

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74B05, 42A38  
УДК 539.3

**З. Ю. Журавлєва**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ПЛОСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ**

Доклад «Смешанная задача теории упругости для полуполосы» на конференции «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 2014 г.

Доповідь «Плоска мішана задача теорії пружності для півнескінченної смуги» на конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Львів, 2014 р.

**Журавльова З. Ю. Плоска мішана задача теорії пружності для напівнескінченної полоси.** Розглядається плоска мішана задача для пружної навантаженої півполоси, один край якої защемлен, а на іншому виконуються умови гладкого контакту. Розв'язок задачі у трансформантах  $-\sin$ ,  $-\cos$  перетворення Фур'є будується точно як розв'язок векторної крайової задачі, та побудовано за допомогою апарату матриці Грина.

**Ключові слова:** напівнескінчена смуга, защемлення, гладкий контакт, матриця Грина, перетворення Фур'є, метод ортогональних многочленів.

**Журавлєва З. Ю. Плоская смешанная задача теории упругости для полубесконечной полосы.** Рассматривается плоская смешанная задача для упругой нагруженной полуполосы, один край которой защемлён, а на втором выполняются условия гладкого контакта. Решение задачи в трансформантах  $-\sin$ ,  $-\cos$  преобразования Фурье строится точно как решение векторной краевой задачи, и построено с помощью аппарата матрицы Грина.

**Ключевые слова:** полуполоса, защемление, скользящая заделка, матрица Грина, преобразование Фурье, метод ортогональных многочленов.

**Zhuravlyova Z. Yu. The plane mixed elastical problem for the semi-infinite strip.** The loaded plane elastic semistrip, the one boundary of which is fixed and the second one is in the smooth contact condition, is considered. The solution of the problem in  $-\sin$ ,  $-\cos$  Fourier transformant's domain is constructed exactly as a solution of a vector boundary problem, and with the help of the Green's matrix apparatus.

**Key words:** semistrip, fixing, smooth contact, the Green's matrix, Fourier transformation, the orthogonal polynomials' method.

**ВВЕДЕНИЕ.** Эффективные методы решения плоских упругих задач теории упругости, в том числе и для полуполосы, разработаны в работах Г. В. Колосова [1] и Н. И. Мусхелишвили [2] и опираются на использование теории функций комплексного переменного и интегралов типа Коши. Обширная библиография,

посвящённая применению метода интегральных преобразований для решения подобных задач, приведена в монографии Я. С. Уфлянда [3]. Достаточно часто используются стандартные методы, основанные на представлении решения в форме Папковича—Нейбера или представлении решения через комбинации нескольких гармонических функций [4]– [9].

В данной работе представлен подход, предложенный Г. Я. Поповым [10], основанный на применении интегральных преобразований непосредственно к уравнениям равновесия и граничным условиям исходной задачи, что сводит исходную краевую задачу к одномерной, которая решается с помощью аппарата векторной краевой задачи [11], [12].

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

**1. Постановка задачи.**

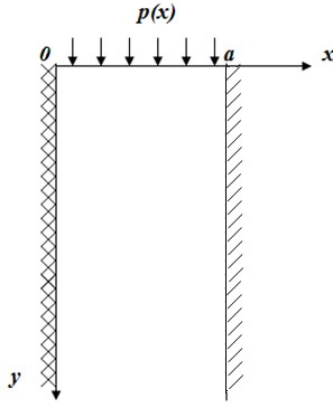


Рис. 1. Постановка задачи

Рассматривается упругая полуполоса, которая занимает область, описываемую в декартовой системе координат соотношениями  $0 < x < a$ ,  $0 < y < \infty$ . Предполагается, что на грани  $x = 0$ ,  $0 < y < \infty$  выполняются условия жёсткой заделки, на грани  $x = a$ ,  $0 < y < \infty$  выполняются условия гладкого контакта

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, v(0, y) = 0, \frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

По границе  $y = 0$ ,  $0 < x < a$  заданы напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} &= 2G\mu_0 \left( \mu \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} + (1 - \mu) \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} \right) = -p(x), \\ \tau_{yx}|_{y=0} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $p(x)$  — известная функция,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль упругости,  $\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$ .

