ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2015 .–Т.20, вип. 1(25).–С. 7–19

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 34E99
УДК 517.925

М. А. Белозерова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПРОИЗВОДНЫМИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Білозерова М. О. Асимптотичні зображення розв'язків з повільно змінними похідними суттєво нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Для диференціальних рівнянь другого порядку, що є у деякому сенсі близькими до рівнянь з правильно змінними в околах особливих точок нелінійностями, отримано асимптотичні зображення, необхідні та достатні умови існування розв'язків з повільно змінними похідними.
Ключові слова: асимптотичні зображення рішень, правильно змінні нелінійності.

Белозерова М. А. Асимптотические представления решений с медленно меняющимися производными существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для дифференциальных уравнений второго порядка, в некотором смысле близких к уравнениям с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями, получены асимптотические представления, необходимые и достаточные условия существования решений с медленно меняющимися производными.
Ключевые слова: асимптотические представления решений, правильно меняющиеся нелинейности.

Bilozerova M. A. Asymptotic representations of the solutions with slowly varying derivatives of second order essential nonlinear differential equations. The asymptotic representations, necessary and sufficient conditions of the existence of the solutions with slowly varying derivatives are found for differential equations of the second order that are in some sense similar to equations with nonlinearities, that are regularly varying at the singular points.
Key words: asymptotic representation of solutions, regularly varying nonlinearities.

Введение.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$[1] $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[$[2], либо — $]Y_i, y_i^0]$. Кроме того, предполагается, что

[1] При $\omega > 0$ считаем, что $a > 0$.

каждая из функций $\varphi_i(z)$ является правильно меняющейся при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, причем $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Определение 1. *Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если*

$$y^{(i)} : [t, \omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\, y(t)} = \lambda_0. \qquad (2)$$

Для данного класса $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ в работах [1,2] были установлены неявные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1) и их производных первого порядка, а также получены необходимые и достаточные условия существования таких решений. Однако в особых случаях $\lambda_0 \in \{0, \pm\infty\}$ приходилось накладывать дополнительные ограничения на функции φ_0, φ_1. Опишем подробнее эти условия.

Пусть $\varphi : \Delta_Y) \to]0, +\infty[$ — правильно меняющаяся функция при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$ $(Y \in \{0, \infty\}$, $\Delta_Y)$ — некоторая односторонняя окрестность Y) порядка σ. Будем говорить, что φ удовлетворяет условию S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

имеет место соотношение

$$\theta(zL(z)) = \theta(z)(1 + o(1)) \qquad \text{при } z \to Y, \quad (z \in \Delta_Y),$$

где $\theta(z) = \varphi(z)|z|^{-\sigma}$.

Достаточно важный для изучения класс $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решений уравнения (1) был исследован лишь для случаев, когда функция φ_0 удовлетворяет условию S_0. В настоящей работе удалось распространить эти результаты на случай уравнения (1), в котором $\varphi_0(z) = \psi_0(z) \exp(R(|\ln|z||))$, R — правильно меняющаяся на бесконечности функция порядка μ, $0 < \mu < 1$, ψ_0 является правильно меняющейся при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_{Y_0})$ порядка σ_0. Отметим, что функция $\exp(R(|\ln|z||))$ не удовлетворяет условию S_0.

Основные результаты

1. Формулировка основных результатов. Введем дополнительные обозначения, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \theta_0(z) = \Psi_0(z)|z|^{-\sigma_0},$$

и в случае, когда $\lim\limits_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(\tau)| \operatorname{sign} y_0^0 = Y_0$,

$$I_0(t) = \int_{A_\omega^0}^t p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \theta_0\left(|\pi_\omega(\tau)| \operatorname{sign} y_0^0\right) d\tau,$$

[2]При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

$$A_\omega^0 = \begin{cases} b, & \text{если } \int_b^\omega p(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0}\theta_0\left(|\pi_\omega(t)|\text{sign} y_0^0\right)\, dt = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_b^\omega p(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0}\theta_0\left(|\pi_\omega(t)|\text{sign} y_0^0\right)\, dt < +\infty, \end{cases}$$

где $b \in [a, \omega[$ выбирается так, чтобы $|\pi_\omega(t)|\text{sign} y_0^0 \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [b, \omega[$,

$$L(t) = p(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0+1}\theta_0\left(|\pi_\omega(t)|\text{sign} y_0^0\right).$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) $\varphi_0(y) = \psi_0(y)\exp(R(|\ln|y||))$, *где* $R :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *— непрерывно дифференцируемая правильно меняющаяся на бесконечности функция порядка* μ, $0 < \mu < 1$, $\psi_0 : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ *является правильно меняющейся при* $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_{Y_0})$ *порядка* σ_0. *Тогда для существования у уравнения* (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений необходимо выполнение условий*

