

Mathematical Subject Classification: 70E20
УДК 531.55

Ю. С. Щетинина

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ И СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Щетинина Ю. С. Про рух симетричного гіростата в гравітаційному полі та середовищі з опором. Досліджується швидкий обертальний рух відносно центра мас динамічно симетричного супутника з сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією моментів сил гравітації та опору середовища. Орбіта супутника вважається круговою. Проведено аналітичне дослідження та чисельний аналіз системи рівнянь руху.

Ключові слова: супутник, метод усереднення, гравітаційне поле, опір середовища.

Щетинина Ю. С. О движении симметричного гиростата в гравитационном поле и среде с сопротивлением. Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически симметричного спутника со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и сопротивления среды. Орбита спутника предполагается круговой. Проведено аналитическое исследование и численный анализ системы уравнений движения.

Ключевые слова: спутник, метод усреднения, гравитационное поле, сопротивление среды.

Shchetynina Yu. S. The motion of symmetric gyrostat in gravitational field and resistive medium. Rapid rotational motion of a dynamically symmetric satellite about a center of mass under the action of gravitational torque and the external resistance torque is investigated. The orbit of the satellite is supposed circular. The analytical study and numerical analysis are performed.

Key words: satellite, averaging method, gravitational field, resistive medium.

ВВЕДЕНИЕ. Задачи о возмущенном движении твердого тела относительно центра масс под действием моментов сил различной природы и в настоящее время остаются достаточно актуальными [1–17]. Монография В. В. Белецкого [1] посвящена описанию методов исследования движения искусственного спутника относительно центра масс под действием гравитационных, магнитных, аэродинамических моментов и моментов сил светового давления. Движению спутника в гравитационном поле посвящены работы [2, 3, 6, 13, 16]. Задачи динамики твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, изучаются в [4], [9]–[13], [15, 17]. В данной статье исследуются вращательные движения динамически симметричного твердого тела, центр масс которого движется по заданной круговой орбите вокруг Земли. На тело действуют моменты сил гравитационного притяжения и сопротивления. Кроме того, тело содержит полость, целиком заполненную жидкостью большой вязкости.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для решения задачи введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1,2]. Система координат Ox_i ($i=1,2,3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 параллельна вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 параллельна нормали к плоскости орбиты. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ [2]. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента \mathbf{G} : ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1], ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т. е. в плоскости Ox_1x_2). Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} .

Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Рассматривается динамически симметричный спутник ($A_1 = A_2$). Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_i – моменты приложенных сил относительно осей Oy_i , A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i . Проекции L_i складываются из гравитационного момента L_i^g , момента сил внешнего сопротивления L_i^r и момента сил вязкой жидкости в полости тела L_i^p .

Орбита спутника предполагается круговой, поэтому плотность атмосферы можно считать постоянной во время движения. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\nu = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}, \quad (2)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, Q – период обращения. Проекции гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r на ось Oy_1 имеют вид [2, 8]:

$$\begin{aligned} L_1^g &= 3\omega_0^2 \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}), \\ L_1^r &= -G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1} \alpha_{1i} \alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2} \alpha_{1i} \alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3} \alpha_{1i} \alpha_{33}}{A_3} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp},$$

$$\beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta, \beta_2 = \sin(\nu - \lambda), \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta.$$

Проекции моментов указанных сил на остальные оси записываются аналогично.