Требуется определить смещения и напряжения, удовлетворяющие краевым условиям (1), (2) и уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \mu_* \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \mu_* \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mu_* = 1 + \mu_0, u_x(x, y) \equiv u(x, y), v_x(x, y) \equiv v(x, y).$$

**2. Сведение поставленной задачи к одномерной краевой задаче.**

Введём неизвестную функцию  $v(x, 0) = \chi(x)$ ,  $\frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = \chi'(x)$ . Тогда учитывая, что  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = -\chi'(x)$ , второе условие в (2) будет выполнено. Задача (1)–(3) сводится к одномерной краевой задаче путём применения интегрального – cos, – sin преобразования Фурье по переменной  $y$  по схеме

$$\begin{bmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x, y) \cos \beta y dy \\ v(x, y) \sin \beta y dy \end{bmatrix}. \tag{4}$$

с формулами обращения

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} u_{\beta}(x) \cos \beta y d\beta \\ v_{\beta}(x) \sin \beta y d\beta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В результате применения интегрального преобразования система уравнений равновесия примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{\beta}(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa-1)u_{\beta}(x)}{\kappa+1} + \frac{2\beta}{\kappa+1} \frac{dv_{\beta}(x)}{dx} &= \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x), \\ \frac{d^2 v_{\beta}(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa+1)v_{\beta}(x)}{\kappa-1} - \frac{2\beta}{\kappa-1} \frac{du_{\beta}(x)}{dx} &= -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x), \\ u_{\beta}(0) = 0, u_{\beta}(a) = 0, \\ v_{\beta}(0) = 0, v'_{\beta}(a) = 0, \kappa = 3 - 4\mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Введём следующие вектора

$$\vec{y}_{\beta}(x) = \begin{pmatrix} u_{\beta}(x) \\ v_{\beta}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_{\beta}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) \end{pmatrix}$$

и матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Краевая задача (6) в векторном виде запишется так:

$$\begin{aligned} L_2 \vec{y}_{\beta}(x) = I \vec{y}'_{\beta}(x) + 2\beta Q \vec{y}'_{\beta}(x) - \beta^2 P \vec{y}_{\beta}(x) &= \vec{f}_{\beta}(x), \\ I \vec{y}_{\beta}(0) = 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}_{\beta}(a) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}'_{\beta}(a) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. Решение векторной однородной задачи.

Чтобы получить решение уравнения (7), следует сначала построить решение матричного однородного уравнения  $L_2 Y_{\beta}(x) = 0, 0 < x < a$  [13]. Подстановка  $Y_{\beta}(x) = e^{\xi x} I$  приводит к равенству  $L_2 e^{\xi x} I = M(\xi) e^{\xi x}$ , где  $M(\xi)$  — матрица порядка  $2 \times 2$ :

$$M(\xi) = I \xi^2 + 2\beta Q \xi - \beta^2 P = \begin{pmatrix} \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & \frac{2\beta \xi}{\kappa+1} \\ -\frac{2\beta \xi}{\kappa-1} & \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что решение полученного матричного уравнения строится по формуле

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi x} M^{-1}(\xi) d\xi,$$

где  $M^{-1}$  — матрица, обратная к  $M(\xi)$ , а контур  $C$  охватывает особые точки подинтегральной функции. Знаменатель подинтегрального выражения представляет собой определитель матрицы  $M(\xi)$ :  $\det M(\xi) = (\xi - \beta)^2 \times (\xi + \beta)^2$ . Как видно, он содержит два кратных полюса  $\xi = \beta, \xi = -\beta$ . Вычисляя контурный

интеграл с помощью теоремы о вычетах, и производя вычет в кратных полюсах  $\xi = \beta, \xi = -\beta$ , получаем следующие матричные решения

$$Y_1(x) = \frac{e^{\beta x}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\kappa - \beta x}{\beta(\kappa - 1)} & -\frac{x}{\kappa + 1} \\ \frac{x}{\kappa - 1} & \frac{\kappa + \beta x}{\beta(\kappa + 1)} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$Y_2(x) = \frac{e^{-\beta x}}{2} \begin{pmatrix} \frac{-\kappa + \beta x}{\beta(\kappa - 1)} & \frac{x}{\kappa + 1} \\ -\frac{x}{\kappa - 1} & -\frac{\kappa - \beta x}{\beta(\kappa + 1)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда решение векторного уравнения в (7) имеет следующий вид:

$$\vec{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \vec{y}_{ps}(x), \quad (10)$$

