ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 7–11

МАТЕМАТИКА

Mathematical Subject Classification: 65B15
УДК 517.521.8

О. А. Гунявий
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ІНТЕГРАЛ СТІЛТЬЄСА ТА ФОРМУЛА ПІДСУМОВУВАННЯ

Гунявий О. А. Інтеграл Стілтьєса та формула підсумовування. У роботі доводиться узагальнена формула підсумовування з використанням розширеного визначення інтегралу Стілтьєса.
Ключові слова: інтеграл Стілтьєса, сума, формула підсумовування.

Гунявый О. А. Интеграл Стилтьеса и формула суммирования. В работе доказывается обобщенная формула суммирования с использованием расширенного определения интеграла Стилтьеса.
Ключевые слова: интеграл Стилтьеса, сумма, формула суммирования.

Gunyavy O. Stieltjes integral and summation formula. In the article we prove a generalized summation formula using the expanded definition of the Stieltjes integral.
Key words: Stieltjes integral, sum, summation formula.

Вступ. В математиці часто доводиться користуватися різноманітними корисними інструментами. До таких інструментів, до прикладу, належать інтеграл Стілтьєса та всілякі формули підсумовування, див. [1]. Кожен інструмент може мати деякі обмеження на використання. Наприклад, інтеграл Стілтьєса $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ не існує у випадку, коли на відрізку $[a,b]$ знаходиться точка, в якій функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розрив. Однак можливо трохи змінити визначення інтегралу Стілтьєса і в таких випадках він вже буде існувати. Крім того, таке розширене визначення інтегралу Стілтьєса дозволить використовувати його для підсумовування більш широкого класу функцій за допомогою узагальненої формули підсумовування, окремим випадком якої є формула Ейлера—Маклорена, див. [1] та [2].

Основні результати

1. Зауваження щодо інтегралу Стілтьєса. Зробимо деякі поправки відносно визначення інтегралу Стілтьєса. Отже, нехай на відрізку $[a,b]$ задані функції $f(x)$ та $g(x)$, і нехай

$$D: a = x_0 < \zeta_1 \leq x_1 \leq \zeta_2 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq \zeta_n < x_n = b-$$

довільне розбиття відрізку $[a,b]$, а $|D| = \sup\limits_{i=\overline{1,n}} (x_i - x_{i-1})-$ діаметр розбиття. Розбиттю D поставимо у відповідність суму $S_D = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$. Тоді під інтегралом Стілтьєса у вузькому розумінні будемо вважати

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \lim_{D,|D|\to 0} S_D,$$

якщо така границя існує.

Відмінність наведеного визначення від звичайного в строгих нерівностях $a<\zeta_1$ та $\zeta_n < b$, що дає можливість розглядати інтеграл Стілтьєса у випадках, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають в точках a і b розриви.

Нехай далі на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно можуть мати ізольовані розриви лише в точках $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$. Тоді під інтегралом Стілтьєса в широкому розумінні будемо вважати

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^{c_1} f(x)dg(x) + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dg(x) + \ldots + \int\limits_{c_k}^{b} f(x)dg(x),$$

де кожен інтеграл в сумі визначається у вузькому розумінні.

Всі властивості, справедливі для звичайного інтеграла Стілтьєса, будуть залишатися справедливими і для інтеграла Стілтьєса в широкому розумінні, за винятком інтегрування частинами.

Далі під $F(x+0)$ будемо розуміти $F(x+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} F(x+\varepsilon)$. Аналогічно $F(x-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to-0} F(x+\varepsilon)$. У випадку, коли на відрізку $[a,b]$ не існує точок, у яких функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розриви, інтеграл Стілтьєса в широкому розумінні співпадає зі звичайним інтегралом Стілтьєса. Тепер розглянемо випадок, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розриви лише в крайніх точках a і b. У цьому випадку

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^{a+0} f(x)dg(x) + \int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x) + \int\limits_{b-0}^{b} f(x)dg(x).$$

Але $\int\limits_a^{a+0} f(x)dg(x) = f(a+0)(g(a+0)-g(a))$.

Аналогічно $\int\limits_{b-0}^{b} f(x)dg(x) = f(b-0)(g(b)-g(b-0))$. Крім того, $\int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x)$ співпадає зі звичайним інтегралом Стілтьєса. Таким чином,

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) =$$

$$= f(a+0)(g(a+0)-g(a)) + \int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x) + f(b-0)(g(b)-g(b-0)).$$

Далі, інтегруючи частинами, маємо

$$\int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x) = f(b-0)g(b-0) - f(a+0)g(a+0) - \int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x).$$

Тоді

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = -\int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x) + \\ + f(b-0)g(b-0) + f(b-0)(g(b)-g(b-0)) + \\ + f(a+0)(g(a+0)-g(a)) - f(a+0)g(a+0) = \\ = -\int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x) + f(b-0)g(b) - f(a+0)g(a).$$

Але

$$-\int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x) = \\ = g(a+0)(f(a+0)-f(a)) - \int\limits_{a}^{b} g(x)df(x) + g(b-0)(f(b)-f(b-0)),$$

звідки

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = -\int\limits_{a}^{b} g(x)df(x) + \\ + f(b-0)g(b) + g(b-0)(f(b)-f(b-0)) - \\ - f(a+0)g(a) + g(a+0)(f(a+0)-f(a)).$$

І тоді, остаточно

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = f(x)g(x)\big|_{x=a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} g(x)df(x) - \\ - (f(b)-f(b-0))(g(b)-g(b-0)) + (f(a+0)-f(a))(g(a+0)-g(a)).$$

Із цієї формули, отриманої для інтеграла Стілтьєса у вузькому розумінні, отримуємо формулу для інтеграла Стілтьєса в широкому розумінні:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = f(x)g(x)\big|_{x=a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} g(x)df(x) + \\ + (f(a+0)-f(a))(g(a+0)-g(a)) - (f(b)-f(b-0))(g(b)-g(b-0)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}[(f(c_i+0)-f(c_i))(g(c_i+0)-g(c_i))-$$

$$-(f(c_i)-f(c_i-0))(g(c_i)-g(c_i-0))],$$

де $a<c_1<c_2<\ldots<c_k<b$ — всі точки на відрізку $[a,b]$, в яких функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно можуть мати розриви.

