Mathematical Subject Classification: 47J05, 47J25
УДК 517.988.6:517.988.8

М. І. Копач, Б. А. Шувар
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Національний університет «Львівська політехніка»

АНАЛОГИ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОГО МЕТОДУ ІТЕРАТИВНОГО АГРЕГУВАННЯ ДЛЯ РІВНЯНЬ З НЕЗНАКОСТАЛИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Копач М. І., Шувар Б. А. Аналоги однопараметричного методу ітеративного агрегування для рівнянь з незнакосталими операторами. Встановлені достатні умови збіжності одного класу однопараметричних агрегаційно-ітеративних методів. Отримані результати не містять вимог про додатність операторів і агрегуючих функціоналів, а також не потребують, щоб відповідні лінійні неперервні оператори були стискуючими.
Ключові слова: однопараметричні методи, агрегуючі функціонали, оператори стиску, декомпозиція.

Копач М. И., Шувар Б. А. Аналоги однопараметрического метода итеративного агрегирования для уравнений с незнакопостоянными операторами. Установлены достаточные условия сходимости одного класса однопараметрических агрегационно-итеративных методов. Полученные результаты не содержат требований о положительности операторов и агрегирующих функционалов, а также не требуют, чтобы соответствующие линейные непрерывные операторы были сжимающими.
Ключевые слова: однопараметрические методы, агрегирующие функционалы, операторы сжатия, декомпозиция.

Kopach M. I., Shuvar B. A. Analogs of single parametric aggregation-iterative method for equations with non constant sign operators. We establish sufficient conditions for the convergence of a class of one-parameter aggregation-iterative methods. Obtained results do not include conditions about positiveness of operators and aggregate functionals, and also claim that the corresponding linear continuous operators were contraction is not required.
Key words: single parametric methods, aggregative functionals, operators of compression, decomposition.

Вступ. При застосуванні багатопроцесорних обчислювальних пристроїв виникає потреба в наближених методах, що використовують принцип декомпозиції задач великої розмірності до задач меншої розмірності. Часто вживаний на практиці спосіб декомпозиції операторних рівнянь грунтується на методах ітеративного агрегування (див., напр., [1]), які виникли в математичній економіці (див., також [2, с. 157-158]). В [3–5] започатковано методику, яка дозволяє отримувати достатні умови збіжності методів ітеративного агрегування та їх узагальнень і аналогів. Ці умови не містять вимог про знакосталість заданого оператора і агрегуючих функіоналів та не передбачають, щоб спектральний радіус заданого оператора був меншим від одиниці.

Основні результати

1. Основні алгоритми та допоміжні припущення і твердження. Однопараметричний алгоритм, досліджений в [2] для рівняння

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

можна записати за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a(x^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{2}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + (\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}) + \alpha(x^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}) - (\varphi, b) \tag{3}$$

за припущень, що E — евклідів простір, $A, \widetilde{A} : E \to E$ є лінійними неперервними операторами, $b \in E$, λ — дійсне число, $\lambda \neq 1$, (φ, x) — значення лінійного функціоналу $\varphi \in E^*$ на елементах $x \in E$, E^* — спряжений з E простір.

Вважаємо, що оператор $\widetilde{A}$ є таким, що

$$(\varphi, (A + \widetilde{A})x) = \lambda(\varphi, x) \quad (x \in E), \tag{4}$$

і справджуються рівності

$$a(x) = \frac{1}{(\varphi, x)} Ax, \quad (\varphi, a(x)) + \alpha(x) = \lambda \quad (x \in E). \tag{5}$$

Встановлені в [4] достатні умови збіжності цього алгоритму не передбачають умов, постульованих у [2], зокрема, A, φ, b не обовязково повинні бути додатніми, а спектральний радіус $\rho(A)$ може бути більшим від одиниці.