где  $\vec{y}_{ps}(x)$  — частное решение уравнения равновесия в (7),  $c_i, i = \overline{1, 4}$  — неизвестные постоянные. Для их отыскания запишем граничные условия в (6) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(0) \\ v_\beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(a) \\ v_\beta(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты  $c_i$  определяются как решения следующей матричной системы

$$\begin{cases} Y_1(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(0) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = -\vec{y}_\beta(0), \\ Y_1(a) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(a) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = -\vec{y}_\beta(a). \end{cases} \quad (11)$$

#### 4. Построение матрицы Грина.

С целью найти частное решение  $\vec{y}_{ps}(x)$  векторного уравнения (7) построим матрицу Грина  $G_B(x, \xi)$ . Это реализовано методом интегральных преобразований для краевой задачи

$$L_2 \vec{y}(x) = I \vec{y}''(x) + 2\beta Q \vec{y}'(x) - \beta^2 P \vec{y}(x) = \vec{f}(x), \quad (12)$$

$$y_1(0) = 0, y_2'(0) = 0, y_1(a) = 0, y_2'(a) = 0. \quad (13)$$

Ядро интегрального преобразования выбирается в виде

$$H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Уравнение (12) умножается на ядро (14) и интегрируется по частям на отрезке  $[0, a]$ . Заметим, что  $H''(x, \alpha_n) = -\alpha_n^2 H(x, \alpha_n)$ .

Введём два граничных функционала

$$U_0[\vec{y}(x)] = \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}'(0),$$

$$U_1[\vec{y}(x)] = \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(a) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}'(a).$$

Граничные условия

$$U_0 [\vec{y}(x)] = 0, \quad U_1 [\vec{y}(x)] = 0 \quad (15)$$

эквивалентны граничным условиям (13). После интегрирования уравнение (12) примет вид

$$\left[ -I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\tilde{Q} - \beta^2 P \right] \vec{y}_n = \vec{f}_n.$$

$$M_\beta(\alpha_n) = -I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\tilde{Q} - \beta^2 P = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa+1} \\ -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa-1} & -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \end{pmatrix} = M_\beta^{-1}(\alpha_n) \vec{f}_n, \quad \vec{f}_n = \int_0^a H(x, \alpha_n) \vec{f}(x) dx, \quad (16)$$

$$y_{n1} = \int_0^a \sin(\alpha_n x) y_1(x) dx, \quad y_1(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} i y_{n1} \sin(\alpha_n x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} ' y_{n1} \sin \alpha_n x,$$

$$y_{n2} = \int_0^a \cos(\alpha_n x) y_2(x) dx, \quad y_2(x) = \frac{y_{02}}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n2} \cos(\alpha_n x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} ' y_{n2} \cos \alpha_n x,$$

$$y_{02} = \int_0^a y_2(x) dx,$$

где ' означает, что нулевой член умножается на  $\frac{1}{2}$ .

Объединив эти результаты, получим:

$$\vec{y}_n = \int_0^a H(x, \alpha_n) \vec{y}(x) dx, \quad \vec{y}(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) \vec{y}_n. \quad (17)$$

Обращаем (16) согласно (17)

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) M_\beta^{-1}(\alpha_n) \vec{f}_n = \\ &= \int_0^a \left[ \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) M_\beta^{-1} H(\xi, \alpha_n) \right] \vec{f}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Матрица Грина краевой задачи  $L_2 \vec{y}(x) = \vec{f}(x), 0 < x < a, U_0 [\vec{y}(x)] = 0, U_1 [\vec{y}(x)] = 0$  согласно (18) имеет вид:

$$G_B(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) M_\beta^{-1} H(\xi, \alpha_n).$$

