Mathematical Subject Classification: 34E05, 34A12
УДК 517.925.54

А. А. Кореновский
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСЧЕЗАЮЩИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Кореновський А. О. Асимптотичні розвинення зникаючих розв'язків диференціальних рівнянь в одному особливому випадку. Розглядається система квазілінійних диференціальних рівнянь зі зникаючими (сумованими та несумованими) при $t \to +\infty$ множниками в правій частині. Наведені достатні умови, за яких для даної системи побудовані асимптотичні в певному сенсі розвинення O-розв'язків при $t \to +\infty$.
Ключові слова: квазилінійні сингулярні диференціальні рівняння, існування та асимптотичні розвинення зникаючих розв'язків.

Кореновский А. А. Асимптотические разложения исчезающих решений дифференциальных уравнений в одном особом случае. Рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений с исчезающими (суммируемыми и несуммируемыми) при $t \to +\infty$ множителями в правой части. Приведены достаточные условия, при выполнении которых для данной системы построены асимптотические в определенном смысле разложения O-решений при $t \to +\infty$.
Ключевые слова: квазилинейные сингулярные дифференциальные уравнения, существование и асимптотические разложения исчезающих решений.

Korenovskyi A. Asymptotical expansion of vanishing solutions of differential equations in one special case. Considered in this paper is a system of quasilinear differential equations with factors on the right side that disappear when $t \to \infty$ (absolutely integrable or not). Sufficient conditions are obtained under which it is possible to conduct the asymptotic in a certain sense at $t \to \infty$ expansions of O– solutions of the described system.
Key words: quasilinear singular differential equations, existence and asymptotic expansion of disappearing solutions.

Введение. Данная статья является непросредственным продолжением работы [1]. На исследуемую в [1] систему дифференциальных уравнений наложены дополнительные условия. Построены обобщенные (в смысле работ [2–4]) асимптотические разложения исчезающих при $t \to +\infty$ решений этой системы.

Основные результаты. Рассмотрим в некоторой области $G = \Delta \times \nabla$, $\Delta = \{t : t_0 \leqslant t < +\infty\}$,

$$\begin{aligned}
&\nabla = \{\xi : \operatorname{colon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\
&\xi_1 = \operatorname{colon}(\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,n_1}) \in \mathbb{C}^{n_1},\\
&\xi_2 = \operatorname{colon}(\xi_{0,n_1+1}, \dots, \xi_{0,n_1+n_2}) \in \mathbb{C}^{n_2},\\
&\xi_3 = \operatorname{colon}(\xi_{0,n_1+n_2+1}, \dots, \xi_{0,n_1+n_2+n_3}) \in \mathbb{C}^{n_3},\\
&\|\xi\| \leqslant c,\ c = const > 0,\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

© Кореновский А. А., 2014

(здесь и далее используется обозначение $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{i\,k}|$, где $A = (a_{i\,k})$ – $m\times n$-матрица, $n, m \in \mathbb{N}$) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1' &= Q_1(t) + B_{1\,1}(t)\xi_1 + B_{1\,2}(t)\xi_2 + B_{1\,3}(t)\xi_3 + F_1(t,\xi), \\ \xi_2' &= \alpha(t)\left[Q_2(t) + B_{2\,1}(t)\xi_1 + B_{2\,2}(t)\xi_2 + B_{2\,3}(t)\xi_3 + F_2(t,\xi)\right], \\ \xi_3' &= \beta(t)\left[Q_3(t) + B_{3\,1}(t)\xi_1 + B_{3\,2}(t)\xi_2 + B_{3\,3}(t)\xi_3 + F_3(t,\xi)\right] \end{aligned} \tag{1}$$

(здесь и далее под произведением вектора $\beta(t)$ на матрицу будем подразумевать $\beta(t)B = (\beta_k(t)\, b_{k\,i})$, где $B = (b_{k\,i})$ – $m\times n$-матрица, $m = n_3$, $n \in \mathbb{N}$), в которой все величины, исключая t, являются, в общем случае комплексными, и выполняются такие условия:

1) $\beta(t) = \operatorname{colon}(\beta_1(t), \ldots, \beta_{n_3}(t))$,
   $\beta_k(t)$ $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$, $\alpha(t)$ – скалярные функции,
   $\alpha(t) \neq 0$, $\beta_k(t) \neq 0$ $(t \in \Delta)$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} |\alpha(t)|\, dt = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0$,
   $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} |\beta_k(t)|\, dt = l_k < +\infty$ $(l_k = const)$ $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$,
   $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\beta_k'(t)}{\beta_k(t)} = 0$, $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$,
   $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\beta_s(t)}{\beta_k(t)} = 0$ $\left(s > k,\ k = \overline{1, n_3 - 1},\ s = \overline{2, n_3}\right)$,
   $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\beta_1(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\left(\alpha^{-1}(t)\beta_k(t)\right)'}{\beta_k(t)} = 0$ $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$;
2) $Q_1(t) = \operatorname{colon}(q_1(t), \ldots, q_{n_1}(t))$, $Q_2(t) = \operatorname{colon}(q_{n_1+1}(t), \ldots, q_{n_1+n_2}(t))$, $Q_3(t) = \operatorname{colon}(q_{n_1+n_2+1}(t), \ldots, q_{n_1+n_2+n_3}(t))$,
   $q_k(t) \in C_\Delta$, $\lim\limits_{t\to+\infty} q_k(t) = 0$ $\left(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}\right)$;
3) $B_{k\,i}(t)$ – матрицы соответствующей размерности, $B_{k\,i}(t) \in C_\Delta$ и существуют пределы $B_{k\,i}(+\infty) = B_{0,k\,i}$ $\left(k, i = \overline{1, 3}\right)$, где $B_{0,k\,i}$ – постоянные матрицы; корни λ_k $\left(k = \overline{1, n_1}\right)$ уравнения

   $$\det\left(B_{0,11} - \lambda E\right) = 0$$

   (E – единичная $n_1 \times n_1$-матрица) обладают свойством

   $$|\operatorname{Re}\lambda_k| \geqslant \gamma,\ \ \gamma = const > 0,$$

   корни γ_{n_1+k} $\left(k = \overline{1, n_2}\right)$ уравнения

   $$\det\left(B_{0,22} - B_{0,21}\left(B_{0,11}\right)^{-1} B_{0,12} - \lambda E\right) = 0$$

