Mathematical Subject Classification: 41A10, 42A10, 46E30
УДК 517.5

С. О. Чайченко
Донбасский государственный педагогический университет

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

Чайченко С. О. Наближення періодичних функцій у вагових просторах Орлича. Отримано ряд прямих і обернених теорем теорії наближення для ψ-диференційовних функцій в метриках вагових просторів Орлича з вагами, що належать класу Макенхаупта.
Ключові слова: простори Орлича, нерівність Бернштейна, найкраще наближення, ψ-похідна, прямі і обернені теореми, класи Макенхапта.

Чайченко С. О. Приближение периодических функций в весовых пространствах Орлича. В работе получен ряд прямых и обратных теорем теории приближения для ψ-дифференцируемых функций в метриках весовых пространств Орлича с весами, которые принадлежат классу Макенхаупта.
Ключевые слова: пространства Орлича, неравенство Бернштейна, наилучшее приближение, ψ-производная, прямые и обратные теоремы, классы Макенхаупта.

Chaichenko S. O. Approximation of periodical function in the weighted Orlicz spaces. We obtain some direct and inverse theorems of theory of approximation for ψ-differentiable functions in the metrics of weighted Orlicz spaces with weight functions, which belongs to the Muckenhoupt class.
Key words: Orlicz spaces, Bernstain's inequality, the best aproximation, ψ-derivative, direct and inverce theorems, Muckenhoupt class.

Введение. Исследованию различных вопросов теории приближения в пространствах Орлича посвящено значительное количество публикаций. Упомянем здесь лишь некоторые работы, где рассматривались вопросы получения прямых и обратных теорем теории аппроксимации в этих пространствах.

В работах [1–3] исследовались проблемы приближения в метриках пространств Орлича, а случай весовых пространств был рассмотрен в [4, 5]. В работах [6–9] были получены распространения упомянутых результатов на случай приближения в некоторых областях комплексной плоскости. Кроме того, различные уточнения и обобщения прямых и обратных теорем теории приближения в весовых пространствах Орлича были доказаны в [10, 11].

Целью этой работы является получение утверждений типа прямых и обратных теорем теории приближения для ψ-дифференцируемых и $(\psi;\beta)$-дифференцируемых функций в весовых пространствах Орлича $L_{M,\omega}$ с весами, которые принадлежат так называемому классу Макенхаупта. Используемое в этой работе понятие ψ-производной обобщает известные понятия $(\psi;\beta)$-производной, дробных производных в смысле Вейля и Вейля—Надя, обычной производной, а полученные результаты, с одной стороны, содержат как частные случаи некоторые из упомянутых выше результатов предшественников, а с другой стороны, позволяют обнаружить новые факты.

Приведем некоторые сведения из теории выпуклых функций и весовых пространств Орлича (см. [12, 13]), которые будем использовать в этой работе.

Нерерывная выпуклая функция $\Phi = \Phi(x)$ называется функцией Юнга, если Φ является четной и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty.$$

Говорят, что функция Φ удовлетворяет условию Δ_2 ($\Phi \in \Delta_2$), если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\Phi(2x) \leqslant c\ \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Неотрицательная функция $M = M(t)$, $t \geq 0$ называется квазивыпуклой функцией Юнга, если существует выпуклая функция Юнга Φ и постоянная $c > 1$ такая, что выполняется неравенство

$$\Phi(x) \leqslant M(x) \leq \Phi(cx), \quad \forall x \geqslant 0.$$

Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество всех квазивыпуклых функций Юнга. Пусть $M \in \mathcal{Q}$. Тогда через $\tilde{L}_{M,\omega}$ обозначают класс 2π-периодических измеримых по Лебегу функций f, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x)|)\omega(x)\ dx < \infty,$$

где $\omega(x)$ — 2π-периодичная измеримая и почти везде положительная функция (вес), а через $L_{M,\omega}$ обозначают линейную оболочку класса $\tilde{L}_{M\omega}$. Множество $L_{M\omega}$ становится нормированным пространством, если

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup\left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\omega(t)\ dt : \quad \int_0^{2\pi} \tilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\ dt \leqslant 1 \right\},$$

где $\tilde{M}(y) := \sup\limits_{x\geqslant 0}(xy - M(x))$, $y \geqslant 0$ — дополнительная в смысле Юнга функция.