Розглядатимемо алгоритм (2), (3) замінивши в ньому формули (5) наступними:

$$a(x) = \frac{(A + \widetilde{A})}{(\varphi, x)}, \quad \alpha(x) = 0 \quad (x \in E). \tag{6}$$

Означимо множину Ξ як сукупність пар $\{x, y\}$, компоненти яких задовольняють рівність

$$(\varphi, x) + y = 0, \tag{7}$$

де $x \in E$, $y \in E'$, E' — множина дійсних чисел. Очевидно, що Ξ є підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$, в якому норму $||x, y||$ пар $\{x, y\}$ означуємо за формулою

$$||x, y|| = \sqrt{||x||^2 + |y|},$$

в якій $||x||$ — норма елемента $x \in E$, $|y|$ — абсолютна величина числа y. До рівняння (1) приєднаємо рівняння

$$y = \lambda y + (\varphi, \widetilde{A}x) - (\varphi, b). \tag{8}$$

Наступні допоміжні твердження є аналогами відповідних лем із [3–5].

Лема 1. *Нехай $\lambda \neq 1$ і пара $\{x^*, y^*\}$ є розв'язком системи (1), (8) при $x = x^*, y = y^*$. Тоді $\{x^*, y^*\} \in \Xi$.*

Доведення. Очевидно, що

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Ax^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* + (\varphi, \widetilde{A}x^*) - (\varphi, b) =$$

$$= (\varphi, (A + \widetilde{A})x^*) + \lambda y^* = \lambda[(\varphi, x^*) + y^*].$$

Звідси отримуємо, що при $\lambda \neq 1$ пара $\{x^*, y^*\}$ задовольняє співвідношення (7), що і завершує доведення леми. □

Лема 2. *Нехай $\lambda \neq 1$ і $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \Xi$. Якщо справджуються рівності (6), то для послідовностей $\{x^{(n)}\}$, $\{y^{(n)}\}$, побудованих за допомогою формул (2), (3), маємо $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \Xi \quad (n = 1, 2, \ldots)$.*

Доведення. З рівностей (2), (3) отримуємо

$$(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)} = (\varphi, Ax^{(n)}) + (\varphi, a(x^{(n)}))y^{(n)} -$$

$$-(\varphi, a(x^{(n)}))y^{(n+1)} + (\varphi, b) + \lambda y^{(n+1)} + (\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}) - (\varphi, b) =$$

$$= (\varphi, (A + \widetilde{A})x^{(n)}) + \lambda y^{(n)} - \lambda y^{(n+1)} + \lambda y^{(n+1)} = \lambda[(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}],$$

де враховано, що з (4), (6) випливає рівність

$$(\varphi, a(x^{(n)})) = \lambda.$$

На підставі принципу індукції можна вважати лему доведеною. ■

2. Дослідження збіжності. Враховуючи рівності (6), перепишемо формули (2), (3) у вигляді

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{9}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + (\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}) - (\varphi, b). \tag{10}$$

Співвідношення (1),(8) та (9), (10) є підставою для рівностей

$$y^{(n+1)} - y^* = (1 - \lambda)^{-1}(\varphi, \widetilde{A}(x^{(n)} - x^*)),$$

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) + \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(y^{(n)} - y^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(y^{(n+1)} - y^*) =$$

$$= A(x^{(n)} - x^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(\varphi, x^{(n)} - x^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(1 - \lambda)^{-1}(\varphi, \widetilde{A}(x^{(n)} - x^*)).$$

Звідси отримуємо

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(1 - \lambda)^{-1}(\varphi, (I - A)(x^{(n)} - x^*)),$$

де I – тотожний оператор в E. Позначимо

$$B(x)\omega = A\omega - (1 - \lambda)^{-1}\frac{(A + \widetilde{A})x}{(\varphi, x)}(\varphi, (I - A)\omega), \tag{11}$$

вважаючи, що $\{x, y\} \in \Xi$, $\omega = x - x^*$.