   (E – единичная $n_2 \times n_2$-матрица) обладают свойством

   $$|\operatorname{Re}\left(\alpha(t)\gamma_{n_1+k}\right)| \geqslant \gamma|\alpha(t)| \quad (t \in \Delta);$$

4) вектор-функция

   $$F(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(F_1(t,\xi), F_2(t,\xi), F_3(t,\xi)\right)$$

$$(F_1(t,\xi) = \mathrm{colon}\,(f_1(t,\xi),\ldots,f_{n_1}(t,\xi))\,,$$
$$F_2(t,\xi) = \mathrm{colon}\,(f_{n_1+1}(t,\xi),\ldots,f_{n_1+n_2}(t,\xi))\,,$$
$$F_3(t,\xi) = \mathrm{colon}\,(f_{n_1+n_2+1}(t,\xi),\ldots,f_{n_1+n_2+n_3}(t,\xi)))$$

удовлетворяет в области G условию Липшица по ξ

$$\left\|F\left(t,\xi_{(1)}\right) - F\left(t,\xi_{(2)}\right)\right\| \le L\left\|\xi_{(1)}-\xi_{(2)}\right\|,\ L = L(c) = const,$$

где постоянную L можно сделать сколь угодно малой уменьшением числа c, определяющего область G, а также условию $F(t,0)=0$.

Пусть $f(t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t) \in C^\infty_\Delta$, $f(t)\,\alpha_i(t)$, $\beta_j(t) : \Delta \to \mathbb{C}$ $(i=\overline{1,s};\ j=\overline{1,k})$ – некоторые скалярные функции, причем $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ удовлетворяют условиям типа 1)

$$\Bigg(\alpha_i(t)\ne 0,\ \beta_j(t)\ne 0\ (t\in\Delta),\ \int_{t_0}^{+\infty}|\alpha_i(t)|\,dt = +\infty,$$

$$\int_{t_0}^{+\infty}|\beta_j(t)|\,dt = l_j < \infty\ \ (l_j = const)\,,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\alpha_s^{-1}(t)\beta_1(t)\right)'}{\beta_1(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\alpha_m(t)}{\alpha_n(t)}\right)'\frac{1}{\alpha_m(t)} = 0,\ m>n,\ m=\overline{2,s},\ n=\overline{1,s-1},$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\beta_r(t)}{\beta_p(t)}\right)'\frac{1}{\beta_r(t)} = 0,\ r>p,\ r=\overline{2,k},\ p=\overline{1,k-1}\Bigg).$$

Введем обозначения

$$f^{\{0\}}(t) = |f(t)|,\ f^{\{1\}}_{\alpha_i(t)}(t) = \frac{f'(t)}{\alpha_i(t)},\ \left(i=\overline{1,s}\right),\ f^{\{1\}}(t) = \sum_{i=1}^{s}\left|f^{\{1\}}_{\alpha_i(t)}(t)\right|,$$

$$f^{<0>}(t) = |f(t)|,\ f^{<1>}_{\beta_i(t)}(t) = \int_{+\infty}^{t}\beta_i(t)f(t)\,dt,\ \left(i=\overline{1,k}\right),$$

$$f^{<1>}(t) = \sum_{i=1}^{k}\left|f^{<1>}_{\beta_i(t)}(t)\right|,$$

$$f^{[0]}(t) = |f(t)|,\ f^{[1]}_{\alpha_i(t)}(t) = f^{\{1\}}_{\alpha_i(t)}(t),\ \left(i=\overline{1,s}\right),$$

$$f^{[1]}_{\beta_j(t)}(t) = f^{<1>}_{\beta_j(t)}(t),\ \left(j=\overline{1,k}\right),\ f^{[1]} = f^{\{1\}}(t) + f^{<1>}(t).$$

Обозначив $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$ символами $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{s+k}$ соответственно, положим

$$f^{[r]}_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_{r-1}}\gamma_{i_r}}(t) = \begin{cases} \left[f^{[r-1]}_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_{r-1}}}(t)\right]^{\{1\}}_{\gamma_{i_r}}, & i_r \leqslant s, \\[2ex] \left[f^{[r-1]}_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_{r-1}}}(t)\right]^{<1>}_{\gamma_{i_r}}, & s < i_r \leqslant s+k, \end{cases}$$

$$\left(i_1, i_2, \ldots, i_r, r \in \mathbb{N};\ i_1, i_2, \ldots, i_r = \overline{1, s+k}\right),$$
$$f^{[r]}(t) = \sum_{i_r=1}^{s+k} \sum_{i_{r-1}=1}^{s+k} \cdots \sum_{i_1=1}^{s+k} \left| f^{[r]}_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_r}}(t) \right|.$$

$f^{[r]}_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_r}}(t)$ будем называть $\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_r}$-производной функции $f(t)$ r-го порядка, а $f^{[r]}(t)$ – мажорантой полной $\binom{\alpha}{\beta}$-производной функции $f(t)$ r-го порядка, где $\alpha = \mathrm{strit}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$, $\beta = \mathrm{strit}\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$.