Проекции момента сил вязкой жидкости в полости тела с учетом внешних силовых факторов на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) согласно [4] определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_i^p &= \frac{P(A_1 - A_3)}{A_1^2} \{r^2 A_3 (p\alpha_{i1} + q\alpha_{i2}) - A_1 r (p^2 + q^2) \alpha_{i3}\} + \\ &+ \left(-\frac{Pq}{A_3} J_3 - \frac{P}{A_1} \left[-qJ_3 + k_1 + l_1 - \frac{A_3 r}{A_1} (J_2 - m') + \frac{A_1 q}{A_3} J_3 \right] \right) \alpha_{i1} + \\ &+ \left(\frac{Pp}{A_3} J_3 - \frac{P}{A_1} \left[pJ_3 + k_2 + l_2 + \frac{A_3 r}{A_1} (J_1 - m') - \frac{A_1 p}{A_3} J_3 \right] \right) \alpha_{i2} + \\ &+ \left(\frac{P}{A_1} (q(J_1 - m') - p(J_2 - m')) - \frac{P}{A_3} (k_3 + l_3) \right) \alpha_{i3}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} k_i &= (I_{i1}q - I_{i2}p) \left[r - \frac{(\alpha_{33}(\alpha_{31}p + \alpha_{32}q))}{\sin^2 \theta} \right], \quad m' = (A_1 - A_3) \left(-\frac{3\gamma_{31}\gamma_{33}\mu}{R^3} \right), \\ l_i &= \frac{G(\alpha_{32}p - \alpha_{31}q)}{\sin \theta} \left(\frac{I_{i2} \cos \varphi \cos \theta}{A_1} - \frac{I_{i3} \sin \theta}{A_3} + \frac{I_{i1} \cos \theta \sin \varphi}{A_1} \right), \\ J_i &= I_{i1}p + I_{i2}q + I_{i3}r, \quad \gamma_{3i} = \alpha_{1i}\beta_1 + \alpha_{2i}\beta_2 + \alpha_{3i}\beta_3, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

R – расстояние от центра масс спутника до центра притяжения.

Предполагается [2], что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т. е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|\mathbf{I}\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$ [8], где $\|\mathbf{I}\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени. Также учитывается, что полость заполнена жидкостью большой вязкости [4], т. е. $\vartheta \gg 1$ ($\vartheta^{-1} \sim \varepsilon^2$),

$$\tilde{\mathbf{P}} = P \text{diag}(1, 1, 1), \quad P = \frac{8\pi\rho a^7}{525\vartheta}, \quad (5)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}$ – тензор, зависящий только от формы полости; ρ, ϑ – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, a – радиус полости.

С учетом рассмотренных выше предположений о малости сопротивления среды и о том, что полость заполнена жидкостью большой вязкости, с точностью до величин второго порядка малости проекции момента сил вязкой жидкости в полости тела на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид

$$L_i^p = \frac{P(A_1 - A_3)}{A_1^2} \{r^2 A_3 (p\alpha_{i1} + q\alpha_{i2}) - A_1 r (p^2 + q^2) \alpha_{i3}\}.$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения. Для решения задачи будем применять метод усреднения [18].

1. Процедура усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение Эйлера–Пуансо (при $\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. При этом φ , ψ являются линейными функциями, а угол θ – величина постоянная [19]. Величины G , δ , λ , ν в невозмущенном движении являются постоянными. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера – Пуансо.

Для возмущенного движения углы φ , ψ являются быстрыми переменными, а переменные G , δ , λ , ν , θ – медленными. Проводим усреднение системы (1) уравнений для медленных переменных G , δ , λ , θ по быстрым переменным: сначала по ψ , а затем по φ . После усреднения по ψ и φ получим:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -G \left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right], \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left[-\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3} + \frac{PG^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3) \right] \cos \theta \sin \theta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G (1 - e^2)^3} (A_1 - A_3) \sin(\nu - \lambda) \cos(\nu - \lambda) \times \\ &\quad \times \sin \delta \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G (1 - e^2)^3} (A_1 - A_3) \cos^2(\nu - \lambda) \cos \delta \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим два последних уравнения системы (6) и уравнение для истинной аномалии (2). Их можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \quad \nu = \omega_0 t, \quad (7)$$

где Δ, Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (6), δ, λ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Применяя модифицированный метод усреднения [20] к данным уравнениям, получим:

$$\frac{d\delta}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{2G} (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right). \quad (8)$$

Отметим, что угол отклонения δ вектора кинетического момента \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Рассмотрим первые два уравнения системы (6). Их можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dG^2}{dt} &= (-a + b \cos 2\theta) G^2, \\ \frac{d\theta}{dt} &= (hG^2 - b) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

$$a = \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3}, \quad b = \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} - \frac{I_{33}}{A_3}, \quad h = \frac{P(A_1 - A_3)}{A_1^3 A_3}.$$