Она представима в виде билинейного разложения, и удовлетворяет граничным условиям (15). Компоненты матрицы Грина приводятся ниже:

$$G_{11}(x, \xi) = \frac{\kappa \cosh(\beta(\xi - a + x)) - \kappa \cosh(\beta(a - |\xi - x|))}{2\beta \sinh(a\beta)(\kappa - 1)} - \frac{1}{2(\sinh(a\beta))^2(\kappa - 1)} \times \\ \times [\sinh(a\beta)(\xi \sinh(\beta(\xi - a + x)) + x \sinh(\beta(\xi - a + x)) - \\ - a \sinh(\beta(\xi - a + x)) - (a - |\xi - x|) a \sinh(\beta(a - |\xi - x|)) - \\ - a \cosh(a\beta)(\cosh(\beta(\xi - a + x)) - \cosh(\beta(a - |\xi - x|)))],$$

$$G_{12}(x, \xi) = \frac{1}{2 \sinh(a\beta)(\kappa + 1)} \left[ -\frac{a \cosh(a\beta)}{((\cosh(a\beta))^2 - 1)(\kappa + 1)} (\sinh(\beta(\xi - a + x)) - \\ - \operatorname{sign}(x - \xi) \sinh(\beta(a - |\xi - x|))) + (\cosh(\beta(\xi - a + x))(\xi - a + x) - \\ - \operatorname{sign}(x - \xi) \cosh(\beta(a - |\xi - x|))(a - |\xi - x|)) \right],$$

$$G_{21}(x, \xi) = \frac{1}{2 \sinh(a\beta)(\kappa - 1)} \left[ -\frac{a \cosh(a\beta)}{((\cosh(a\beta))^2 - 1)(\kappa - 1)} (\sinh(\beta(\xi - a + x)) + \\ + \operatorname{sign}(x - \xi) \sinh(\beta(a - |\xi - x|))) + (\cosh(\beta(\xi - a + x))(\xi - a + x) + \\ + \operatorname{sign}(x - \xi) \cosh(\beta(a - |\xi - x|))(a - |\xi - x|)) \right],$$

$$G_{22}(x, \xi) = -\frac{\cosh(\beta(\xi - a + x)) + \cosh(\beta(a - |\xi - x|))}{2\beta \sinh(a\beta)} + \frac{1}{2\beta (\sinh(a\beta))^2 (\kappa + 1)} \times \\ \times [\sinh(a\beta)(\cosh(\beta(\xi - a + x)) + \cosh(a - |\xi - x|)) + \\ + \beta((a - x - \xi) \sinh(\beta(\xi - a + x)) - (a - |\xi - x|) \sinh(\beta(a - |\xi - x|))) + \\ + a\beta \cosh(a\beta)(\cosh(\beta(\xi - a + x)) - \cosh(\beta(a - |\xi - x|)))].$$

Окончательно частное решение будет иметь вид

$$\vec{y}_{ps}(x) = \int_0^a G_B(x, \xi) \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(\xi) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Вернёмся к краевой задаче (7). В данном случае  $y_1(x) = u_\beta(x)$ ,  $y_2(x) = v_\beta(x)$ .

Общее решение неоднородной краевой задачи (7) строится в виде суперпозиции общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\vec{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G_B(x, \xi) \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(\xi) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Это позволит записать выражения для трансформант смещений:

$$u_\beta(x) = Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_B^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_B^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, \quad (19)$$

$$v_\beta(x) = Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_B^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_B^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Постоянные коэффициенты  $c_i, i = \overline{1, 4}$  найдены из граничных условий

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, \quad (21)$$

$$v(0, y) = 0, v'(a, y) = 0, \quad (22)$$

Детализируя условия (15), которым по построению должна удовлетворять матрица Грина, получим, что интегральные слагаемые в соотношении (19) аннулируются.

При реализации условий (22) интегральные слагаемые в (20) сохраняются, например, такие  $\int_0^a G_B^{21}(0, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \int_0^a G_B^{22}(0, \xi) \chi(\xi) d\xi$ . Причём второй из них можно преобразовать к виду

$$\int_0^a G_B^{22}(0, \xi) \chi(\xi) d\xi = \phi_B^{22}(0, a) \chi(a) - \int_0^a \phi_B^{22}(0, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \quad \chi(0) = 0,$$

где  $\phi_B^{22}(x, \xi)$  — первообразная функции  $G_B^{22}(x, \xi)$ . Учтём также, что  $\phi_B^{22}(x, a) = 0$ .