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \textit{если } \omega = +\infty, \\ 0, & \textit{если } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \pi_\omega(t) y_0^0 y_1^0 > 0 \quad \textit{при } t \in [a, \omega[. \tag{3}$$

Если же функция ψ_0 *удовлетворяет условию* S *и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||) I_0(t)}{\pi_\omega(t) I_0'(t)} = 0, \tag{4}$$

то в совокупности с (3) *условия*

$$\alpha_0 y_1^0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t) > 0 \;\; \textit{при } t \in [b, \omega[,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_1, \;\; \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_0'(t)}{I_0(t)} = 0 \tag{5}$$

являются необходимыми и достаточными для существования у (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений. Более того, для каждого такого решения имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)|y'(t)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))\exp(R(|\ln|y(t)||))} = \alpha_0(1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t)[1 + o(1)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)]. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть функция* φ_0 *такая же, как в теореме 1, но условие* (4) *не выполнено. Если функция* ψ_0 *удовлетворяет условию* S *и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||) L(t)}{\pi_\omega(t) L'(t)} = \infty, \tag{7}$$

то в совокупности с (3) *условия*

$$\alpha_0 y_1^0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1) \ln|\pi_\omega(t)| > 0 \;\; \textit{при } t \in [a, \omega[,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 \exp\left(\tfrac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} R(|\ln|\pi_\omega(t)||)\right) = Y_1 \tag{8}$$

являются необходимыми и достаточными для существования у (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений. Более того, для каждого такого решения имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))\exp(R(|\ln|y(t)||))} = \frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|L(t)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}[1+o(1)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \tag{9}$$

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to R$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решение уравнения (1). Тогда согласно (2) из тождества

$$\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2} + 1$$

следует, что

$$\frac{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2} = -1 + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом (2) непосредственно вытекают асимптотические соотношения

$$y(t) = \pi_\omega(t)y'(t)(1+o(1)), \quad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{10}$$

В силу первого из этих соотношений имеет место второе из представлений (6) и соблюдаются условия (3). Это означает, что существует такая медленно меняющаяся непрерывно дифференцируемая функция $L : \Delta_{Y_0} \to]0; +\infty[$, что $y(t) = \pi_\omega(t)L(\pi_\omega(t))$. Поэтому, в силу условия S_0, $\theta_0(y(t)) = \theta_0\left(|\pi_\omega(t)|\mathrm{sign}y_0^0\right)(1+o(1))$ при $t \uparrow \omega$. Кроме того, в силу свойств логарифмической функции и функции R имеем

$$R(|\ln|y(t)||) = R(|\ln|\pi_\omega(t)||)(1+o(1)) \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{11}$$

Перепишем уравнение (1) при $t \uparrow \omega$ в виде

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = \alpha_0 I_0'(t)\exp(R(|\ln|y(t)||))[1+o(1)]. \tag{12}$$

Далее допустим, что соблюдается условие (4). Положим

$$W(t) = \int\limits_{B_\omega}^{t} I_0'(\tau)\exp(R(|\ln|y(\tau)||))\,d\tau,$$

$$B_\omega = \begin{cases} a, & \text{если } \int\limits_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau = +\infty, \\ \\ \omega, & \text{если } \int\limits_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Обозначим
$$\lim_{t\uparrow\omega} I_0(t) = J_0.$$

Покажем, что функция $\exp(R(|\ln|y(t(I_0^{-1}(z)))||))$, где I_0^{-1} — функция, обратная для I_0, является медленно меняющейся функцией при $z \to J_0$. Действительно, в силу условия (4) и (11) имеем

$$\lim_{z\to J_0} \frac{z\left(\exp(R(|\ln|y(t(I_0^{-1}(z))||)\right)'}{\exp(R(|\ln|y(t(I_0^{-1}(z))||)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_0(t)R'(|\ln|y(t)||)}{I_0'(t)\pi_\omega(t)\mathrm{sign}(\ln|y(t)|)} = 0.$$

Отсюда, используя теорему об интегрировании правильно меняющихся функций, получаем, что
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{W(t)}{\exp\left(R(|\ln|y(t)||)\right) I_0(t)} = 1. \tag{13}$$

Из(13) и (12) следует первое из представлений (6). С учетом знака $y'(t)$ имеет место также первое и второе из условий (5). Кроме того, из (6), учитывая второе из соотношений (10), получим

$$\frac{\pi_\omega(t)p(t)\psi_0\left(|\pi_\omega(t)|\mathrm{sign}y_0^0\right)\varphi_1(y'(t))}{|y'(t)|^{1-\sigma_0}} \to 0 \quad \text{при } t\uparrow\omega,$$

откуда следует третье из условий (5).