Дополнительно к условиям $1) - 4)$ относительно системы дифференциальных уравнений (1) будем предполагать, что для нее выполнены следующие условия:

1a) $\alpha(t) \in C^{\infty}_{\Delta},\ \beta_i(t) \in C^{\infty}_{\Delta},\ \left(i = \overline{1, n_3}\right);$

2a) $q_k(t) \in C^{\infty}_{\Delta},\ \left(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}\right);$

3a) $b_{ki}(t) \in C^{\infty}_{\Delta},\ \left(k, i = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}\right);$

4a) $F(t, \xi) \in C^{\infty}_{G}$ и существует функция $L(t) \in C^{\infty}_{\Delta}$, $\sup\limits_{\Delta} |L(t)| < +\infty$ такая, что в области G справедливы неравенства

$$\|F(t,\xi)\| \leqslant L(t)\|\xi\|^2, \quad \left\|F'_{\xi}(t,\xi)\right\| \leqslant L(t)\|\xi\|,$$
$$\left\| \left(\frac{\partial^N F}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_{n_1+n_2+n_3}^{k_{n_1+n_2+n_3}}}(t, 0) \right)^{[r]} \right\| = O\left(L^{[r]}(t)\right),$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2+n_3} k_i = N;\ N = 2, 3, \ldots;\ r = 0, 1, 2, \ldots \right),$$

и, кроме того,

$$b^{[r]}_{ki}(t) = O\left(L^{[r]}(t)\right),\ \left(k, i = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3},\ r = 0, 1, 2, \ldots\right);$$

5a) если обозначить

$$P_r(t) = \sup_{\tau \geqslant t} \max_{k} \left\{ q^{[r-1]}_k(\tau),\ \alpha^{[r-1]}(\tau),\ \beta^{[r-1]}(\tau),\ L^{[r]}(\tau) \right\},$$
$$\left(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3};\ r = 1, 2, \ldots\right),$$

где максимум берется при каждом фиксированном $\tau > t_0$, то

$$\lim_{t \to +\infty} P_r(t) = 0,\ (r = 1, 2, \ldots).$$

Определение 1. *Для каждой функции $v(t)$, $t \geqslant t_0$, для которой выполняется оценка вида*

$$|v(t) \leqslant A_v \sum_{r=r_1}^{r_2} P_1^{k_1}(t) P_2^{k_2}(t) \ldots P_r^{k_r}(t),\ t \geqslant t_0,\ A_v = const,$$

где r_1, r_2 – некоторые натуральные числа, $r_1 \leqslant r_2$ и где для каждого данного значения r показатели $k_1, \ldots, k_r$ могут принимать любые целые неотрицательные значения с условием, что $k_1 + 2k_2 + \cdots + rk_r = r$, условимся говорить, что она имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r_1$ и будем писать $R^{\beta}_{\alpha}(v) \geqslant r_1$.

Чтобы обобщить это определение на матрицы (в частности, столбцы) условимся неравенство $R_\alpha^\beta(D) \geqslant r_1$, где $D = (d_{ki}(t))$, $t \geqslant t_0$ считать равносильным требованию

$$R_\alpha^\beta(\|D\|) \geqslant r_1.$$

Условимся также неравенство $R_\alpha^\beta(v) \geqslant 0$ считать эквивалентным свойству ограниченности функции $v(t)$ при $t \geqslant t_0$.

Приведем без доказательства некоторые очевидные свойства $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга.

Свойство 1. *Из неравенства $R_\alpha^\beta(v) \geqslant r_1$ вытекает любое неравенство вида $R_\alpha^\beta(v) \geqslant r$, где $r = 0, 1, \ldots, r_1 - 1$.*

Свойство 2. *Из неравенства $|v_1(t)| \leq |v_2(t)|$, $t \geqslant t_0$ и $R_\alpha^\beta(v_2) \geqslant r_1$ вытекает неравенство $R_\alpha^\beta(v_1) \geqslant r_1$.*

Свойство 3. *Если даны функции $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$ и известно, что $R_\alpha^\beta(v_k) \geqslant r_k$, то имеют место также следующие неравенства*

1. $$R_\alpha^\beta(v_1 + \cdots + v_l) \geqslant \widetilde{r}, \text{ где } \widetilde{r} = \min_k \{r_k\},$$

2. $$R_\alpha^\beta(v_1 \cdot v_2 \ldots v_l) \geqslant r_1 + r_2 + \cdots + r_l,$$

$$R_\alpha^\beta\left(v_1^{k_1} \cdot v_2^{k_2} \ldots v_l^{k_l}\right) \geqslant r_1 k_1 + r_2 k_2 + \cdots + r_l k_l,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_l$ – любые натуральные числа.

Следствие 1. *Если $D = (d_{ki}(t))$ – некоторая $n_1 \times n_2$ матрица, то условие $R_\alpha^\beta(D) \geqslant r$ равносильно $n_1 \cdot n_2$ условиям*

$$R_\alpha^\beta(d_{ki}) \geqslant r, \ \left(k = \overline{1, n_1}, \ i = \overline{1, n_2}\right).$$

Это свойство вытекает из свойства 3.

Следствие 2. *Если $R_\alpha^\beta(v) \geqslant r$, а функция $\omega(t)$ ограничена при $t \geqslant t_0$, то $R_\alpha^\beta(v\omega) \geqslant r$.*

Свойство 4. *Если для функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$ существуют производные $v_k'(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$ и известно, чт*

$$R_\alpha^\beta(v_k) \geqslant r_k, \ R_\alpha^\beta\left(v_k^{[1]}\right) \geqslant r_k + 1,$$

то будут иметь место также неравенства

$$R_\alpha^\beta\left[(v_1 \ldots v_l)^{[1]}\right] \geqslant r_1 + \cdots + r_l + 1,$$

$$R_\alpha^\beta\left[\left(v_1^{k_1} \ldots v_l^{k_l}\right)^{[1]}\right] \geqslant r_1 k_1 + \cdots + r_l k_l + 1,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_l$ – любые натуральные числа.

Определение 2. *Условимся функциями класса W_α^β называть такие функции $v(t)$, $t \geqslant t_0$, для которых существуют $v^{[k]}(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ при $t \geqslant t_0$ и существует хотя бы одно целое число $r \geqslant 0$ такое, что имеет место бесконечная последовательность неравенств*

$$R_\alpha^\beta(v) \geqslant r,\ R_\alpha^\beta\left(v^{[1]}\right) \geqslant r+1,\ \dots\ ,\ R_\alpha^\beta\left(v^{[k]}\right) \geqslant r+k,\ \dots .$$

Число r, входящее в это определение, мы будем называть начальным $\binom{\alpha}{\beta}$-рангом данной функции $v(t)$. Отсутствие однозначности в определении r не препятствует использованию такого понятия.