Говорят, что весовая функция $\omega = \omega(t)$ принадлежит классу Макенхаупта A_p, $1 < p < \infty$, если ω является 2π-периодической и

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \omega(t)\ dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\ dt\right)^{p-1} \leqslant c = \mathrm{const},$$

где $[a, b]$ произвольный отрезок из $[0, 2\pi]$.

Для квазивыпуклой функции M определим величину

$$\frac{1}{p(M)} := \inf\{p : \quad p > 0,\ M^p \in \mathcal{Q}\},$$

$$p'(M) := \frac{p(M)}{p(M)-1},$$

которая впервые была введена в работе [14]. Если $\omega \in A_{p(M)}$, то $L_{M,\omega} \in L$, где L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций и $L_{M,\omega}$ становится банаховым пространством с нормой Орлича. Банахово пространство $L_{M,\omega}$ называется весовым пространством Орлича.

Через $\mathcal{Q}_2^\theta$ обозначают класс функций $M \in \Delta_2$ таких, что M^θ является квази-выпуклой для некоторого $\theta \in (0;1)$.

Пусть $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, $\omega \in A_{p(M)}$ и

$$(\sigma_h f) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt, \quad 0 < h < \pi, \quad x \in [-\pi;\pi]$$

— оператор усреднения по Стеклову. Обозначив через I — единичный оператор, рассмотрим величины

$$\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega} := \sup_{0<h_i<\delta, 1\leqslant i\leqslant r} \left\| \prod_{i=1}^{r}(I-\sigma_{h_i})f \right\|_{M,\omega}, \quad (\delta > 0,\ r = 1,2,\ldots,)$$

которые называются модулями гладкости порядка r функции f.

Известно (см., например, [4]), что модули гладкости $\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega}$ обладают такими свойствами:

1. Величина $\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega}$ является неотрицательной и не убывает, как функция переменной $\delta > 0$.

2. Справедливо неравенство

$$\Omega_r(f_1+f_2;\delta)_{M,\omega} \leqslant \Omega_r(f_1;\delta)_{M,\omega} + \Omega_r(f_2;\delta)_{M,\omega}.$$

3. Если $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, $\omega \in A_{p(M)}$, то

$$\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega}.$$

Далее нам понадобятся определения ψ-интеграла и ψ-производной, которые принадлежат А.И. Степанцу [15, с. 149–150].

Пусть $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \tag{1}$$

— ряд Фурье функции f. Пусть, далее, $\psi(k) = (\psi_1;\psi_2)$ — пара произвольных числовых последовательностей $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 1,2,\ldots$ .. Рассмотрим ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)A_k(f,x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f,x)), \tag{2}$$

где A_0 — некоторое число и

$$\tilde{A}_k(f,x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Если ряд (2) для данной функции f и пары ψ является рядом Фурье некоторой функции из $F \in L$, то функцию F называют ψ-интегралом функции f и обозначают $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)$. Множество ψ-интегралов всех функций из L обозначается L^{ψ}.

Пусть $f \in L$, ряд (1) — ряд Фурье функции f и пара $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ удовлетворяет условию

$$\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f;x) \right) \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, то φ называют ψ-производной функции f и используют обозначение $\varphi(\cdot) = D^{\psi}(f;\cdot) = f^{\psi}(\cdot)$. Подмножество функций $f \in L$, у которых существуют ψ-производные, обозначают через $\bar{L}^{\psi}$.

Связь между ψ-интегралами и ψ-производными установлена в монографии [15, с. 150]. Там показано, что если функция $f \in L$, ряд (1) — ее ряд Фурье, и выполнено условие (3), то функция $\mathcal{J}^{\psi}(f;x)$ обладает ψ-производной и справедливо равенство

$$D^{\psi}(\mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}.$$

Если же функция $f \in \bar{L}^{\psi}$, и ряд (1) — ее ряд Фурье, то функция $D^{\psi}(f;x)$ обладает ψ-интегралом и при этом

$$\mathcal{J}^{\psi}(D^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) + A_0,$$

где A_0 — некоторая постоянная.

Отметим также, что в случае, когда

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \frac{\beta\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \frac{\beta\pi}{2},$$

определение ψ-производной совпадает с определением $(\psi;\beta)$-производной [15, с. 132]. Если к тому же $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то понятие ψ-производной совпадает с хорошо известным понятием $(r;\beta)$-производной в смысле Вейля—Надя, которая, в свою очередь, является обобщением дробной производной Вейля и обычной производной порядка r, $r = 1, 2, \ldots$.