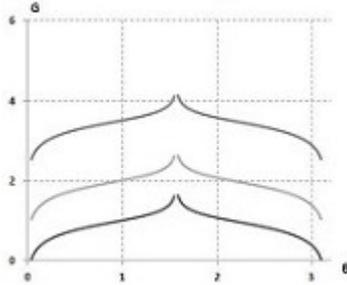


Рис. 1

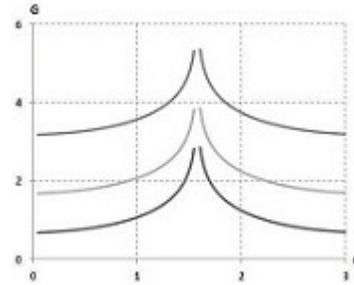


Рис. 2

Система уравнений (9) имеет первый интеграл

$$hG^2 - b \ln |G^2| = b \ln |\sin 2\theta| - a \ln |tg\theta| + C, \quad C = const. \quad (10)$$

Согласно (10) было построено семейство кривых при различных значениях C : $C_1 = 0,5$, $C_2 = 1,5$, $C_3 = 3$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) для начальных параметров: $G(0) = 1$, $\theta(0) \in (0; \frac{\pi}{2})$ и коэффициентов первого интеграла: $a > b > 0$, $h > 0$. В результате численного анализа был исследован характер поведения функции кинетического момента при изменении величины угла нутации от 0 до π . На рис.1 представлено семейство кривых $G(\theta)$. Из графиков следует, что функция $G(\theta)$ имеет вертикальную асимптоту, которая соответствует углу $\theta = \pi/2$. Видно, что для углов нутации, соответствующих значениям первой четверти координатной плоскости, функция $G(\theta)$ имеет характер монотонно возрастающей функции, а для второй – убывающей. Функция имеет участки выпуклости и вогнутости, что объясняется влиянием слагаемого, содержащего $tg\theta$, в (10). Если сопротивление среды вдоль оси A_3 мало, коэффициенты a, b близки по значению в (9), тогда график функции $G(\theta)$ принимает вид, представленный на рис. 2.

Исследуем поведение сферического угла в малой окрестности стационарных точек $\theta^\circ = 0$ и $\theta^\circ = \frac{\pi}{2} + \delta\theta$ второго уравнения системы (4) при разных значениях центральных моментов инерции: $A_1 > A_3, A_1 < A_3$.

В первом случае $\theta^\circ = \delta\theta > 0$ имеем:

$$\delta\theta = \delta\theta_0 \exp \left[-bt - h \int_0^t G^2 dt \right]. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при $A_1 > A_3$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно возрастает при $b < 0, h > 0$, а при $b > 0, h > 0$ – монотонно убывает. При $A_1 < A_3$ (вытянутое тело) вариация $\delta\theta$ убывает при $b > 0, h < 0$.

Рассмотрим второй случай: $\theta^\circ = \frac{\pi}{2} + \delta\theta, \delta\theta < 0$. Имеем:

$$\delta\theta = \delta\theta_0 \exp \left[bt - h \int_0^t G^2 dt \right]. \quad (12)$$

Из (12) следует, что при $A_1 > A_3$ вариация $\delta\theta$ монотонно возрастает, так как $b > 0, h > 0$, а при $b < 0, h > 0$ – монотонно убывает. При $A_1 < A_3$ (вытянутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает ($b > 0, h < 0$).

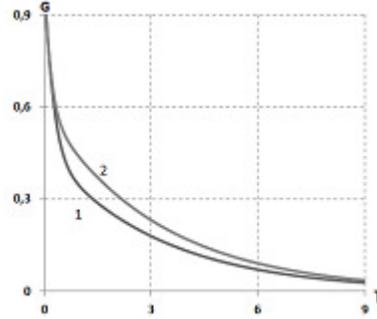


Рис. 3

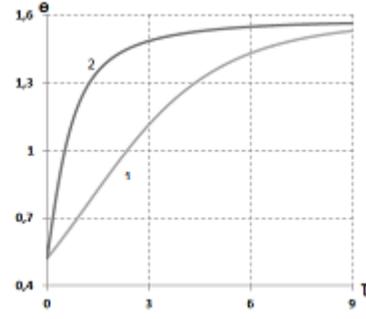


Рис. 4

2. Численный расчет. Систему (6) можно численно проинтегрировать. Для удобства приведем систему к безразмерному виду. Характерными параметрами задачи будут G_0 – кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени.