Свойство 5. *К классу W_α^β заведомо относятся все коэффициенты системы (1) (удовлетворяющие условиям 1) – 4), 1a) – 5a)) (при этом можно взять $r = 0$) и их $\binom{\alpha}{\beta}$-производные любого порядка (при этом можно считать r равным порядку $\binom{\alpha}{\beta}$-производной).*

Свойство 6. *Если функции $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$ принадлежат классу W_α^β, а числа r_k $\left(k = \overline{1, l}\right)$ являются начальными $\binom{\alpha}{\beta}$-рангами этих функций, то число $r_0 = \min\limits_k \{r_k\}$ можно рассматривать как начальный $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг любой из функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$.*

Условимся называть r_0 общим начальным $\binom{\alpha}{\beta}$-рангом функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$.

Свойство 5 очевидно, а свойство 6 вытекает из свойства 1.

Свойство 7. *Если для функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$, существуют производные $v_k^{(r)}(t)$ $\left(k = \overline{1, l}\right)$ и известно, что*

$$R_\alpha^\beta\left(v_k\right) \geqslant r_k,\ R_\alpha^\beta\left(v_k^{[r]}\right) \geqslant r_k + r,$$

$\omega(t)$ – функция класса W_α^β с начальным $\binom{\alpha}{\beta}$-рангом равным нулю, $\omega(t) \neq 0$ и $\omega^{-1}(t)$ – ограничена при $t \geqslant t_1$, то имеют место такие неравенства

$$R_\alpha^\beta\left[\left(\frac{v_1^{k_1}\dots v_l^{k_l}}{\omega(t)}\right)^{[1]}\right] \geqslant r_1k_1 + r_2k_2 + \dots + r_lk_l + 1,$$

$$R_\alpha^\beta\left[\left(\frac{v_1^{k_1}\dots v_l^{k_l}}{\omega(t)}\right)^{[r]}\right] \geqslant r_1k_1 + r_2k_2 + \dots + r_lk_l + r,$$

где $k_1, k_2, \dots, k_l$ – любые натуральные числа.

Условимся еще в тех случаях, когда нам задана вектор-функция $\widetilde{F}(t, Z)$, компоненты разложения в ряд Тейлора по Z которой являются рядами от $Z_1, \dots, Z_l$ тип

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_l=0}^{\infty} \widetilde{p}_{kk_1\dots k_l}(t) Z_1^{k_1}\dots Z_l^{k_l},$$

выражения $\widetilde{p}_{kk_1\ldots k_l}(t)Z_1^{k_1}\ldots Z_l^{k_l}$ называть составляющими вектор-функции $\widetilde{F}(t,Z)$, а саму вектор-функцию будем называть v-рядом от Z. Функции $\widetilde{p}_{kk_1\ldots k_l}(t)$ будем называть коэффициентами v-ряда $\widetilde{F}(t,Z)$.

Применим к системе (1) преобразование

$$\begin{aligned} \xi_1 &= X_1, \\ \xi_2 &= \alpha(t)C_{21}(t)X_1 + X_2, \\ \xi_3 &= X_3, \end{aligned} \tag{2}$$

где $X_i(t)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ – столбцы новых неизвестных функций,

$$C_{21}(t) = B_{21}(t)B_{11}^{-1}(t);$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X_1' &= Q_1(t) + \left[B_{11} + \alpha B_{12}C_{21}\right]X_1 + B_{12}X_2 + B_{13}X_3 + \Phi_1(t,X), \\ X_2' &= \alpha\left\{Q_2(t) - C_{21}Q_1(t) + \left[\alpha B_{22}C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha}C_{21} - C_{21}' - \alpha C_{21}B_{12}C_{21}\right]X_1 + \right. \\ &\qquad \left. + \left[B_{22} - C_{21}B_{12}\right]X_2 + \left[B_{13} + \alpha B_{32}C_{21}\right]X_3 + \Phi_2(t,X)\right\}, \\ X_3' &= \beta\left\{Q_3(t) + \left[B_{31} + \alpha B_{32}C_{21}\right]X_1 + B_{32}X_2 + B_{33}X_3 + \Phi_3(t,X)\right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где все величины – функции переменной t,

$$\Phi_1(t,X) = F_1(t,\xi(X)), \quad \Phi_2(t,X) = F_2(t,\xi(X)) - C_{21}(t)F_1(t,\xi(X)),$$

$$\Phi_3(t,X) = F_3(t,\xi(X)), \quad \xi(X) = \operatorname{colon}\left(X_1, \alpha(t)C_{21}(t)X_1 + X_2, X_3\right).$$

Составим вспомогательную линейную относительно X_k $\left(k=\overline{1,3}\right)$ систему уравнений

$$\begin{gathered} Q_1(t) + \left[B_{11} + \alpha B_{12}C_{21}\right]X_1 + B_{12}X_2 + B_{13}X_3 = 0, \\ Q_2(t) - C_{21}Q_1(t) + \left[B_{22} - C_{21}B_{12}\right]X_2 + \left[B_{13} + \alpha B_{32}C_{21}\right]X_3 = 0, \\ X_3 - \int_{+\infty}^{t}\beta Q_3(t)\,dt = 0. \end{gathered}$$

Запишем ее сокращенно в форме

$$H(t,Z) = 0, \tag{4}$$

где $Z = \operatorname{colon}\left(X_{11}(t), X_{21}(t), X_{31}(t)\right)$. Предполагая далее, что все нижеследующие операции законны, применим к системе (3) преобразование

$$Z = \widetilde{Z_1}(t) + Z_2,$$

где $Z_2 = \operatorname{colon}\left(X_{12}(t), X_{22}(t), X_{32}(t)\right)$ – новый неизвестный столбец, а столбец $\widetilde{Z_1}(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{11}}, \widetilde{X_{21}}, \widetilde{X_{31}}\right)$ определяется из векторного уравнения

$$H\left(t,\widetilde{Z}\right) = 0, \quad t \geqslant t_0$$

и обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty}\widetilde{Z_1}(t)=0$.