При доказательстве основных результатов этой работы будет использоваться факт ограниченности в пространствах $L_{M,\omega}$ оператора Фурье и оператора тригонометрического сопряжения, который был установлен в [12, с. 278].

Теорема. *Если $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$ и $\omega \in A_{p(M)}$, то для произвольной функции $f \in L_{M,\omega}$ выполняются неравенства*

$$\|S_n(f)\|_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega} \tag{5}$$

и

$$\|\tilde{f}\|_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega}, \tag{6}$$

где

$$S_n(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos\ kx+b_k(f)\sin\ kx),\quad n=0,1,\ldots,\tag{7}$$

— частные суммы Фурье порядка n функции f, $\tilde f(\cdot)$ — функция, тригонометрически сопряженная с $f(\cdot)$ и $C>0$ — некоторая постоянная, которая не зависит от f и n.

Из неравенств (5) и (6), в частности, следует, что

$$\|f-S_{n-1}(f)\|_{M,\omega}=\mathcal{O}(1)E_n(f)_{M,\omega}=\mathcal{O}(1)E_n(\tilde f)_{M,\omega},\tag{8}$$

где

$$E_n(\varphi)_{M,\omega}:=\inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}}\|\varphi-t_{n-1}\|_{M,\omega},\quad \varphi\in L_{M,\omega},$$

— наилучшее приближение функции φ с помощью подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка, не выше $n-1$, а $\mathcal{O}(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n.

Нам понадобится также следующее утверждение, доказанное в работе [16], которое позволяет находить оценку сверху нормы $(\psi;\beta)$-производной тригонометрического полинома через норму самого полинома в пространстве $L_{M,\omega}$ и является аналогом классического результата С.Н. Бернштейна [17] о неравенстве для максимума модуля производной тригонометрического полинома. Для его формулировки через $D^{\psi}_{\beta}f$ обозначим $(\psi;\beta)$-производную функции f, а через $\mathfrak{M}^*$ множество не возрастающих и исчезающих на бесконечности последовательностей $\psi(k)>0$, то есть:

$$\mathfrak{M}^*=\{\psi(k):\quad \psi(k)-\psi(k+1)\geqslant 0,\ \lim_{k\to\infty}\psi(k)=0,\ k\in\mathbb{N}\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\psi\in\mathfrak{M}^*$, $\beta\in\mathbb{R}$, $M\in\mathcal{Q}_2^{\theta}$ и $\omega\in A_{p(M)}$. Тогда для произвольного тригонометрического полинома T_n порядка, не выше n, выполняется неравенство*

$$\|D^{\psi}_{\beta}T_n\|_{M,\omega}\leqslant\frac{K}{\psi(n)}\|T_n\|_{M,\omega},\quad n=0,1,\ldots,\tag{9}$$

где $1/\psi(0):=0$, а K — положительная постоянная, которая не зависит от n.

Будем также использовать следующую лемму, доказанную в работе [4].

Лемма 2. *Пусть $M\in\mathcal{Q}_2^{\theta}$ и $\omega\in A_{p(M)}$. Тогда, если $f^{(2k)}\in L_{M,\omega}$, $k=1,2,\ldots$, то имеет место неравенство*

$$\Omega_k(f;\delta)_{M,\omega}\leqslant C\delta^{2k}\|f^{(2k)}\|_{M,\omega},\quad k=1,2,\ldots\ .\tag{10}$$

Основные результаты. Пусть $\mathfrak{M}$ — подмножество выпуклых последовательностей действительных чисел $\psi(k)>0$, из множества $\mathfrak{M}^*$, то есть:

$$\mathfrak{M}:=\{\psi\in\mathfrak{M}^*:\ \psi(k+2)-2\psi(k+1)+\psi(k)>0,\quad k\in\mathbb{N}\},$$

а $\mathfrak{M}'$ — подмножество функций $\psi\in\mathfrak{M}$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}<\infty$.

Обозначим через $L^{\psi}L_{M,\omega}$ классы ψ-интегралов функций $f\in L_{M,\omega}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^{\psi}L_{M,\omega}$, *причем* $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$, $\omega \in A_{p(M)}$ *и* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$. *Тогда для произвольного натурального* n *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_{M,\omega} \leqslant K\psi(n)E_n(f^{\psi})_{M,\omega}, \tag{11}$$

в котором $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, K — *константа, которая не зависит от* n *и функции* f.