Зауважимо, що отримана формула залишається справедливою і для звичайного інтеграла Стілтьєса, який якщо існує, то не допускає наявності точок, в яких функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розриви. А в цьому випадку $\forall c\in[a,b]$

$$(f(c+0)-f(c))(g(c+0)-g(c))=(f(c)-f(c-0))(g(c)-g(c-0))=0.$$

2. Формула підсумовування. Нехай $a_{n_1,\ldots,n_l}=a_{\mathbf{n}}$ і $\varphi(n_1,\ldots,n_l)=\varphi(\mathbf{n}):\mathbb{Z}^l\to\mathbb{R}-$ довільна арифметична функція від l змінних, де $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_l)$. $\mathbb{R}_\varphi=\left\{\varphi(\mathbf{n})\,\middle|\,\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^l\right\}$, до того ж $\forall r\in\mathbb{R}_\varphi$ діофантове рівняння $\varphi(n_1,\ldots,n_l)=r$ має скінчене число розв'язків.

Нехай далі

$$S(x)=\sum_{r_0<r\leq x}\sum_{\varphi(\mathbf{n})=r}a_{\mathbf{n}}=\sum_{r_0<\varphi(\mathbf{n})\leq x}a_{\mathbf{n}}=M(x)+E(x),$$

до того ж $M(x)\in C_{[a,b]}$, а отже, $E(x)$ може мати розриви тільки в елементах множини $\mathbb{R}_\varphi$, r_0- довільне фіксоване дійсне число, $r_0<x$.

Доведемо далі наступний результат.

Теорема. *Нехай $f(x)\in V_{[a,b]}$, де $r_0<a<b$. Тоді у вище наведених визначеннях справедлива наступна формула:*

$$\sum_{a<\varphi(\mathbf{n})\leq b}a_{\mathbf{n}}f(\varphi(\mathbf{n}))=\int_a^b f(x)dM(x)+\left.f(x)E(x)\right|_{x=a}^{b}-\int_a^b E(x)df(x),$$

де інтеграл Стілтьєса визначається в широкому розумінні.

Доведення. Дійсно, з одного боку

$$\int_a^b f(x)dS(x)=\sum_{a<\varphi(\mathbf{n})\leq b}a_{\mathbf{n}}f(\varphi(\mathbf{n})-0).$$

З іншого боку

$$\int_a^b f(x)dS(x)=\int_a^b f(x)d(M(x)+E(x))=\int_a^b f(x)dM(x)+\int_a^b f(x)dE(x),$$

звідки

$$\sum_{a<\varphi(\mathbf{n})\leq b}a_{\mathbf{n}}f(\varphi(\mathbf{n})-0)=\int_a^b f(x)dM(x)+\int_a^b f(x)dE(x).$$

Далі, інтегруючи частинами і пам'ятаючи, що функція $E(x)$ може мати розриви тільки в елементах множини $\mathbb{R}_\varphi$, отримуємо

$$\int_a^b f(x)dE(x) = f(b)E(b) - f(a)E(a) - \int_a^b E(x)df(x) +$$
$$+ (f(a+0) - f(a))(E(a+0) - E(a)) - (f(b) - f(b-0))(E(b) - E(b-0)) +$$
$$+ \sum_{r \in \mathbb{R}_\varphi \cap (a,b)} [(f(r+0) - f(r))(E(r+0) - E(r)) -$$
$$- (f(r) - f(r-0))(E(r) - E(r-0))] .$$

Але $S(x) = \sum_{r_0 < \varphi(\mathbf{n}) \le x} a_{\mathbf{n}} = M(x) + E(x)$ і $M(x) \in C_{[a,b]}$, звідки

$$E(r+0) - E(r) = 0;$$
$$E(r) - E(r-0) = S(r) - S(r-0) = \sum_{\varphi(\mathbf{n}) = r} a_{\mathbf{n}},$$

і тоді

$$\int_a^b f(x)dE(x) = f(b)E(b) - f(a)E(a) - \int_a^b E(x)df(x) - \sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} (f(\varphi(\mathbf{n})) - f(\varphi(\mathbf{n}) - 0))a_{\mathbf{n}}.$$

Таким чином,

$$\sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} a_{\mathbf{n}} f(\varphi(\mathbf{n}) - 0) = \int_a^b f(x)dM(x) + f(b)E(b) - f(a)E(a) - \int_a^b E(x)df(x) -$$
$$- \sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} (f(\varphi(\mathbf{n})) - f(\varphi(\mathbf{n}) - 0))a_{\mathbf{n}}.$$

Тоді остаточно маємо

$$\sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} a_{\mathbf{n}} f(\varphi(\mathbf{n})) = \int_a^b f(x)dM(x) + f(x)E(x)\Big|_{x=a}^b - \int_a^b E(x)df(x),$$

що і потрібно було довести.

Висновки. Таким чином, доведено узагальнену формулу підсумовування, яку можна використовувати для підсумовування широкого класу функцій.

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 7-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1969. – Т.2. – 800 с.
2. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

Надійшла 10.06.2014