Теорема 1. *Нехай $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \Xi$ і при $\{x, y\} \in \Xi$ справджуються рівності (4), (6) та умова*

$$||B(x)|| \leqslant Q.$$

Якщо $Q < 1$, то послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, отримана за допомогою процесу (9), (10), збігається за нормою в $\widetilde{E}$ не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником Q до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи (1), (8), причому $\{x^*, y^*\} \in \Xi$, $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \Xi \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Доведення. Достатньо зазначити, що умови теореми забезпечують можливість використовувати принцип стиску і тому можна вважати її доведеною. ■

В окремому випадку, коли в умовах теореми 1 оператор $\widetilde{A}$ є нульовим, формула (11) має вигляд

$$B_0(x)\omega = A\omega - \frac{Ax}{(\varphi, x)}(\varphi, \omega).$$

Наслідок. *Нехай справджуються умови теореми 1 для випадку, коли $\widetilde{A}$ є нульовим оператором. Тоді для виконання твердження теореми 1 достатньо, щоб оператор $B_0(x)\omega$ задовольняв умову $||B_0(x)|| \leqslant Q_0 < 1$.*

Приклад. *Застосуємо алгоритм (9), (10) до системи*

$$x_1 = 2,9x_1 + 11,8x_2 - 156,$$
$$x_2 = 1,9x_1 + 7,9x_2 - 107,$$

яка має розвязок $x^* = \{20; 10\}$.

Нехай $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$. Тоді $A + \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Для цієї матриці $\lambda = 11$, $\varphi = \{1; 4\}$. При $x^{(0)} = \{1; 1\}$ знаходимо $y^{(0)} = -(\varphi, x^{(0)}) = -5$, $y^{(1)} = -\frac{(\varphi, b)}{1-\lambda} + \frac{(\varphi, \widetilde{A}x^{(0)})}{1-\lambda} = -58,51$, $y^{(0)} - y^{(1)} = 53,51$. Для першої ітерації маємо

$$x_1^{(1)} = 2,9 \cdot 1 + 11,8 \cdot 1 + \tfrac{3\cdot1+12\cdot1}{1\cdot1+4\cdot1} \cdot 53,51 - 156 = 19,23,$$
$$x_2^{(1)} = 1,9 \cdot 1 + 7,9 \cdot 1 + \tfrac{2\cdot1+8\cdot1}{1\cdot1+4\cdot1} \cdot 53,51 - 107 = 9,82,$$

Обчислимо

$$y^{(2)} = -\frac{(\varphi, b)}{1-\lambda} + \frac{(\varphi, \widetilde{A}x^{(1)})}{1-\lambda} = 59,9507,$$

$$y^{(1)} - y^{(2)} = 1,6013, \quad x^{(2)} = \{19,9651; 9,9964\}.$$

Висновки.

1. Ітераційний процес (9), (10), що отримується з формул (2), (3) при виборі $a(x), \alpha(x)$ за формулами (6) і побудові оператора $\widetilde{A}$ таким способом, щоб λ було власним числом оператора $A + \widetilde{A}$, а φ був лівим власним елементом цього оператора, дозволяє отримати просту умову збіжності алгоритму.

2. Умови збіжності не потребують, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус оператора A.

3. Умови збіжності алгоритму не містять вимог про знакосталість A, b, φ.
4. Методика занурення простору E в ширший простір $\widetilde{E} = E \times E'$ дозволяє дослідити клас однопараметричних агрегаційно-ітеративних методів, що охоплює, зокрема, однопараметричний метод ітеративного агрегування, досліджений в ([2], стор. 155 – 158).

1. **Цурков В.И.** Декомпозиция в задачах большой размерности. – М. : Наука, 1979. – 268 с.
2. **Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.** Позитивные линейные системы. – М. : Наука, 1985. – 255 с.
3. **Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.** Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.
4. **Шувар Б.А.** О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений // Львовский политехнический иститут. Львов. Деп.в Укр. НИИНТИ 10.08.88, № 1989. – Ук-88. Рус. – 1988. – 11 с.
5. **Шувар Б.А.** О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования // Вестник Львовского политехнического института. – 1989. – 232. – С. 140–142.

Надійшла 15.08.2014