Отметим, что утверждение теоремы 1 в большинстве случаев является хорошо известным. При $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ оценка (11) получена в работе [4]. При $\psi_1(n) = \psi(n)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(n) = \psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$ соответствующие результаты найдены в работе [16], а если $M = t^p$, $1 \leqslant p \leq \infty$, то такие результаты принадлежат А. И. Степанцу и А. К. Кушпелю [18, 19]. Если же $1 < p < \infty$ и к тому же $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, $n, r \in \mathbb{N}$, неравенство (11) доказано А. Ф. Тиманом [20, с. 316].

Доказательство. Пусть $f \in L^{\psi}L_{M,\omega}$, где $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$ и $\omega \in A_{p(M)}$, Тогда, если $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ то [15, с. 151–152], всегда существует функция $f^{\psi} \in L^0$, $L^0 := \{\varphi \in L : \ \varphi \perp 1\}$, ряд Фурье которой совпадает с (4). В работе [21, лемма 3] показано, что для данной функции $f \in L_{M,\omega}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ всегда найдется тригонометрический полином $T(x)$, для которого

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|f(x) - T(x)|)\omega(x)\, dx < \varepsilon.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$E_n(f)_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому, учитывая соотношение (8), можем утверждать, что в смысле сходимости в метрике пространств $L_{M,\omega}$ выполняются равенства

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

и

$$f^{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f^{\psi}; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}(f; x). \tag{12}$$

Из разложения (12) следуют формулы связи между коэффициентами Фурье функций f^{ψ} и f:

$$a_k(f) = \psi_1(k)a_k(f^{\psi}) - \psi_2(k)b_k(f^{\psi}), \tag{13}$$

$$b_k(f) = \psi_2(k)a_k(f^{\psi}) + \psi_1(k)b_k(f^{\psi}). \tag{14}$$

Учитывая теперь равенства (13) – (14), находим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\psi_1(k) a_k(f^{\psi}) - \psi_2(k) b_k(f^{\psi}) \right] \cos kx + \right.$$

$$\left. + \left[\psi_2(k) a_k(f^{\psi}) + \psi_1(k) b_k(f^{\psi}) \right] \sin kx \right) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\psi_1(k) \left[a_k(f^{\psi}) \cos kx + b_k(f^{\psi}) \sin kx \right] + \right.$$

$$\left. + \psi_2(k) \left[a_k(f^{\psi}) \sin kx - b_k(f^{\psi}) \cos kx \right] \right) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; x). \qquad (15)$$

На основании соотношений (7) и (15), получаем

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; x) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; x). \qquad (16)$$

Далее имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \left[\left(S_k(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \right) - \left(S_{k-1}(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \right) \right] =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \left(S_k(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \right) - \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \left(S_{k-1}(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} [\psi_1(k) - \psi_1(k+1)] \left[S_k(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \right] - \psi_1(n) \left[S_{n-1}(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \right]. \quad (17)$$

Аналогично получаем

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; x) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) A_k(\tilde{f}^{\psi}; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} [\psi_2(k) - \psi_2(k+1)] \left[S_k(\tilde{f}^{\psi}; x) - \tilde{f}^{\psi}(x) \right] - \psi_2(n) \left[S_{n-1}(\tilde{f}^{\psi}; x) - \tilde{f}^{\psi}(x) \right]. \quad (18)$$

Используя свойства нормы, на основании равенств (16) – (18) находим

$$E_n(f)_{M,\omega} \leqslant \|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} \leq$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}[\psi_1(k)-\psi_1(k+1)]\big\|S_k(f^{\psi})-f^{\psi}\big\|_{M,\omega}+\psi_1(n)\big\|S_{n-1}(f^{\psi})-f^{\psi}\big\|_{M,\omega}+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}[\psi_2(k)-\psi_2(k+1)]\big\|S_k(\tilde{f}^{\psi})-\tilde{f}^{\psi}\big\|_{M,\omega}+\psi_2(n)\big\|S_{n-1}(\tilde{f}^{\psi})-\tilde{f}^{\psi}\big\|_{M,\omega}\leq$$

$$\leqslant K\left(\psi_1(n)E_n(f^{\psi})_{M,\omega}+\psi_2(n)E_n(\tilde{f}^{\psi})_{M,\omega}\right)\leq K\psi(n)E_n(f^{\psi})_{M,\omega},$$