Безразмерные величины определяются равенствами

$$\tilde{t} = \Omega_0 t, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_0}, \quad \tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}, \quad \tilde{L}_i = \frac{L_i}{G_0 \Omega_0}, \quad \varepsilon^2 \tilde{P} = \frac{P \Omega_0^2}{G_0}, \quad \varepsilon^2 \tilde{I}_{ii} = \frac{I_{ii}}{G_0}.$$

Таким образом, для безразмерных переменных получим систему вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \tilde{G} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2\tilde{A}_1} (\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}) + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} \cos^2 \theta \right], \\ \frac{d\theta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \left[-\frac{\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} + \frac{\tilde{P}\tilde{G}^2}{\tilde{A}_1^3 \tilde{A}_3} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \frac{3\varepsilon^2 \tilde{N} \cos \delta}{2\tilde{G}}, \\ \tilde{N} &= (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right). \end{aligned} \quad (13)$$

При отсутствии влияния сопротивления были получены результаты, соответствующие исследованиям в [11]. Если в системе (13) положить $\tilde{P} = 0$ (полость с жидкостью отсутствует), то результат численного расчета полностью совпадает с [13].

Интегрирование системы (13) проводится для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$ при начальных условиях: $G(0) = 1$, $\delta(0) = \pi/4$, $\lambda(0) = \pi/4$, $\theta(0) = \pi/6$ и значениях главных центральных моментов инерции тела $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_3$, $\tilde{A}_1 = 4,175$, $\tilde{A}_3 = 1,67$.

Было рассмотрено два расчетных случая для различных значений коэффициентов сопротивления: $\tilde{I}_{11} = 2,322$, $\tilde{I}_{22} = 1,31$, $\tilde{I}_{33} = 1,425$ и $\tilde{I}_{11} = 2,6$, $\tilde{I}_{22} = 3,0$, $\tilde{I}_{33} = 0,5$.

В первом расчетном случае (рис. 3–5) при $\tilde{I}_{11} = 2,322$, $\tilde{I}_{22} = 1,31$, $\tilde{I}_{33} = 1,425$ величина в квадратных скобках второго уравнения системы (13) будет положительной. Графики построены для двух разных значений безразмерного коэффи-

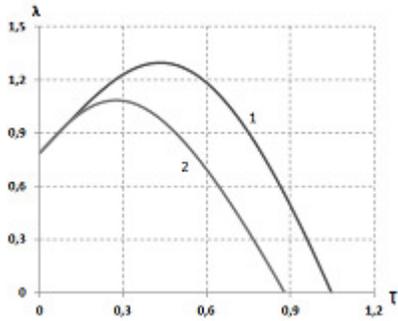


Рис. 5

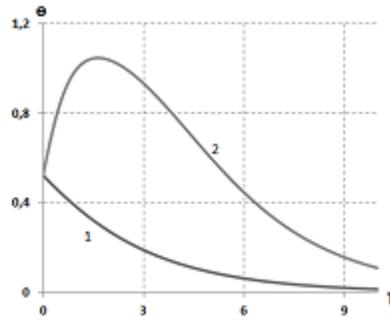


Рис. 6

циента момента сил вязкой жидкости в полости тела: $\tilde{P} = 0,5$, $\tilde{P} = 100$, которые на рисунках отмечены кривыми 1 и 2 соответственно.

Изменение величины вектора кинетического момента представлено на рис. 3. Численный анализ показывает, что увеличение влияния момента сил вязкой жидкости в полости тела приводит к торможению тела с меньшим градиентом.

Изучим поведение угла нутации. Как видно из рис. 4, функция $\theta = \theta(t)$ монотонно возрастает и угол θ стремится к предельному значению $\frac{\pi}{2}$. При существенном влиянии момента сил вязкой жидкости в полости тела (рис. 4, кривая 2) процесс возрастания угла нутации происходит быстрее. Таким образом, можно сделать вывод о том, что наличие в теле полости с вязкой жидкостью ускоряет нутацию спутника. При этом поворот вектора кинетического момента вокруг оси вертикали к плоскости орбиты замедляется (рис. 5, кривая 2).

