \end{gathered}$$

Это значит, что функция $Z_q^{r+1}(y(\tau))$ строго убывает на отрезке $[\tilde{y}(0);\tilde{y}(\pi)]$, строго возрастает на промежутке $[\tilde{y}(\pi);\tilde{y}(2\pi)]$ и имеет ровно по одной точке перегиба на каждом из промежутков $[\tilde{y}(0);\tilde{y}(\pi)]$ и $[\tilde{y}(\pi);\tilde{y}(2\pi)]$.

Следовательно для функции $g(\tau) = Z_q^{r+1}(y(\tau))$ выполнены требования леммы 5.18.2 работы [9, с. 323]. Обозначим через τ^* точку перегиба функции $Z_q^{r+1}(y(\tau))$, находящуюся на промежутке $[\tilde{y}(0);\tilde{y}(\pi)]$. Тогда на промежутке $(\tilde{y}(0);\tau^*)$ функция $Z_q^{r+1}(y(\tau))$ выпукла вверх и строго убывает, а на промежутке $(\tau^*;\tilde{y}(\pi))$ функция $Z_q^{r+1}(y(\tau))$ выпукла вниз и строго убывает. Пусть числа k_1 и k_2 такие, что точка x_{k_1} есть ближайшая слева, а x_{k_2} ближайшая справа от точки τ^* и пусть

$$\alpha_k^{(2)} = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau.$$

Учитывая свойства функции $Z_q^{r+1}(y(\tau))$, получаем для $k = 2,3,...,n-\Sigma_p+r-3$

$$\mathrm{sign}\alpha_k^{(2)} = (-1)^k.$$

Применяя теперь лемму 5.18.2 работы [9, с. 323], можно показать, что для $k = 2,3,...,k_1-1$ числа $|\alpha_k^{(2)}|$ не убывают, а для $k = k_2, k_2+1,...,n-\Sigma_p+r-3$ числа $|\alpha_k^{(2)}|$ не возрастают. Тогда для функций

$$\Phi_1(x) = \int\limits_{x_2}^{x} r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau;\ \Phi_2(x) = \int\limits_{x}^{x_{n-\Sigma_p+r-2}} r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau$$

получаем, что функция $\Phi_1(x)$ на каждом промежутке $[x_k;x_{k+1}]$ для $k \in \{2,3,...,k_1-1\}$ имеет единственный простой нуль $\overline{x}_k$, а функция $\Phi_2(x)$ на каждом промежутке $[x_k;x_{k+1}]$, $k \in \{k_2,k_2+1,...,n-\Sigma_p+r-3\}$ также имеет единственный простой нуль $\overline{x}_k$. Аналогичные рассуждения справедливы и для промежутка $[\tilde{y}(\pi);\tilde{y}(2\pi)]$. Принимая во внимание эти построения, и полагая

$$G(\tau) = f(y(\tau))r_{n,\overline{p}}^{(2)}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau),$$

на основании (15) можем записать

$$R_{n,\overline{p}}^{(2)}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau)d\tau + \int\limits_{\tilde{y}(\pi)}^{\tilde{y}(2\pi)} G(\tau)d\tau \overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{J}_{n,\overline{p}}^{(1)}(f) + \mathcal{J}_{n,\overline{p}}^{(2)}(f). \tag{16}$$

Изучим слагаемое $\mathcal{J}_{n,\overline{p}}^{(1)}(f)$. Имеем

$$\mathcal{J}_{n,\overline{p}}^{(1)}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{x_2} G(\tau)d\tau + \int\limits_{x_2}^{\overline{x}_{k_1-1}} G(\tau)d\tau + \int\limits_{\overline{x}_{k_1-1}}^{\overline{x}_{k_2}} G(\tau)d\tau + \int\limits_{\overline{x}_{k_2}}^{x_{n-\Sigma_p+r-2}} G(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{x_{n-\Sigma_p+r-2}}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau)d\tau \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=1}^{5} i_j(f). \tag{17}$$

Учитывая, что $0 \leqslant \tilde{y}(0) \leqslant x_2 = \frac{2\pi}{n-\Sigma_p}$, получаем

$$|i_1(f)| = O(1)\omega([n-\Sigma_p]^{-1})\frac{1}{(1-q)^{r+1}(n-\Sigma_p)}. \tag{18}$$

