Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.375

І. П. Шацький
Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

ЗАКРИТТЯ ТРІЩИНИ, СПОЛУЧЕНОЇ ЗІ ЩІЛИНОЮ, В ПЛАСТИНІ ЗА ЗГИНУ З РОЗТЯГОМ – СТИСКОМ

Шацький І. П. Закриття тріщини, сполученої зі щілиною, в пластині за згину з розтягом – стиском. У двовимірній постановці розглядається мішана задача про контактну взаємодію берегів наскрізної тріщини, сполученої з вузькою щілиною на одній прямій, за сукупної дії на пластину мембранного та згинального навантажень. Береги щілини не контактують. Явище закриття тріщини, зумовлене деформацією згину, враховується з використанням моделі контакту вздовж лінії. На підставі аналітичного розв'язку задачі досліджено розподіли стрибків переміщення, кута повороту і контактних реакцій на розрізі для довільних співвідношень величин мембранного та згинального навантажень.
Ключові слова: пластина, щілина, закриття тріщини, згин, розтяг, стиск.

Шацкий И. П. Закрытие трещины, соединенной со щелью, в пластине при изгибе с растяжением – сжатием. В двумерной постановке рассмотрена смешанная задача контактного взаимодействия берегов сквозной трещины, соединенной с узкой щелью, при совокупном воздействии на пластину мембранной и изгибающей нагрузок. Берега щели не контактируют. Явление закрытия трещины, вызванное деформацией изгиба, учитывается с использованием модели контакта вдоль линии. На основании аналитического решения исследованы распределения скачков перемещения, угла поворота и контактных реакций на разрезе для произвольных соотношений величин мембранной и изгибающей нагрузок.
Ключевые слова: пластина, щель, закрытие трещины, изгиб, растяжение, сжатие.

Shatskyi I. P. Closure of crack connected with a slit in a plate under bending and tension – compression loads. The mixed problem of contact interaction of edges of through crack connected with narrow slit in a plate under membrane and bending loadings is considered in two-dimensional statement. The edges of slit are in no contact with each other. The crack closure phenomenon caused by bending deformation is taken into account using the model of contact along the line. The distributions of displacement and rotation angle jumps as well as contact reactions on the cut have been studied on the basis of the analytical solution for arbitrary correlation of values of membrane and bending loads.
Key words: plate, slit, crack closure, bending, tension, compression.

Вступ. Проблема контактної взаємодії берегів тріщин в тонких пластинах успішно вирішується в рамках класичних теорій плоского напруженого стану та згину пластин на підставі моделі контакту вздовж лінії [1–7]. Зокрема, в працях [2, 4] побудовано аналітичні розв'язки задач комбінованого розтягу–згину безмежної пластини з прямолінійною контактною тріщиною. Складнішу конфігурацію тріщиноподібного дефекту, який складається із системи контактних тріщин, сполучених зі співвісними щілинами, в умовах рівномірного згину пластини розглянуто в статті [8].

Метою цієї роботи є дослідження напружено-деформованого стану пластини, послабленої тріщиною, вирощеною зі щілини, за сукупної дії мембранного та згинального навантажень.

Основні результати

1. Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластину, яка в декартових координатах займає область $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену наскрізним тріщиноподібним дефектом, розташованим на відрізку $L = (-l,\, l)$ осі абсцис. Структурно дефект складається із вузької щілини $(-l,\, b)$, яка за припущенням не закривається за жодних умов, та вирощеної із неї тріщини $(b,\, l)$ з нульовою віддалю між берегами, які можуть контактувати. На нескінченності перпендикулярно до лінії розрізу пластина зазнає сукупної дії рівномірно розподілених нормальних зусиль n і згинальних моментів m; береги розрізу та лицьові поверхні пластини вільні від зовнішнього навантаження. Досліджуємо вплив розрізу і можливого контакту його берегів на напружений стан пластини.

Аналіз закриття тріщини проводили у двовимірній постановці в рамках гіпотез прямої нормалі на підставі моделі контакту вздовж лінії [1–7]. Враховуючи симетрію об'єкта та навантаження відносно осі абсцис, сформулювали мішану крайову задачу для пари бігармонічних операторів на площині з розрізом:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash L; \tag{1}$$

$$N_y = 0, \quad M_y = 0, \quad x \in (-l,\, b); \tag{2}$$

$$N_y = 0, \quad M_y = 0, \quad [u_y] \geqslant h|[\vartheta_y]|, \quad x \in L_1; \tag{3}$$

$$[u_y] = h|[\vartheta_y]| > 0, \quad M_y = hN_y \operatorname{sgn}[\vartheta_y], \quad N_y \leqslant 0, \quad x \in L_2; \tag{4}$$

$$[u_y] = 0, \quad [\vartheta_y] = 0, \quad N_y \pm M_y/h \leqslant 0, \quad x \in L_3; \tag{5}$$

$$N_x = 0,\ N_{xy} = 0,\ N_y = n,\ M_x = 0,\ M_{xy} = 0,\ M_y = m,\ (x,\, y) \to \infty. \tag{6}$$

Тут φ – функція Ері, w – прогин пластини, Δ – оператор Лапласа; $[u_y]$, $[\vartheta_y]$ – стрибки переміщення та кута повороту нормалі на розрізі; N_x, N_{xy}, N_y – мембранні зусилля; M_x, M_{xy}, M_y – моменти; $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (b,\, l)$.