В итоге соотношения (19)–(20) примут вид

$$\begin{aligned} u_\beta(x) &= Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4, \\ v_\beta(x) &= Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\ &+ \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_B^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \phi_B^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (23)$$

### 5. Решение сингулярного интегрального уравнения.

Подставив в формулы (10) полученную ранее фундаментальную матричную систему решений  $Y_1(x), Y_2(x)$ , постоянные  $c_i, i = \overline{1, 4}$  и обратив полученные трансформанты согласно формулам (5), получим выражения для перемещений в виде повторных интегралов.

Непосредственно подставить данные выражения в оставшееся граничное условие

$$\sigma_y|_{y=0} = 2G\mu_0 \left( \mu \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + (1-\mu) \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} \right) = -p(x)$$

нельзя, так как интегралы, входящие в представления для  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , являются слабо сходящимися (а значит, их производные будут расходящимися интегралами). Для преодоления этой проблемы предварительно выделены слабо сходящиеся части в представлении перемещений.

С помощью линейной замены переменных  $x_* = \frac{x}{a}$  переходим к промежутку интегрирования  $[0, 1]$ . В итоге получаем интегральное уравнение следующего вида:

$$\int_0^1 \chi'(\xi) \left[ \frac{a_1}{\xi-x} + \phi(\xi, x) \right] d\xi = r(x), x \in [0, 1], \quad (24)$$

где  $\phi(\xi, x)$  — известная функция,  $a_1$  — известная постоянная,  $r(x)$  — функция, зависящая от нагрузки  $p(x)$ .

Схема метода ортогональных многочленов [14] диктует разложение функции  $\chi'(\xi)$  в ряд с учётом характера её особенности:

$$\chi'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^\alpha (1-\xi)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(1-2\xi) \quad (25)$$

где  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  — многочлен Якоби,  $\alpha$  и  $\beta$  найдены из [3].

Представление (25) подставляется в уравнение (24) с учётом соотношения из [11]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-y)^\alpha (1+y)^\beta P_m^{\alpha, \beta}(y) dy}{y-x} = \text{ctg}(\pi\alpha) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{\alpha, \beta}(x).$$

Применение стандартной схемы метода ортогональных многочленов приводит к получению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений вида

$$c_m + \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_{mn} = f_m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где  $c_m$  — искомые коэффициенты,  $d_{mn}, f_m$  — известные величины. Решая систему методом редукции по схеме, изложенной в [14], подставляем найденные коэффициенты в выражение для неизвестной функции (25), которое затем учитывается в формулах (23), определяющих искомые смещения  $u(x, y), v(x, y)$ .

### 6. Обсуждение численного результата.

Численные расчёты проводились для упругой полосы ( $G = 82.03125$  МПа,  $\mu = 0.28$ ) при значении параметра  $a = 10$ , нагрузке  $p(x) = 1$ . Они были верифицированы путём сопоставления значений  $\sigma_y(x, 0), u(0, y), u(a, y), v(0, y), v(a, y)$  с заданными краевыми условиями (1)–(2). Результаты расчётов совпадают с заданными значениями с точностью  $10^{-4}$ .

Было проведено исследование напряжений  $\sigma_y(x, y)$  и  $\sigma_x(x, y)$  на линии  $x = 5, 0 < y < 10$ . На рисунке 2 кривая 1 соответствует изменениям напряжений  $\sigma_y(5, y)$ , а кривая 2 — изменениям напряжений  $\sigma_x(5, y)$ . Как видно, абсолютное значение напряжений  $\sigma_y(5, y)$  примерно в 2 раза выше напряжений  $\sigma_x(5, y)$ . По мере удаления от места приложения нагрузки абсолютные значения уменьшаются, оставаясь отрицательными.

На рисунке 3 изображена динамика изменения смещений вдоль линии  $x = 5, 0 < y < 10$ . Кривая 1 соответствует изменениям перемещений  $u(5, y)$ , а кривая 2 — изменениям перемещений  $v(5, y)$ . Анализ показывает, что с увеличением расстояния от места приложения нагрузки, смещения начинают существенно убывать, причём абсолютные значения  $u(5, y)$  существенно выше, чем  $v(5, y)$ .