Очевидно, что такое решение системы уравнений является единственным при выполнении условий 2), 3).

Запишем вспомогательную систему дифференциальных уравнений для столбцов $X_{12}(t),\ X_{22}(t),\ X_{32}(t)$

$$X_{12}'=-\widetilde{X_{11}}'(t)+\Phi_1\left(t,\widetilde{Z_1}\right)+\left[B_{11}+\alpha B_{12}C_{21}\right]X_{12}+$$

$$+B_{12}X_{22}+B_{13}X_{32}+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{1X_i}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{i2}+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\Phi''_{1X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}+\ldots,$$

$$X_{22}'=\alpha\left\{-\frac{\widetilde{X_{21}}'(t)}{\alpha}+\Phi_2\left(t,\widetilde{Z_1}\right)+\right.$$

$$+\left[\alpha B_{22}C_{21}-\frac{\alpha'}{\alpha}C_{21}-C_{21}'-\alpha C_{21}B_{12}C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{11}}(t)+X_{12}\right)+$$

$$+\left[B_{22}-C_{21}B_{12}\right]X_{22}+\left[B_{13}+\alpha B_{32}C_{21}\right]X_3+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{2X_i}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{i2}+$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\Phi''_{2X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}+\ldots\right\},$$

$$X_{32}'=\beta\left\{\Phi_3\left(t,\widetilde{Z_1}\right)+\left[B_{31}+\alpha B_{32}C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{11}}(t)+X_{12}\right)+\right.$$

$$+B_{32}\left(\widetilde{X_{21}}(t)+X_{22}\right)+B_{33}\left(\widetilde{X_{31}}(t)+X_{32}\right)+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{3X_i}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{i2}+$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\Phi''_{3X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}+\ldots\right\}.$$

Здесь $X_{12}=\operatorname{colon}\left(x_{12},\ldots,x_{n_1 2}\right)$, $X_{22}=\operatorname{colon}\left(x_{n_1+1\,2},\ldots,x_{n_1+n_2\,2}\right)$,

$$X_{32}=\operatorname{colon}\left(x_{n_1+n_2+1\,2},\ldots,x_{n_1+n_2+n_3\,2}\right),$$

$$\Phi^{(N)}_{sX_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}=\left(p_{l_s i_1\ldots i_{n_1+n_2+n_3}}(t)\prod_{s=1}^{n_1+n_2+n_3}x_{s2}^{i_s}\right),$$

($s=\overline{1,3}$, $l_1=\overline{1,n_1}$, $l_2=\overline{n_1+1,n_1+n_2}$, $l_3=\overline{n_1+n_2+1,n_1+n_2+n_3}$, N, $i_1,\ldots,$ $i_{n_1+n_2+n_3}$ — натуральные числа такие, что $i_1+\cdots+i_{n_1+n_2+n_3}=N$; $p_{l_s i_1\ldots i_{n_1+n_2+n_3}}(t)$ представляют собой коэффициенты разложения функции $f_{l_s}(t,X)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\widetilde{Z_1}$).

Эта система позволяет найти столбец $\widetilde{Z_2}$ тем же способом, что и столбец $\widetilde{Z_1}$. Затем полагаем

$$Z = \widetilde{Z_1}(t) + \widetilde{Z_2}(t) + Z_3,$$

где Z_3 – новый неизвестный столбец.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим ряд, формально удовлетворяющий системе (3) и, вообще говоря, расходящийся.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о взаимосвязи между полученным формальным рядом и истинными решениями системы (3).

Теорема 1. *При выполнении условий 1) – 4), 1a) – 5a) решение системы уравнений (4) $Z = U_1(t)$, $t \in \Delta$ с условием $Z(t) \to 0$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-производные любого порядка, причем $U_1^{[r]}(t)$ $(r = 0, 1, \dots)$ есть вектор $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга $\geqslant r + 1$.*

Существование всех $\binom{\alpha}{\beta}$-производных $(r = 1, 2, \dots)$ вытекает из известных теорем анализа, остается только получить для них оценку (при этом наличие свойства $R_\alpha^\beta\,(U_1) \geqslant 1$ очевидно).

Запишем тождество $H\,(t, U_1) = 0$ в виде

$$Q(t) + P(t)U_1 = 0 \tag{5}$$

$(Q(t) = H(t, 0)$, $P(t) = H'_Z\,(t, U_1)$, причем $|\mathrm{Det}\,(H'_Z\,(t, U_1))| \geqslant d > 0$, $d = const$ при $t \geqslant t_0$, $P(t)$ и $Q(t)$ принадлежат классу $W_\alpha^\beta)$.

Из (5), с одной стороны, следует

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| - U_1^{\{1\}}(t) = 0. \tag{6}$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| - U_1^{<1>}(t) = 0. \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| + \sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| = U_1^{[1]}.$$

Так как каждая составляющая левой части меет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant 2$ (легко проверить, применяя свойства 3, 4 и 7 $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга), то непосредственно из этого тождества ясно, что

$$R_\alpha^\beta\left(U_1^{[1]}(t)\right) \geqslant 2.$$

Докажем по индукции, что $U_1^{[r]}(t)$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r + 1$. В самом деле, для $r = 1$ это верно. Предположим, что это утверждение верно для номера r. Поскольку из (5) следует, что

$$P^{-1}(t)Q(t) + U_1(t) = 0,$$

$$U_1^{[r]}(t) = \sum_{i_r=1}^{n_3+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{n_3+1} \left| U_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}^{[r]}(t) \right| \tag{8}$$

($\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_3+1}$ равны $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n_3}$ соответственно), то каждая составляющая правой части (8) определяется из равенств вида

$$U_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}^{[r]}(t) - H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t) = 0, \tag{9}$$

где $H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)$ – некоторая функция $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга $\geqslant r+1$. Из (9), с одной стороны, следует

$$\left[U_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}^{[r]}(t) \right]^{\{1\}} - \left| \alpha(t) H'_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t) \right| = 0. \tag{10}$$

С другой стороны

$$\left[U_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}^{[r]}(t) \right]^{<1>} - \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^{t} \beta_i(t) H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\, dt \right| = 0. \tag{11}$$

Складывая (10) и (11) и суммируя их по i_1, i_2, …, i_r будем иметь

$$U_1^{[r+1]} = \sum_{i_r=1}^{n_3+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{n_3+1} \left(\left| \alpha(t) H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t) \right| + \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^{t} \beta_i(t) H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\, dt \right| \right). \tag{12}$$

Поскольку все составляющие правой части (12) имеют $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r+2$, то и $U_1^{[r+1]}$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r+2$. Тем самым теорема 1 доказана.