Під значеннями функцій N_y, M_y на $(-l,\ l)$ розуміємо півсуми їхніх граничних значень на берегах розрізу. Самі ж функції при переході через розріз змінюються неперервно: $[N_y] = 0$, $[M_y] = 0$, $x \in (-l,\ l)$.

Рівності (2) – це умови вільного краю для щілини; рівності та нерівності (3)–(5) відображають умови можливого контакту берегів тріщини в рамках гіпотези прямої нормалі.

2. Аналітичний розв'язок Для побудови розв'язку крайової задачі (1)–(6) використали метод сингулярних інтегральних рівнянь, зокрема, подання нормальних зусиль і моментів на лінії розрізу через похідні від функцій стрибка [9–11]:

$$N_y(x,\ 0) = n + \frac{B}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}[u_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x},\ M_y(x,\ 0) = m - \frac{Da}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}[\vartheta_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x}, \tag{7}$$

де $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, $a = (3+\nu)(1-\nu)$; E і ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Структура розв'язку залежить від співвідношення величин мембранного та згинального навантажень.

Нехай $n > 0$, а абсолютна величина m незначна. За відсутності контакту берегів тріщини ($L_1 = (b,\, l),\ L_2 = \varnothing,\ L_3 = \varnothing$) із крайових умов (2), (3) приходимо до двох сингулярних інтегральних рівнянь на всьому розрізі:

$$\frac{B}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}[u_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x} = -n, \quad \frac{Da}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}[\vartheta_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x} = m, \quad x \in (-l,\ l). \tag{8}$$

Їх розв'язки, що задовольняють умовам

$$[u_y](\pm l) = 0, \quad [\vartheta_y](\pm l) = 0, \tag{9}$$

відомі [9–12]:

$$[u_y](x) = \frac{4n}{B}\sqrt{l^2 - x^2}, \quad [\vartheta_y](x) = -\frac{4m}{Da}\sqrt{l^2 - x^2}. \tag{10}$$

Із нерівності в (3) встановлюємо діапазон зовнішнього навантаження, коли контакт берегів тріщини відсутній: $\Omega_1 = \{(n,\ m) : n \geqslant \kappa|m|/h\}$, де $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$.

Якщо $n = \kappa|m|/h$, то береги тріщини $y = \pm 0,\ z = -h\mathrm{sgn}m$ дотикаються одночасно по всій довжині ділянки $(b,\, l)$.

Нехай $n < \kappa|m|/h$. Припустимо, що умови контакту вздовж лінії (4) виконуються тепер на усій тріщині: $L_1 = \varnothing,\ L_2 = (b,\, l),\ L_3 = \varnothing$. Враховуючи, що $\mathrm{sgn}[\vartheta_y] = -\mathrm{sgn}M_y$, перепишемо їх інакше:

$$hN_y = -|M_y|, \quad [u_y]' = -h[\vartheta_y]'\mathrm{sgn}M_y, \quad x \in L_2. \tag{11}$$

Обернувши інтегральні оператори (7) за додаткових умов (9) та врахувавши рівності (2), маємо:

$$\frac{B}{4}[u_y]'(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\left\{nx + \int\limits_{b}^{l}\frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}N_y(\xi)}{\xi - x}d\xi\right\},$$

$$\frac{Da}{4}[\vartheta_y]'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\left\{mx + \int\limits_{b}^{l}\frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}M_y(\xi)}{\xi - x}d\xi\right\}. \tag{12}$$

Підставляючи отриманий результат у новий варіант умов контакту (11), приходимо до інтегрального рівняння щодо реактивного моменту:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{b}^{l}\frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}M_y(\xi)}{\xi - x}d\xi = -\frac{\kappa m - hn\mathrm{sgn}m}{1+\kappa}\,x, \quad x \in (b,\ l). \tag{13}$$

Розв'язуючи рівняння (13), знайшли M_y, а потім з умови (11) визначили контактну силу. Підставляючи отриманий результат у співвідношення (12) та інтегруючи їх за умов (9), остаточно дістали:

$$M_y(x) = \frac{\kappa m - hn\,\mathrm{sgn}\,m}{1+\kappa}\,\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b),$$

$$N_y(x) = -\frac{\kappa|m|/h - n}{1+\kappa}\,\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b);$$

$$[u_y](x) = \frac{4}{B(1+\kappa)}\Big(\kappa(|m|/h+n)\sqrt{l^2-x^2}-$$

$$-(\kappa|m|/h-n)\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x)\Big),$$

$$[\vartheta_y](x) = -\frac{4}{Da(1+\kappa)}\Big((m+hn\,\mathrm{sgn}\,m)\sqrt{l^2-x^2}+$$

$$+(\kappa m - hn\,\mathrm{sgn}\,m)\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x)\Big). \tag{14}$$

Тут $H(...)$ – одинична функція Гевісайда.