Достаточность. Предположим, что функция ψ_0 удовлетворяет S, а также соблюдаются условия (3)–(5). Пусть $\widetilde{\theta}_1(z)$ — нормализованная медленно меняющаяся при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ функция, такая, что

$$\widetilde{\theta}_1(z) = \theta_1(z)(1+o(1)) \text{ при } z \to Y_1 \quad (z \in \Delta_{Y_1}).$$

Рассмотрим функцию

$$f(s_1,s_2) = \widetilde{\theta}_1(s_1)\exp\left(R(|\ln|s_2||)\right).$$

Для каждого $i \in \{0,1\}$ подберем число $y_i^1 \in \Delta_{Y_i}$ так, чтобы

$$\left|\frac{z_i f'_{z_i}(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\right| < \frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{16}$$

при $z_i \in \Delta^1_{Y_i}$, где

$$\Delta^1_{Y_i} = \begin{cases} [y_i^1, Y_i[, & \text{если } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[\\ ]Y_i, y_i^1], & \text{если } \Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0]. \end{cases}$$

Рассмотрим заданную на множестве $\Delta = \Delta^1_{Y_0} \times \Delta^1_{Y_1}$ функцию

$$F(s_1,s_2) = \begin{pmatrix} \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)} \\ \\ \frac{s_1}{s_2} \end{pmatrix}.$$

Для функции F имеем в силу свойств нормализованных медленно меняющихся функций

$$\lim_{\substack{s_1\to Y_1\\ s_1\in\Delta^1_{Y_1}}} \frac{s_1\left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)}\right)'_{s_1}}{\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)}} = 1-\sigma_0-\sigma_1 \text{ равномерно по } s_2\in\Delta^1_{Y_0}, \tag{14}$$

$$\lim_{\substack{s_2\to Y_0\\ s_2\in\Delta^1_{Y_0}}} \frac{s_2\left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)}\right)'_{s_2}}{\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)}} =$$

$$= \lim_{\substack{s_2\to Y_0\\ s_2\in\Delta^1_{Y_0}}} R'(|\ln|s_2||)\operatorname{sign}(\ln|s_2|) = 0 \text{ равномерно по } s_1\in\Delta^1_{Y_1},$$

так как $0<\mu<1$ и Y_0 — это либо 0, либо ∞.

Таким образом,

$$\lim_{\substack{s_1\to Y_1\\ s_1\in\Delta_{Y_1}}} \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)} = \Phi_0, \text{ равномерно по } s_2\in\Delta^1_{Y_0}$$

$$\Phi_0 = \begin{cases} +\infty, \text{если } Y_1=\infty \text{ и } 1-\sigma_0-\sigma_1>0,\\ \text{либо если } Y_1=0 \text{ и } 1-\sigma_0-\sigma_1<0;\\ \\ 0, \text{если } Y_1=0 \text{ и } 1-\sigma_0-\sigma_1>0,\\ \text{либо если } Y_1=\infty \text{ и } 1-\sigma_0-\sigma_1<0.\end{cases}$$

Покажем, что F взаимно однозначно отображает Δ на множество

$$F(\Delta) = \begin{cases} \left[\frac{|y_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(y_0^1,y_1^1)};\Phi_{01}\right)\times\Delta_0, \quad \text{если} \frac{|y_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(y_0^1,y_1^1)} < \Phi_{01},\\ \\ \left(\Phi_{01};\frac{|y_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(y_0^1,y_1^1)}\right]\times\Delta_0, \quad \text{если} \frac{|y_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(y_0^1,y_1^1)} > \Phi_{01},\end{cases}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{cases} \left[\frac{y_1^1}{y_0^1};Y_1^0\right), & \text{если } \lambda_0<0,\ \frac{y_1^1}{y_0^1}<Y_1^0,\\ \left(Y_1^0;\frac{y_1^1}{y_0^1}\right], & \text{если } \lambda_0<0,\ \frac{y_1^1}{y_0^1}>Y_1^0,\end{cases}$$

$$Y_1^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } Y_0=\infty,\\ -\infty, & \text{если } Y_0=0 \text{ и } \omega<+\infty,\\ +\infty, & \text{если } Y_0=0 \text{ и } \omega=+\infty.\end{cases}$$