Учитывая, что

$$|r^{(2)}_{n,\overline{p}}(\tau)| \leqslant \max_{2\leqslant k\leq n-\Sigma_p+r-3} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left|\frac{d}{d\tau} Z_q^{r+1}(y(\tau))\right| d\tau \leqslant \frac{rq\pi}{(n-\Sigma_p)(1-q)^{r+3}}, \tag{19}$$

и применяя лемму 5.1.3 работы [9, с. 206], получаем

$$|i_2(f)| + |i_4(f)| = O(1)\frac{q\omega([n-\Sigma_p]^{-1})}{(n-\Sigma_p)(1-q)^{r+3}}. \tag{20}$$

Имея в виду оценку (19), получаем

$$|i_3(f)| + |i_5(f)| = O(1)\frac{q}{(n-\Sigma_p)^2(1-q)^{r+3}}. \tag{21}$$

Объединяя соотношения (17) – (21), находим

$$|\mathcal{J}^{(1)}_{n,\overline{p}}| = O(1)\frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)(1-q)^{r+3}}.$$

Рассуждая по аналогии, получаем, что для величины $|\mathcal{J}^{(2)}_{n,\overline{p}}|$ имеет место такая же оценка, поэтому применяя (9), (14), (21) и обозначение

$$i^q_{n,\overline{p}}(f) = \int\limits_{x_2}^{x_{2(n-\Sigma_p+r-1)}} f(y(\tau)) l^{r+1}_{n,\overline{p}}(\tau)\cos([n-\Sigma_p]\tau)d\tau,$$

получаем

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}) = \frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi\prod_{i=1}^r p_i}\left[\sup_{f\in H_\omega}\left|i^q_{n,\overline{p}}(f)\right| + O(1)\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{\alpha(i)\subset\overline{r}} q^{\sum\limits_{j\in\overline{r}\setminus\alpha} p_j} \times\right.$$

$$\left.\times \sup_{f\in H_\omega}\left\|J^\alpha_{n,\overline{p}}(f)\right\| + O(1)\frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)}\left(\frac{1}{(1-q)^{r+3}} + \frac{1}{(1-q)^{2r}}\right)\right], \tag{22}$$

где величины $J^\alpha_{n,\overline{p}}(f)$ заданы соотношением (8).

Выполняя замену переменных, получаем

$$i^q_{n,\overline{p}}(f) = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_p+r)-3} Z_q^{r+1}(\tau_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\cos([n-\Sigma_p]\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)dt.$$

Поэтому

$$\sup_{f\in H_{\omega_0}}\left|i^q_{n,\overline{p}}(f)\right| \leqslant \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_p+r)-3} Z_q^{r+1}(\tau_k)S_k(\omega), \tag{23}$$

где H_{ω_0} – множество функций из H_ω со средним значением на периоде равным нулю и

$$S_k(\omega) = \sup_{f\in H_{\omega_0}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\cos([n-\Sigma_p]\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)dt \right|. \qquad (24)$$

Функция $\psi(t) = \cos([n-\Sigma_p]\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)$ на каждом промежутке $[t_k; t_{k+1}]$, $k = 2, 3, ..., 2(n-\Sigma_p+r)-3$ меняет свой знак в единственной точке $c_k = y(\tau_k)$ и имеет среднее значение на этом промежутке равное нулю. Пусть $\rho_k(t)$ – функция определенная на промежутке $[t_k; c_k]$ равенством

$$\int\limits_{t_k}^{t} \psi(t)dt = \int\limits_{t_k}^{\rho_k(t)} \psi(t)dt, t_k \leqslant t \leqslant c_k \le \rho_k(t) \leqslant t_{k+1}.$$

Тогда в силу леммы Корнейчука—Стечкина (см., например, лемму 5.1.4 работы [9, с. 208]) для любого модуля непрерывности $\omega(t)$

$$S_k(\omega) \le \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt. \qquad (25)$$

Если при этом $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, то в (25) имеет место знак равенства и верхнюю грань в соотношении (24) реализует функция из класса H_ω вида $s_k \pm f_k(t)$, где s_k – произвольные постоянные,

$$f_k(t) = \begin{cases} -\int\limits_{t}^{c_k} \omega'(\rho_k(v)-v)dv, & t\in[t_k; c_k]; \\ \int\limits_{c_k}^{t} \omega'(v-\rho_k^{-1}(v))dv, & t\in[c_k; t_{k+1}], \end{cases}$$

$\rho_k^{-1}(v)$ – функция, обратная к $\rho_k(v)$.