Анализируя метод построения формальных решений, а также учитывая, что $H(t, U_1) \equiv 0$ при $t > t_0$ $\left(U_1(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{11}}, \widetilde{X_{21}}, \widetilde{X_{31}} \right) \right)$, нетрудно далее убедиться, что столбец $U_2(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{12}}, \widetilde{X_{22}}, \widetilde{X_{32}} \right)$ формального решения находится из системы неявных уравнений

$$\begin{gathered} -\Phi_1(t, U_1) + \widetilde{X_{11}}'(t) = \left[B_{11} + \alpha B_{12} C_{21} + \Phi'_{1\,X_1}(t, U_1) \right] X_{12} + \\ + \left[B_{12} + \Phi'_{1\,X_2}(t, U_1) \right] X_{22} + \left[B_{13} + \Phi'_{1\,X_3}(t, U_1) \right] X_{32}, \\ -\Phi_2(t, U_1) + \alpha^{-1} \widetilde{X_{21}}'(t) - \left[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - \right. \\ \left. - C'_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] \widetilde{X_{11}}(t) = \\ = \left[B_{22} - C_{21} B_{12} + \Phi'_{2\,X_2}(t, U_1) \right] X_{22} + \left[B_{13} + \alpha B_{32} C_{21} + \Phi'_{2\,X_3}(t, U_1) \right] X_{32}, \\ X_{32} = \int_{+\infty}^{t} \beta(t) \left[(B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}) \widetilde{X_{11}}(t) + B_{32} \widetilde{X_{21}}(t) + \right. \\ \left. + B_{33} \widetilde{X_{31}}(t) + \Phi_3(t, U_1) \right] dt, \quad t \geqslant t_0, \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\Phi'_{1\,X_1}(t, U_1),\ \Phi'_{1\,X_2}(t, U_1),\ \Phi'_{1\,X_3}(t, U_1),\ \Phi'_{2\,X_2}(t, U_1),\ \Phi'_{2\,X_3}(t, U_1)$$

стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Имеет место

Лемма 1. *При выполнении для системы уравнений (4) условий 1) – 4), 1a) – 5a) существует вектор* $U_2(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{12}}, \widetilde{X_{22}}, \widetilde{X_{32}}\right)$, *стремящийся к нулю при* $t \to +\infty$, *удовлетворяющий системе (13) и обладающий свойством*

$$R_{\alpha}^{\beta}(U_2) \geqslant 2.$$

Чтобы оценить $\binom{\alpha}{\beta}$–производные $U_2^{[r]}(t)$ $(r = 1, 2, \dots)$, докажем следующую теорему, более общую, чем теорема 1.

Теорема 2. *Пусть дано векторное уравнение*

$$\widetilde{H}(t, Z) = Q(t) + P(t)Z = 0,\ t \geqslant t_0, \tag{14}$$

$$\left(Q(t) = \widetilde{H}(t, 0),\ P(t) = \widetilde{H}'_Z(t, 0)\right),$$

коэффициенты которого являются при $t \geqslant t_0$ *функциями класса* W_{α}^{β}, *причем общий начальный* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранг элементов столбца* $Q(t)$ *равен* $\widetilde{r}_0 \geqslant 1$, *а остальные коэффициенты имеют начальный* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранг* $\geqslant 0$ *и известно, что*

$$|\operatorname{Det} P(t)| \geqslant d_1 > 0,\ t \geqslant t_0,\ d_1 = const.$$

Тогда уравнение (14) заведомо имеет решение $Z = \widetilde{U}(t)$, *стремящееся к нулю при* $t \to +\infty$, *непрерывное в некотором промежутке* $\left[\widetilde{t}, +\infty\right[$, *это решение имеет* $\binom{\alpha}{\beta}$*-производные любого порядка, причем* $\widetilde{U}^{[r]}(t)$ $(r = 1, 2, \dots)$ *есть столбец* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранга* $\geqslant r + \widetilde{r}_0$.

Существование искомых решений $Z = \widetilde{U}(t)$, а также тот факт, что $\widetilde{U}(t)$ есть стобец $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга $\geqslant \widetilde{r}_0$, очевидны.

Заметим, что тогда любое слагаемое в левой части (14) после подстановки в (14) вместо Z вектора $\widetilde{U}(t)$ будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг не меньше, чем $\widetilde{r}_0$. Чтобы оценить $\widetilde{U}^{[1]}(t)$, запишем тождество $\widetilde{H}\left(t, \widetilde{U}\right) = 0$ в виде

$$P^{-1}(t)Q(t) + \widetilde{U}(t) = 0,$$

откуда следует, что

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| - \widetilde{U}^{\{1\}}(t) = 0.$$

С другой стороны

$$\sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t}\beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| - \widetilde{U}^{<1>}(t) = 0.$$

Сложив два последних равенства, получим

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| + \sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t}\beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| - \widetilde{U}^{[1]}(t) = 0,\ t \geqslant t_0.$$

Легко убедиться, что каждая составляющая v-ряда, состоящего из первых n_3+1 слагаемых, будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг не меньше, чем $\widetilde{r}_0+1$, а тогда и $\widetilde{U}^{[1]}(t)$ будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant \widetilde{r}_0+1$. Дальше поступаем так же как и в случае теоремы 1.