Рассмотрим поведение функции $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)}$ на прямых

$$s_2 = ks_1, \qquad k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{15}$$

На каждой такой прямой $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)} = \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,ks_1)}$. Кроме того, имеем

$$\left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,ks_1)}\right)'_{s_1} = \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{s_1 f(s_1,ks_1)}\times$$

$$\times\left(1-\sigma_1-\sigma_0-\frac{s_1\widetilde{\theta}_0'(s_1)}{\widetilde{\theta}_0(s_1)}-kR'(|\ln|ks_1||)\mathrm{sign}\ln|ks_1|\right).$$

Это означает, что при $s_1\in\Delta^1_{Y_1}$

$$\mathrm{sign}\left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,ks_1)}\right)'_{s_1}=\mathrm{sign}(y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1)).$$

Поэтому функция $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,ks_1)}$ строго монотонна на любой прямой вида (15). Предположим, что отображение F не является взаимно-однозначным. Тогда

$$\exists(p_1,p_2),(q_1,q_2)\in\Delta,\quad (p_1,p_2)\neq(q_1,q_2):$$

$$F(p_1,p_2)=F(q_1,q_2).$$

С учетом определения множества Δ последнее равенство означает, что

$$\frac{|p_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(p_1,p_2)}=\frac{|q_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(q_1,q_2)},\quad \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=c\in\mathbb{R}\setminus 0. \tag{16}$$

Покажем, что точки (p_1,p_2) и (q_1,q_2) лежат на одной прямой вида (15). Но тогда (16) не может иметь места, так как функция $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,cs_1)}$ строго монотонна на этой прямой. Таким образом, существует обратная функция $F^{-1}:F(\Delta)\to\Delta$. Учитывая вид функции F , имеем

$$F^{-1}(w_1,w_2)=\begin{pmatrix}F_0^{-1}(w_1,w_2)\\ \\ F_1^{-1}(w_1,w_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_0^{-1}(w_1,w_2)\\ \\ \dfrac{F_0^{-1}(w_1,w_2)}{w_2}\end{pmatrix}.$$

Поскольку якобиан

$$JF(s_1,s_2)=$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{|s_1|^{-\sigma_0}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_1\widetilde{\theta}_0'(s_1)}{\widetilde{\theta}_0(s_1)}\right)\mathrm{sign}s_1}{f(s_1,s_2)} & \frac{F(s_1,s_2)R'(\ln|s_2||)}{s_2\mathrm{sign}(\ln|s_2|)}| \\ \frac{1}{s_2} & -\frac{s_1}{s_2^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{F(s_1,s_2)}{s_2^2}\left(1-\sigma_1-\sigma_0-\frac{s_1\widetilde{\theta}_0'(s_1)}{\widetilde{\theta}_0(s_1)}-\frac{R'(|\ln|s_2||)}{\mathrm{sign}(\ln|s_2|)}\right)\neq 0,\ \text{при } (s_1,s_2)\in\Delta,$$

функция F^{-1} является непрерывно дифференцируемой на $F(\Delta)$. Кроме того, для каждого $k\in\{1,2\}$ справедливо равенство

$$\frac{|F_0^{-1}(w_1,w_2)|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(F_0^{-1}(w_1,w_2),F_1^{-1}(w_1,w_2))}=w_1. \tag{17}$$

Уравнение (1) с помощью преобразования

$$F(y'(t),y(t))=\begin{pmatrix}\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+z_1(x)]\\ \\ \dfrac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2(x)]\end{pmatrix}, \tag{18}$$

где

$$x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|,\qquad \beta=\begin{cases}\ \ 1 & \text{при}\quad \omega=+\infty,\\ -1 & \text{при}\quad \omega<+\infty,\end{cases}\tag{19}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1'=\beta G_0(x)[K_1(x,z_1,z_2)(1+z_2)^{-\sigma_0}+\\ +K_2(x,z_1,z_2)G_1(x)(1+z_2)(1+z_1)-(1+z_1)],\\ \\ z_2'=-\beta\left[z_2+z_2^2-K_1(x,z_1,z_2)G_0(x)G_1(x)(1+z_2)^{1-\sigma_0}\right],\end{cases}\tag{20}$$