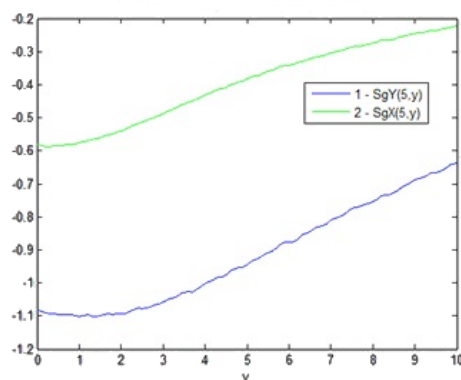


Рис. 2. Нормальные напряжения  
 $\sigma_y(5, y), \sigma_x(5, y)$

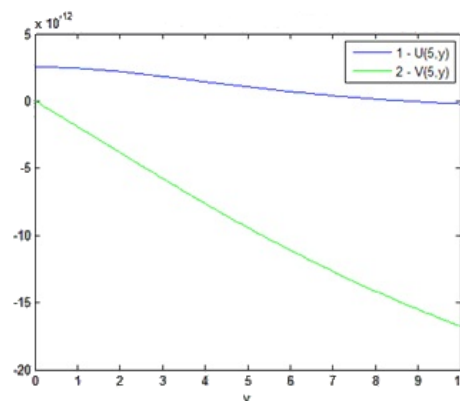


Рис. 3. Перемещения  $u(5, y), v(5, y)$

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Получено решение плоской задачи для полуполосы путём непосредственного применения метода интегральных преобразований к уравнениям равновесия. Указанный подход позволяет свести задачу в пространстве трансформант к одномерной векторной краевой задаче, решение которой строится точно с помощью аппарата матричного дифференциального исчисления. Указанный подход позволяет решить аналогичную задачу для полуполосы при различных граничных условиях на её границах.

1. **Колосов Г. В.** Применение комплексных диаграмм и теории функции комплексной переменной к теории упругости / Колосов Г. В. – М.: ОНТИ, 1935. – 224 с.
2. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н. И. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Уфлянд Я. С. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
4. **Bogy D. B.** Solution of the plane end problem for a semi-infinite elastic strip / D. B. Bogy // Appl. Math. Phys. – 1975. – Vol. 26. – P. 749–769.
5. **Bogy D. B.** The plane solution for joined dissimilar elastic semistrips under tension / D. B. Bogy // Journal of Applied Mechanics. – 1974. – Vol. 42.
6. **Gregory R. D.** The semi-infinite strip  $x \geq 0, -1 \leq y \leq +1$ ; completeness of the Papkovitch–Fadle eigenfunctions when  $\phi_{xx}$  and  $\phi_{yy}$  are prescribed / R. D. Gregory // J. Elastic. – 1980. – Vol. 10. – P. 57–80.
7. **Johnson M. W.** The semi-infinite elastic strip / M. W. Johnson // Q. Appl. Math. – 1965. – Vol. 22. – P. 335–344.
8. **Vorovich I. I.** Some problems in the theory of elasticity for a semi-infinite strip / I. I. Vorovich, V. V. Kopasenko // J. Appl. Math. Mech. – 1966. – Vol. 30. – P. 128–136.
9. **Hussein N. S.** Solution of a problem linear plane elasticity with mixed boundary conditions by the method of boundary integrals / N. S. Hussein // Mathematical Problems in Engineering. – 2014. – Vol. 2014, Article ID 323178.

10. **Попов Г. Я.** О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях в применении к краевым задачам механики / Г. Я. Попов // Прикладная математика. – 2003. – Т. 39, №12. – С. 46–73.
11. **Попов Г. Я.** Избранные работы в 2 томах. Т.1 / Г. Я. Попов. – Одесса, ВUW, 2007. – с. 268–272
12. **Математичні** проблеми механіки неоднорідних структур : зб. наук. праць / Під заг. редакцією І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Л. : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – 24–26 с.
13. **Попов Г. Я.** Осесимметричная задача о напряжённом состоянии дважды усечённого конуса / Г. Я. Попов, Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, №1. – С. 185–197.
14. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений / Попов Г. Я. – М. : Наука, 1966. – 707 с.