где $\psi^2(n)=\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)$ и K — константа, которая не зависит от n. Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$E_n(f)_{M,\omega}\leqslant K\psi(n).$$

Считая, что последовательности $\psi(k)$ из $\mathfrak{M}$ являются сужениями на множество натуральних чисел непрерывных функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t\geqslant 1$, в соответствии с [15, с. 159] через $\eta(t)=\eta(\psi;t)$ обозначим функцию, которая связана с ψ равенством

$$\psi(\eta(t))=\frac{1}{2}\psi(t),\quad t\geqslant 1.$$

Отсюда, вследствие строгой монотонности и убывания к нулю ψ, функция $\eta(t)$ для всех $t\geqslant 1$ определяется однозначно

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \tag{19}$$

где ψ^{-1} — функция, обратная к ψ.

Для получения следующих результатов будем использовать определения множеств $\mathfrak{M}_0$ и F, принадлежащие А.И. Степанцу [15, с. 160, 165]:

$$\mathfrak{M}_0=\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad 0<\frac{t}{\eta(\psi;t)-t}\leqslant K,\ t\geq 1\},$$

$$F=\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad \eta'(\psi;t)\leqslant K\},$$

где $\eta(\psi;t)$ — функция, которая определяется равенством (19).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $M\in\mathcal{Q}_2^{\theta}$ и $\omega\in A_{p(M)}$. Тогда для произвольной функции $f\in L_{M,\omega}$ и $n\in\mathbb{N}$ будем иметь:*

1. *Если $\psi\in\mathfrak{M}_0$ и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}E_k(f)_{M,\omega}|k\psi(k)|^{-1},$$

сходится, тогда существует производная f_{β}^{ψ}, такая что для $r=0,1,2,\ldots,$ и произвольного натурального n выполняется неравенство

$$\Omega_r\left(f_{\beta}^{\psi};\frac{1}{n}\right)_{M,\omega}\leq\frac{C}{n^{2r}}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)}E_{\nu}(f)_{M,\omega}+C\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)}.$$

2. Если $\psi \in F$, $\eta(\psi;t) - t \geqslant C > 0$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}$$

сходится, то существует производная f_β^ψ для которой

$$\Omega_r\left(f_\beta^\psi; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leq C\left(\frac{1}{n^{2r}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)} E_\nu(f)_{M,\omega} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_{M,\omega}}{\psi(\nu)(\eta(\nu) - \nu)}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где C — константа, которая не зависит от n и функции f.

Если $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, r, $n \in \mathbb{N}$, тогда утверждение теоремы 2 совпадает с теоремой 1 из работы [11]. В случае $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, аналогичные результаты были получены в работе [4].

Доказательство. Для доказательства теоремы будем использовать схему, предложенную в книге [22, с. 120–126]. Пусть $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность тригонометрических полиномов, которые осуществляют наилучшее приближение функции $f \in L_{M,\omega}$. Положим для данной функции ψ и каждого натурального n

$$n_0 = n, n_1 = [\eta(\psi;n)] + 1, \ldots, n_i = [\eta(\psi;n_{i-1})] + 1, \ldots .$$

В этом случае ряд

$$t_{n_0}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (t_{n_i}(x) - t_{n_{i-1}}(x))$$

будет сходиться к функции f в пространстве $L_{M,\omega}$. Рассмотрим ряд

$$(D_\beta^\psi t_{n_0})(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (D_\beta^\psi [t_{n_i} - t_{n_{i-1}}])(x)$$

и убедимся, что он будет сходиться в пространстве $L_{M,\omega}$ к сумме $T(x)$, ряд Фурье которой имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \tag{20}$$

Применяя неравенство (9) к разности $u_i(x) = t_{n_i}(x) - t_{n_{i-1}}(x)$ (которая, очевидно, является полиномом порядка n_i), получаем

$$\|(D_\beta^\psi u_i)(\cdot)\|_{M,\omega} \leq C E_{n_{i-1}+1}(f)_{M,\omega} |\psi(n_i)|^{-1},$$