Объединяя соотношения (23), (24), (25), для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ получаем

$$\sup_{f\in H_{\omega_0}} |i^q_{n,\overline{p}}(f)| \le \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_p+r)-3} Z_q^{r+1}(\tau_k) \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt. \qquad (26)$$

Пусть теперь $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности. Руководствуясь снова леммой Корнейчука—Стечкина, построим функцию $f^* \in H_\omega$, для которой будет выполняться равенство

$$i^q_{n,\overline{p}}(f^*) = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_p+r)-3} Z_q^{r+1}(\tau_k) \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt + \frac{O(1)\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)(1-q)^{r+3}}. \qquad (27)$$

Функцию $f^*(t)$ будем строить на основе функций $f_k(t)$. Так как на участке $(\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi))$ функция $y'(\tau)$ возрастает, а на интервале $(\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi))$ – убывает, то величины $d_k = t_{k+1} - t_k$, $t_k = y(x_k)$, с увеличением номера k сначала возрастают, а затем убывают. Пусть $\overline{k}$ – значение номера, при котором характер указанной монотонности изменяется. Несложно заметить, что $n - \Sigma_p + r - 3 < \overline{k} < n - \Sigma_p + r + 2$.

Отметив это, положим

$$f_0(t) = \begin{cases} (-1)^k f_k(t) + \gamma_k, & t \in [t_k; t_{k+1}), k = 2, 3, ..., \overline{k}; \\ (-1)^k f_k(t) + \delta_k, & t \in (t_k; t_{k+1}], k = \overline{k} + 1, ..., 2(n - \Sigma_p + r) - 3, \end{cases}$$

где $\gamma_2 = \delta_{2(n-\Sigma_p+r)-3} = 0$, а остальные γ_k и δ_k подобраны так, чтобы функция $f_0(t)$ была непрерывной на промежутках $(t_2; t_{\overline{k}+1})$, $(t_{\overline{k}+1}; t_{2(n-\Sigma_p+r)-3})$.

Вычислим величину $i^q_{n,\overline{p}}(f_0)$. В силу леммы Корнейчука—Стечкина для $k = 2, 3, ..., 2(n - \Sigma_p + r) - 3$

$$\left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f_0(t) \cos((n - \Sigma_p)\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)dt \right| = \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t)dt.$$

Поэтому

$$i^q_{n,\overline{p}}(f_0) = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_p+r)-3} Z_q^{r+1}(\tau_k) \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t)dt. \tag{28}$$

Через $f^*(t)$ обозначим 2π-периодическую функцию, которая на периоде $[0; 2\pi]$ определяется равенством

$$f^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, c_2] \cup [c_{2(n-\Sigma_p+r)-3}, 2\pi]; \\ f_0(t), & t \in [c_2, t_{\overline{k}}] \cup [t_{\overline{k}+2}, c_{2(n-\Sigma_p+r)-3}]; \\ m(t), & t \in [t_{\overline{k}}, t_{\overline{k}+2}]; f_0(t_{\overline{k}+1} - 0) > 0; \\ M(t), & t \in [t_{\overline{k}}, t_{\overline{k}+2}]; f_0(t_{\overline{k}+1} - 0) < 0, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$m(t) = \min\{f_0(t), f_0(t_{\overline{k}+1} - 0), f_0(t_{\overline{k}+1} + 0)\},$$
$$M(t) = \max\{f_0(t), f_0(t_{\overline{k}+1} - 0), f_0(t_{\overline{k}+1} + 0)\}.$$

Так как функции $f^*(t)$ и $f_0(t)$ отличаются только на промежутках $[0, c_2]$, $[t_{\overline{k}}, t_{\overline{k}+2}]$, $[c_{2(n-\Sigma_p+r)-3}, 2\pi]$, сумма длин которых величина $O(1)(n - \Sigma_p)^{-1}$, то

$$|i^q_{n,\overline{p}}(f_0) - i^q_{n,\overline{p}}(f^*)| = O(1)\frac{\omega([n - \Sigma_p]^{-1})}{(n - \Sigma_p)(1 - q)^{r+1}}.$$

Это значит, что в силу (28) для функции $f^*(t)$ выполняется соотношение (27). Применяя рассуждения работы [1], несложно показать, что $f^* \in H_{\omega_0}$. Следовательно, в силу (26) и (27), справедливо равенство

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i^q_{n,\overline{p}}(f)| =$$
$$= \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_p+r)-3} Z_q^{r+1}(\tau_k) \int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t)dt + O(1)\frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)(1-q)^{r+1}}$$

для любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$.