Сформулируеем теперь две основные теоремы о формальных рядах указанного типа.

Теорема 3. *Если система (3) удовлетворяет условиям 1) – 4), 1а) – 5а), то для нее заведомо существует формальное частное решение*

$$Z = \mathrm{colon}\,(X_1, X_2, X_3) \sim \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t),$$

обладающее такими свойствами:

1. *Каждый столбец $U_k(t)$ $(k = 1,2,\dots)$ существует и имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-производные любого порядка в некотором промежутке $[T_k, +\infty\,[$, причем числа T_k $(k = 1,2,\dots)$, вообще говоря, не равны между собой;*
2. *k-й столбец $U_k(t)$ $(k = 1,2,\dots)$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant k$, а его $\binom{\alpha}{\beta}$-производная r-го порядка $U_k^{[r]}(t)$ $(r = 1,2,\dots)$ – $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant k+r$.*

Действительно, существование столбца $U_2(t)$ в некотором промежутке $[T, +\infty\,[$ и то, что $R_\alpha^\beta\left(U_2^{[r]}\right) \geqslant r+2$ $(r = 0,1,\dots)$, уже было установлено.

Для доказательства теоремы 3 по индукции допустим, что столбцы $U_1(t), \dots, U_{k-1}(t)$ существуют и обладают нужными свойствами. Нетрудно показать, что столбец $U_k(t)$ должен определяться тогда из такой системы уравнений

$$\widetilde{X_{11}}' + \widetilde{X_{12}}' + \dots + \widetilde{X_{1\,k-1}}' = Q_1(t) + [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}]\left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}}\right) +$$
$$+B_{12}\left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}}\right) + B_{13}\left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}}\right) +$$
$$+\Phi_1\left(t, U_{k-1} + \dots + U_1\right) + \sum_{i=1}^{3} \Phi'_{1\,X_i}\left(t, U_{k-1} + \dots + U_1\right) X_{i\,k},$$
$$\widetilde{X_{21}}' + \widetilde{X_{22}}' + \dots + \widetilde{X_{2\,k-1}}' = \alpha\left\{Q_2 - C_{21}Q_1 + \left[\alpha B_{22}C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha}C_{21} - \right.\right.$$
$$\left. - C'_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}}\right) +$$
$$+ [B_{22} - C_{21}B_{12}]\left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}}\right) +$$
$$+ [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}]\left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}}\right) + \Phi_2\left(t, U_{k-1} + \dots + U_1\right) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{3} \Phi'_{2\,X_i}\left(t, U_{k-1} + \dots + U_1\right) X_{i\,k}, \tag{15}$$

$$X_{3\,k}+\widetilde{X_{3\,k-1}}+\dots+\widetilde{X_{31}}=\int\limits_{+\infty}^{t}\beta(t)\Big[Q_3(t)+$$

$$+\left[B_{31}+\alpha B_{32}C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{1\,k-1}}+\dots+\widetilde{X_{11}}\right)+B_{32}\left(\widetilde{X_{2\,k-1}}+\dots+\widetilde{X_{21}}\right)+$$

$$+B_{33}\left(\widetilde{X_{3\,k-1}}+\dots+\widetilde{X_{31}}\right)+\Phi_3\left(t,U_{k-1}+\dots+U_1\right)\Big]\,dt.$$

Вычитая из (15) аналогичное равенство, полученное из (15) заменой k на $k-1$, в котором $Z_{k-1}=U_{k-1}$, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\widetilde{X_{1\,k-1}}'=\left[B_{11}+\alpha B_{12}C_{21}\right]X_{1\,k}+B_{12}X_{2\,k}+B_{13}X_{3\,k}+\\
+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{1\,X_i}\left(t,U_1+\dots+U_{k-1}\right)X_{i\,k},\\
\widetilde{X_{2\,k-1}}'=\alpha\Bigg\{\Bigg[\alpha B_{22}C_{21}-\frac{\alpha'}{\alpha}C_{21}-C_{21}-\alpha C_{21}B_{12}C_{21}+\\
+\Phi'_{2\,X_1}\left(t,U_1+\dots+U_{k-2}\right)\Bigg]\widetilde{X_{1\,k-1}}+\\
+\left[B_{22}-C_{21}B_{12}\right]X_{2\,k}+\left[B_{13}+\alpha B_{32}C_{21}\right]X_{3\,k}+\\
+\sum_{i=2}^{3}\Phi'_{2\,X_i}\left(t,U_{k-1}+\dots+U_1\right)X_{i\,k}\Bigg\},\\
X_{3\,k}=\int\limits_{+\infty}^{t}\beta(t)\Bigg\{\left[B_{31}+\alpha B_{32}C_{21}\right]\widetilde{X_{1\,k-1}}+B_{32}\widetilde{X_{2\,k-1}}+B_{33}\widetilde{X_{3\,k-1}}+\\
+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{3\,X_i}\left(t,U_{k-2}+\dots+U_1\right)\widetilde{X_{i\,k-1}}+\\
+\frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\Phi''_{3\,X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,U_{k-2}+\dots+U_1\right)\widetilde{X_{1\,k-1}}^{k_1}\widetilde{X_{2\,k-1}}^{k_2}\widetilde{X_{3\,k-1}}^{k_3}+\dots\Bigg\}dt.
\end{gathered}\tag{16}$$

Применяя к системе (16) теорему 2, убеждаемся в существовании вектора $U_k(t)$, указанного в теореме 3 типа. Отсюда вытекает справедливость теоремы 3.

Доказательству следующей теоремы предпошлем одно определение.

Определение 3. *Формальный в общем случае ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k(t)$, *каждый элемент* $U_k(t)$ *(*$U_k(t)$ *– функции) которого определен, вообще говоря, в своем промежутке вида* $[T_k,+\infty\,[$, *условимся называть обобщенно-асимптотическим рядом для данной функции* $v(t)$, $t\geqslant t_0$, *если для каждого* $m=1,2,\dots$ *выполняется равенство*

$$v(t)=\sum_{k=1}^{m}u_k(t)+\varepsilon_m(t),\ \ t\geqslant\max\left\{t_0,T_1,\dots,T_m\right\},$$

в котором "добавок" $\varepsilon_m(t)$ *удовлетворяет оценке типа (12) из [1] с функциями* $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$, *имеющими* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранг* $\geqslant m$.