вследствие чего

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_i)(\cdot)\|_{M,\omega} \leqslant C\Big(E_{n+1}(f)_{M,\omega} (\psi(n))^{-1} +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} E_{n_i+1}(f)_{M,\omega}|\psi(n_i)|^{-1}\bigg). \tag{21}$$

Используя оценку

$$\frac{E_{n_i+1}(f)}{\psi(n_i)} \leqslant \sum_{\nu=n_{i-1}}^{n_i-1} \frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)}, \quad \psi \in \mathfrak{M}_0, \tag{22}$$

полученную в книге [22, с. 124–125], из соотношения (21) получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_i)(\cdot)\|_{M,\omega} \leqslant C\bigg(\frac{E_{n+1}(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)}\bigg). \tag{23}$$

Поскольку по условию теоремы ряд в правой части соотношения (23) сходится, то это означает, что ряд (20) действительно сходится в пространстве $L_{M,\omega}$ к некоторой функции $T(x) \in L_{M,\omega}$.

Пусть $a_k^{(n_i)} = a_k(t_{n_i})$ и $b_k^{(n_i)} = b_k(t_{n_i})$, $k = 0, 1, 2, \dots,$ — коэффициенты Фурье полиномов $t_{n_i}(x)$. Тогда в соответствии с равенствами (13) и (14) коэффициенты $\alpha_k^{(n_i)}$ и $\beta_k^{(n_i)}$ полиномов $(D_\beta^\psi t_{n_i})(\cdot)$ имеют вид

$$\alpha_k^{(n_i)} = \frac{1}{\psi(k)}\bigg(a_k^{(n_i)} \cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k^{(n_i)} \sin\frac{\beta\pi}{2}\bigg) \tag{24}$$

$$\beta_k^{(n_i)} = \frac{1}{\psi(k)}\bigg(b_k^{(n_i)} \cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k^{(n_i)} \sin\frac{\beta\pi}{2}\bigg). \tag{25}$$

Поскольку равенство

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} (D_\beta^\psi t_{n_i})(x)$$

выполняется в смысле сходимости в метрике пространств $L_{M,\omega}$, то

$$a_k(T) = \lim_{i\to\infty} \alpha_k^{(n_i)}, \quad b_k(T) = \lim_{i\to\infty} \beta_k^{(n_i)}, \quad k = 0, 1, \dots\ .$$

Принимая во внимание то, что

$$\lim_{i\to\infty} a_k^{(n_i)} = a_k(f), \quad \lim_{i\to\infty} b_k^{(n_i)} = b_k(f), \quad k = 0, 1, \dots\ ,$$

из равенств (24)–(25) получаем

$$a_k(T) = \frac{1}{\psi(k)}\bigg(a_k(f) \cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f) \sin\frac{\beta\pi}{2}\bigg),$$

$$b_k(T) = \frac{1}{\psi(k)}\bigg(b_k(f) \cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k(f) \sin\frac{\beta\pi}{2}\bigg).$$

Отсюда следует, что ряд Фурье функции $T(x)$ действительно совпадает с рядом (20). Это означает, что функция $f(x)$ действительно имеет $(\psi;\beta)$-производную

$f^{\psi}_{\beta}(x)$, которая принадлежит пространству $L_{M,\omega}$, и для неё выполняется равенство

$$f^{\psi}_{\beta}(x) = (D^{\psi}_{\beta} t_{n_0})(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (D^{\psi}_{\beta}[t_{n_i} - t_{n_{i-1}}])(x), \tag{26}$$

в метрике пространства $L_{M,\omega}$.

Используя свойство 2 величины $\Omega_r(f^{\psi}; \frac{1}{n})_{M,\omega}$, на основании соотношения (26) получаем

$$\Omega_r\left(f^{\psi}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant \Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right) + \Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \tag{27}$$

Учитывая свойство 3 модуля непрерывности и неравенство (9), находим

$$\Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant C\|f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}]\|_{M,\omega} =$$

$$= C\|\sum_{i=1}^{\infty} (D^{\psi}_{\beta}(t_{n_i} - t_{n_{i-1}}))(x)\|_{M,\omega} \leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(n_i)} \|t_{n_i} - t_{n_{i-1}}\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|t_{n_i} - f\|_{M,\omega}}{\psi(n_i)} + C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|f - t_{n_{i-1}}\|_{M,\omega}}{\psi(n_i)} \leq K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_{n_i+1}(f)_{M,\omega}}{\psi(n_i)}. \tag{28}$$