На рис. 6-7 представлено изменение параметров во втором расчетном случае при $\tilde{I}_{11} = 2,6$, $\tilde{I}_{22} = 3,0$, $\tilde{I}_{33} = 0,5$. В этом случае величина в квадратных скобках второго уравнения системы (13) будет отрицательной. Поэтому на некотором начальном участке, соответствующем достаточно большим значениям \tilde{G} и при значительном влиянии момента сил вязкой жидкости в полости, угол θ стремится к $\frac{\pi}{3}$ (рис. 6, кривая 2).

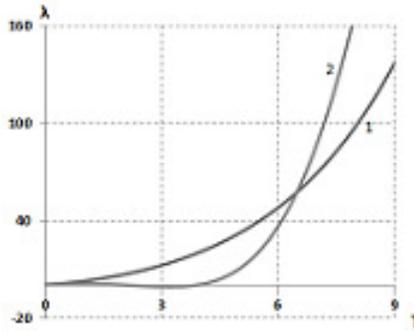


Рис. 7

Однако с течением времени, когда \tilde{G} становится достаточно малым, твердое тело стремится к вращению вокруг оси A_1 .

Функция $\theta = \theta(t)$ начинает монотонно убывать при слабом влиянии момента сил вязкой жидкости (рис. 6, кривая 1), тогда как функция λ монотонно возрастает (рис. 7, кривая 1). Это происходит из-за того, что во втором расчетном случае выражение $(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta)$ для функции λ остается положительным на всем интервале времени. В первом расчетном случае угол θ увеличивается и проходит критическое значение $\theta^* \approx 0,96$ рад, поэтому знак выражения \tilde{N} в (11) меняется, а следовательно, и функция λ монотонно убывает (рис. 5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Таким образом, аналитически и численно исследована задача о движении динамически симметричного спутника относительно центра масс под действием совместного влияния гравитационного притяжения, линейного сопротивления и момента сил вязкой жидкости в полости тела. Установлены основные свойства вращений.

Автор благодарит Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко за постановку задачи и полезные обсуждения.

1. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 3. – С. 474–483.
3. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. **Черноусько Ф. Л.** Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математики и мат. физ. – 1965. – Т. 5, № 6. – С. 1049–1070.
5. **Кошляков В. Н.** Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
6. **Кузнецова Е. Ю.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов / Е. Ю. Кузнецова, В. В. Сазанов, С. Ю. Чебуков // Изв.РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 2. – С. 3–14.
7. **Iñarra M.** Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit / Iñarra M., Lanchares V // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2006. – V. 41. – № 1 – P. 86–100.
8. **Акуленко Л. Д.** Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
9. **Акуленко Л. Д.** Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гироската в сопротивляющейся среде / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 102–107.
10. **Лещенко Д. Д.** О движении несимметричного гироската в среде с сопротивлением / Д. Д. Лещенко, С. Г. Суксова // Междунар. МФН-АНН журнал. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2003. – Т. 9, № 2 (18). – С. 83–89.
11. **Акуленко Л. Д.** Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 126–139.

12. **Сидоренко В. В.** Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астрон. вестник. – 1993. – Т. 27, № 2. – С. 119–127.
13. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные и управляемые вращения твердого тела / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич // Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова. – О. : ОНУ, 2013. – 288 с.
14. **Рачинская А. Л.** Быстрое вращение спутника в среде с сопротивлением на круговой орбите // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т.18, вип 4(20). – С. 112–119.
15. **Баранова Е. Ю.** Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью / Е. Ю. Баранова, В. Г. Вильке // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат., мех. – 2013. – № 1. – С. 44–50.
16. **Лара М.** Замкнутая форма решения задачи о быстром вращении трехосного спутника под действием гравитационного момента / М. Лара, С. Феррер // Космич. исслед. – 2013. – Т.51, № 4. – С. 323–337.
17. **Galdi G. P.** Inertial motion of a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid / G. P. Galdi, G. Mazzone, and P. Zunino // Comptes Rendus Mechanique. – 2013. – V.341, № 11–12. – P. 760–765.
18. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
19. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – М.: Наука, 1973. – 208 с.
20. **Акуленко Л. Д.** Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. – 2002. – Т. 66, № 2. – С. 165–176.

Получена 12.10.2014