Друга (силова) нерівність у (4) задовольняється. Вимагаючи виконання першої (кінематичної) нерівності у виразі (4), отримуємо $n+|m|/h \geq 0$. Таким чином, крайові умови контакту берегів тріщини по лінії реалізуються в області навантажень $\Omega_2 = \{(n,\ m) : -|m|/h \leqslant n \leqslant \kappa|m|/h\}$.

При $n = -|m|/h$ береги тріщини дотикаються на усій висоті. Отож, в області $\Omega_3 = \{(n,\ m) : n \leqslant -|m|/h\}$ є сенс розглядати варіант крайових умов (5) на усій тріщині, припустивши при цьому, що $L_1 = \varnothing,\ L_2 = \varnothing,\ L_3 = (b, l)$. Задовольнивши за допомогою подань (7) умови (2), (5), дістанемо систему інтегральних рівнянь, подібну до (8), на укороченому розрізі (щілині) завдовжки $b + l$:

$$\frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{b}[u_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi-x} = -n, \quad \frac{Da}{4\pi}\int_{-l}^{b}[\vartheta_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi-x} = m, \quad x\in(-l,\ b). \tag{15}$$

За розв'язком рівнянь (15) знайшли стрибки переміщення і кута повороту нормалі на розрізі, а відтак за виразами (7) контактні зусилля та момент:

$$[u_y](x) = \frac{4n}{B}\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x),\ [\vartheta_y](x) = -\frac{4m}{Da}\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x);$$

$$N_y(x) = n\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b),\ M_y(x) = m\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b). \tag{16}$$

Силова нерівність в умовах (5) підтверджується.

Таким чином, формули (10), (14), (16) дають розв'язок поставленої задачі відповідно в діапазонах $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$ комбінованого навантаження.

3. Аналіз результатів Граничні переходи $b \to l$ та $b \to -l$ призводять до відомих результатів відповідно для щілини [9–12] та контактної тріщини [2, 4] в пластині під комбінованим навантаженням. При $n = 0$ дістаємо картину закриття тріщини, вирощеної з колінеарної щілини, в зігнутій пластині [8].

Із зміною співвідношення величин однорідних навантажень тип крайових умов змінюється одночасно на всій тріщині.

За переважного розтягу увесь тріщиноподібний дефект є відкритим, а розв'язок поставленої задачі є суперпозицією розв'язків від розтягу та згину. Якщо переважає згин, то на контактній тріщині, що виходить із щілини, розкриття зберігається таким же, як і для контактної тріщини, що займає весь відрізок $(-l,\ l)$. Вплив щілини виявляється лише в зміні контактної реакції (у посиленні контактної взаємодії берегів). У разі переважного стиску тріщина повністю закрита, а на щілині – класична концентрація напружень від згину зі стиском.

Висновки. Модель контакту вздовж лінії усуває кінематичну суперечність, пов'язану із взаємним проникliнням поверхонь тріщини під час згину пластини, і тим самим дозволяє істотно розширити діапазон комбінованих навантажень, в якому отримуються коректні аналітичні результати для тріщиноподібних дефектів зі складною структурою.

1. **Шацький І. П.** Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
2. **Шацкий И. П.** О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжении и изгибе / И. П. Шацкий // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 46–50.
3. **Young M. J.** Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution / M. J. Young, C. T. Sun // Intern. J. Fract. – 1992. – V. 55. – P. 81–93.
4. **Shatsky I. P.** A cracks closure in combined tension and bending of plates / I. P. Shatsky // Fracture from defects. Proc. 12th Bien. Conf. of Fract. – ECF-12. (Sheffield, 14-18 Sept. 1998) / Ed. M. W. Brown e. a. – V. 2. – P. 733–738.
5. **Шацкий И. П.** Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И. П. Шацкий // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 91–97.
6. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. – Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. – 408 p.
7. **Хлуднев А. М**. Теория трещин с возможным контактом берегов / А. М. Хлуднев // Успехи механики. – 2005. – Т. 3, № 4. – С. 41–82.
8. **Шацький І. П.** Про закриття тріщин, з'єднаних зі щілинами, в зігнутій пластині / І. П. Шацький, Т. М. Даляк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 24–30.
9. **Хижняк В. К.** Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. – 126 с.
10. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
11. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
12. **Бережницкий Л. Т.** Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.

Надійшла 07.07.2014