Используя оценку (22), из соотношения (28) получаем

$$\Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant C \sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} \frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)}. \tag{29}$$

Принимая во внимание неравенства (9) и (10), находим

$$\Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant \Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta} t_0; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} + \sum_{i=1}^{n_0} \Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta}(t_i - t_{i-1}); \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n^{2r}}\left(\left\|(D^{\psi}_{\beta} t_0)^{(2r)}\right\|_{M,\omega} + \sum_{i=1}^{n_0} \left\|(D^{\psi}_{\beta}(t_i - t_{i-1}))^{(2r)}\right\|_{M,\omega}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n^{2r}} \sum_{\nu=0}^{n_0} \nu^{2r} \frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\psi(\nu)}. \tag{30}$$

Объединяя теперь соотношения (27), (29) и (30), получаем

$$\Omega_r\left(f^{\psi}_{\beta}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant \frac{C}{n^{2r}} \sum_{\nu=0}^{n_0} \frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)} E_{\nu}(f)_{M,\omega} + C \sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} \frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)},$$

и, поскольку по определению $n_0 = n$, заканчиваем доказательство пункта 1 теоремы.

Доказательство пункта 2 проводится аналогично, с учетом следующего аналога неравенства (22), полученного в книге [22, с. 125–126]:

$$\frac{E_{n_i+1}(f)}{\psi(n_i)} \leqslant \sum_{\nu=n_{i-1}}^{\eta(n_{i-1})} \frac{E_{\nu+1}(f)}{(\eta(\nu) - \nu)\psi(\nu)}, \quad \psi \in F.$$

Заключение. В работе нами получен ряд прямых и обратных теорем теории приближения для ψ-дифференцируемых функций в метриках весовых пространств Орлича с весами, которые принадлежат классу Макенхаупта.

1. **Ramazanov A. R-K.** On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces // Anal. Math. — 10, (1984) — 117–132.
2. **Garidi W.** On approximation by polynomials in Orlicz spaces, Approx. Theory Appl. (N.S.) 7 (1991), 97–110.
3. **Runovski K.** On Jackson type inequality in Orlicz classes, Rev. Mat. Complut. 14 (2001), 395–404.
4. **Akgün R.** Approximating polynomials for functions of Weighted Smirnov-Orlicz spaces // Jorn. of funct. spacas and applic. — 2012. — P. 1–41.
5. **Israfilov D. M., Guven A.** Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, Studia Math. 174 (2006), 147–168.
6. **Kokilashvili V. M.** A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR 10 (1969), 411–414.
7. **Kokilashvili V. M.** On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes, Studia Math. 31 (1968), 43–59.
8. **Israfilov D. M.** Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E^p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials, Constr. Approx. 17 (2001), 335–351.
9. **Israfilov D. M.** Approximation by p-Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces, Czechoslovak Math. J. 54 (2004), 751–765.
10. **Akgun R., Israfilov D. M.** Approximation in weigted Orlicz spaces // Math. Slovaca. — 61 (2011), No. 4, P. 601–618.
11. **Guven A., Israfilov D.M.** On approximation in weigted Orlicz spaces // Math. Slovaca 62 (2012), No. 1, P. 77–86.
12. **Genebashvili I., Gogatishvili A., Kokilashvili V.Krbec M.** Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — 1998.
13. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.
14. **Gogatishvili A., Kokilashvili V.** Criteria of weighted inequalities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces // Georgian Mathematical Journal. — 1994.— **1,** № 6. — P. 641–673.
15. **Степанец А.И.** Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. — 427 с.
16. **Чайченко С.О.** Найкращі наближення періодичних функцій у вагових просторах Орліча // Вісник Київського національного універсиету ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2013. — Вип. 2. — С. 33–40.
17. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912). — Собрание сочинений, Изд. АН СССР, 1952. — Т. 1. — С. 11–104.

18. **Степанец А.И., Кушпель А.К.** Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. — Киев, 1984. — 44 с. — (Препр./ АН УССР, Ин-т математики; 84.15).

19. **Степанец А.И., Кушпель А.К.** Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39,** № 4. — С. 483–492.

20. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.

21. **Khabazi M.** The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. – 2002. – **129.** — P. 65–75.

22. **Степанец А.И.** Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 2. — 468 с.

Получена 16.07.2014