Покажем, что справедливо следующее утверждение

Теорема 4. *Если система (1) удовлетворяет условиям 1) – 4), 1a) – 5a), то найденный в теореме 3 формальный ряд будет являться обобщенно-асимптотическим рядом для любого решения* $Z(t) = \mathrm{colon}\,(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ *системы (3) с условием* $\lim\limits_{t\to+\infty} Z(t) = 0$, *причем решения последнего типа заведомо существуют.*

Действительно, сделаем в системе (3) замену

$$X_1 = \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{1\,m}}(t) + X_{1\,k},$$

$$X_2 = \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{2\,m}}(t) + X_{2\,k},$$

$$X_3 = \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{3\,m}}(t) + X_{3\,k}.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\widetilde{X_{11}}' + \widetilde{X_{12}}' + \cdots + \widetilde{X_{1\,k-1}}' + X_{1\,k}' = Q_1(t)+ \\
+ [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] \left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{11}} \right) + \\
+ B_{12} \left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{21}} \right) + B_{13} \left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}} \right) + \\
+ \Phi_1 \left(t, Z_k + U_{k-1} + \cdots + U_1 \right), \qquad (17) \\
\widetilde{X_{21}}' + \widetilde{X_{22}}' + \cdots + \widetilde{X_{2\,k-1}}' + X_{2\,k}' = \alpha \Big\{ Q_2 - C_{21} Q_1 + \Big[\alpha B_{22} C_{21} - \\
- \left[\frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - C_{21}' - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] \left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{11}} \right) + \\
+ [B_{22} - C_{21} B_{12}] \left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{21}} \right) + \\
+ [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}] \left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}} \right) + \Phi_2 \left(t, Z_k + U_{k-1} + \cdots + U_1 \right), \\
X_{3\,k}' + \widetilde{X_{3\,k-1}}' + \cdots + \widetilde{X_{31}}' = \beta \Big[Q_3 + [B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}] \left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{11}} \right) + \\
+ B_{32} \left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{21}} \right) + B_{33} \left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}} \right) + \\
+ \Phi_3 \left(t, Z_k + U_{k-1} + \cdots + U_1 \right) \Big].
\end{gathered}$$

Раскладывая нелинейности в правой части (17) по компонентам вектора Z_k, учитывая равенства, полученные из (15) заменой k на $k-1$, получим систему дифференциальных уравнений

$$X_{1\,k}' = -\widetilde{X_{1\,k-1}}' + [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}]\, X_{1\,k} + B_{12} X_{2\,k} + B_{13} X_{3\,k} +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{1\,X_i}\left(t,U_1+\cdots+U_{k-1}\right)X_{i\,k}+\Phi_{*1}\left(t,Z_k\right),$$

$$X'_{2\,k}=\alpha\left\{-\frac{\widetilde{X_{2\,k-1}}'}{\alpha}+\left[\alpha B_{22}C_{21}-\frac{\alpha'}{\alpha}C_{21}-C'_{21}-\right.\right.$$

$$\left.-\alpha C_{21}B_{12}C_{21}\right]X_{1\,k}+\left[B_{22}-C_{21}B_{12}\right]X_{2\,k}+\left[B_{13}+\alpha B_{32}C_{21}\right]X_{3\,k}+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{2\,X_i}\left(t,U_1+\cdots+U_{k-1}\right)X_{i\,k}+\Phi_{*2}\left(t,Z_k\right)\right\},\qquad(18)$$

$$X'_{3\,k}=\beta\left\{\left[B_{31}+\alpha B_{32}C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{1\,k-1}}+X_{1\,k}\right)+B_{32}\left(\widetilde{X_{2\,k-1}}+X_{2\,k}\right)+\right.$$

$$+B_{33}\left(\widetilde{X_{3\,k-1}}+X_{3\,k}\right)+\Phi_3\left(t,U_{k-1}+\cdots+U_1\right)-\Phi_3\left(t,U_{k-2}+\cdots+U_1\right)+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{3\,X_i}\left(t,U_{k-1}+\cdots+U_1\right)X_{i\,k}+\Phi_{*3}\left(t,Z_k\right)\right\},$$

где v-ряды $\Phi_{*1}\left(t,Z_k\right)$, $\Phi_{*2}\left(t,Z_k\right)$, $\Phi_{*3}\left(t,Z_k\right)$ не содержат составляющих нулевой и первой степени относительно компонент вектора Z_k.

С помощью метода последовательных приближений можно показать, что у системы (18) существуют частные решения, стремящиеся к нулю при $t\to+\infty$. Используя затем теорему 5 из [1] и учитывая, что $R^{\beta}_{\alpha}\left(U'_{k-1}\right)\geqslant R^{\beta}_{\alpha}\left(U^{[1]}_{k-1}\right)\geqslant k$, в силу теоремы 3 получаем нужный результат.

Заключение. Построены обобщенные асимптотические (в смысле работ [2–4]) ряды для O-решений системы дифференциальных уравнений (1). В дальнейшем предполагается рассмотреть аналогичную задачу для системы типа (1) с несколькими несуммируемыми множителями в правой части.

1. **Кореновский А. А.** Существование решений дифференциальных уравнений в особых случаях / Кореновский А. А. // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. - 2012. Т. 17, вип. 4(16). - С. 47-58.
2. **Костин А.В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. - 1967. - Т. 3, № 6. - С. 875-889.
3. **Костин А.В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. - 1967. - Т. 3, № 7. - С. 1070-1077.
4. **Костин, А. В.** О представлении решений дифференциальных уравнений асимптотическими рядами в особых случаях / А. В. Костин, А. А. Кореновский. – К., 1983. – 45 с. – Деп УКРНИИНТИ 30.12.83, № 1470Ук-Д83.

Получена 20.08.2014