Применяя рассуждения работы [9, с. 332, 335], получаем

$$\int\limits_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t)-t)dt = \frac{1}{n-\Sigma_p}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2\tau}{n-\Sigma_p}\right)\sin\tau d\tau + O(1)\frac{\omega([n-\Sigma_p]^{-1})}{(n-\Sigma_p)^2(1-q)^{r-1}};$$

$$\frac{\pi}{n-\Sigma_p}\sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_p+r)-3} Z_q^{r+1}(\tau_k) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{2}{(1-2q\cos t+q^2)^{\frac{r+1}{2}}}dt + O(1)\frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)}\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}} + \frac{1}{(1-q)^{2r}}\right].$$

Поэтому для произвольного выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(C_\beta^q H_\omega; V_{n,\overline{p}}^{(r)}) = \frac{2q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi^2\prod_{i=1}^r p_i}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2\tau[n-\Sigma_p]^{-1})\sin\tau d\tau\int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(t)dt+ \\ +O(1)\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\prod_{i=1}^r p_i}\frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)}\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}}+\frac{1}{(1-q)^{2r}}\right]+ \\ +O(1)\frac{1}{\prod_{i=1}^r p_i}\left(\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{\alpha(m)\subset\overline{r}}\frac{q^{(n-\Sigma_p^{\alpha(m)}+r)}}{(1-q)^{r+1}}\omega\left(\left[n-\Sigma_p^{\alpha(m)}\right]^{-1}\right)\right).\end{gathered} \tag{30}$$

Отправляясь от формулы (30) и применяя лемму о выпуклой мажоранте произвольного модуля непрерывности [9, с. 117], можно показать, что существует величина $\theta_n(\omega)$, такая, что справедлива формула (4).

Для $r = 2\nu-1, \nu\in\mathbb{N}$, применяя универсальную тригонометрическую подстановку и методы интегрирования рациональных функций, находим

$$\int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx = \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left[C_{2k}^k C_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k}\right].$$

Учитывая, что в силу соотношения (1.2.7.38) работы [10, с. 627]

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^k C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\nu-1} P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right),$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра, и что в силу соотношения (1.2.7.6) работы [10, с. 625]

$$(1-q^2)^{\nu-1}P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right) = \sum_{k=0}^{\nu-1}(C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k},$$

получаем формулу (5).

Заключение. Решение задачи Колмогорова—Никольского формула (4) обеспечивает, если кроме $n-\Sigma_p\to\infty$, выполняются условия $p_i\to\infty$, $\forall i\in\overline{r}$.

Если сравнивать обычные суммы Валле Пуссена и повторные, у которых изменяется одинаковое количество гармоник, то есть когда $p = \sum\limits_{i=1}^{r} p_i$, то несложно заметить, что повторные суммы Валле Пуссена на классе $C_\beta^q H_\omega$ обеспечивают более высокий порядок приближения (при $n\to\infty$), чем обычные суммы Валле Пуссена. Имея в виду формулы (2) и (4), например, в случае $p_i = \frac{p}{r}$ видим, что порядок приближения суммами $V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x)$ составляет $\frac{q^{n-p+r}}{p^r}\omega(1/(n-p))$, что в p^{r-1} раз лучше, чем порядок приближения соответствующими суммами $V_{n,p}(f;x)$.

1. **Степанец А. И.** Решение задачи Колмогорова—Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций / А. И. Степанец // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192, № 1. – С. 113–138.
2. **Степанец А. И.** Классификация и приближение периодических функций. – К. : Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. **Ровенская О. Г.** Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская, О. А. Новиков // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 96–99.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – Т. 10, № 3. – С. 207–256.
5. **Стечкин С. Б.** Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / Стечкин С. Б. // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 126–151.
6. **Рукасов В. І.** Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / В. І. Рукасов, С. О. Чайченко // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1653–1668.
7. **Степанец А. И.** Приближения суммами Валле Пуссена / А. И. Степанец, В. И. Рукасов, С. О. Чайченко. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 368 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; т. 68).
8. **Сердюк А. С.** Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 1. – С. 97–107.
9. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 426 с.
10. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды: В 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – Санкт-Петербург : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т. 1. – 632 с.