в которой

$$G_0(x)=\frac{\pi_\omega(t(x))I_0'(t(x))}{I_0(t(x))},\quad G_1(x)=\frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)(t)||)I_0(t)}{\pi_\omega(t)I_0'(t)},$$

$$\Lambda^0(t,z_1,z_2)=F_1^{-1}\left(\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+z_1],\frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2]\right),$$

$$\Lambda^0(t,z_1,z_2)=F_0^{-1}\left(\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+z_1],\frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2]\right),$$

$$K_1(x,z_1,z_2)=\frac{\theta_0\left(\Lambda^0(t(x),z_1,z_2)\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\theta_0(|\pi_\omega(t(x))|\mathrm{sign}y_0^0)}\times$$

$$\times\left[1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\widetilde{\theta}_1'\left(\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\right)}{\widetilde{\theta}_1\left(\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\right)}\right],$$

$$K_2(x,z_1,z_2)=\frac{R'\left(\left|\ln\left|\Lambda^0(t(x),z_1,z_2)\right|\right|\right)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}.$$

Из (17) и второго из условий (5) следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)=Y_1\ \text{равномерно по}\ (z_1,z_2)\in\left[-\frac12;\frac12\right]\times\left[-\frac12;\frac12\right].$$

Отсюда ввиду определения функции $\widetilde{\theta}_1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\widetilde{\theta}_1'\left(\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\right)}{\widetilde{\theta}_1\left(\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\right)}=0$$

равномерно по $(z_1,z_2)\in\left[-\frac12;\frac12\right]\times\left[-\frac12;\frac12\right]$.

С учетом (14) ясно, что функция $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_0)}$ является правильно меняющейся функцией порядка $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$ при $s_1\to Y_1$ $(s_1\in\Delta^1_{Y_1})$ равномерно по $s_2\in\Delta^1_{Y_0}$. Тогда из свойств правильно меняющихся функций и третьего из условий (5) следует, что функция $\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)$ является медленно меняющейся функцией при $t\uparrow\omega$ равномерно по $(z_1,z_2)\in\left[-\frac12;\frac12\right]\times\left[-\frac12;\frac12\right]$. Так как

$$\Lambda^0(t(x),z_1,z_2)=\frac{\pi_\omega(t)\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)}{1+z_2},$$

имеем для каждого $i \in \{1,2\}$

$$\lim_{x\to\infty} K_i(x,z_1,z_2) = 1 \quad \text{равномерно по} \quad (z_1,z_2) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]. \tag{21}$$

В силу (3) ясно, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{\pi_\omega(t)} = Y_1^0.$$

Кроме того, из первого и второго из условий (5) следует

$$\lim_{t\uparrow\omega} \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t) = \Phi_{01}.$$

Поэтому можно выбрать $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы

$$\begin{pmatrix} \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+z_1(x)] \\ \\ \dfrac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2(x)] \end{pmatrix} \in F(\Delta) \text{ при } t \in [t_0,\omega[, \quad |z_i| \leqslant \frac{1}{2}, i=1,2.$$

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (20) на множестве

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D, \text{ где } x_0 = \beta\ln|t_0|,$$

$$D = \{(z_1,z_2) : |z_i| \leqslant \frac{1}{2}, \ i=1,2\}.$$

Перепишем (20) в виде

$$\begin{cases} z_1' = G_0(x)\left[A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x,z_1,z_2) + R_2(x,z_1,z_2)\right], \\ \\ z_2' = A_{22}z_2 + R_3(x,z_1,z_2) + R_4(x,z_1,z_2), \end{cases}$$

где

$$A_{11} = -\beta, \quad A_{12} = -\beta\sigma_0, \quad A_{22} = -\beta,$$

$$\begin{gathered} R_1(x,z_1,z_2) = \beta K_2(x,z_1,z_2)G_1(x)(1+z_1)(1+z_2)+ \\ +\beta(K_1(x,z_1,z_2)-1)(1+z_2)^{-\sigma_0}, \\ R_2(x,z_1,z_2) = \beta\left[(1+z_2)^{-\sigma_0} - 1 + \sigma_0 z_2\right], \\ R_3(x,z_1,z_2) = -\beta K_1(x,z_1,z_2)G_0(x)G_1(x)(1+z_2)^{1-\sigma_0}, \\ R_4(x,z_1,z_2) = -\beta z_2^2. \end{gathered}$$

Из третьего из условий (5) и (4) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} G_i(x) = 0, \quad (i=0,1).$$

В силу вида функции G_0 ясно, что

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} G_0(x)dx = \infty.$$

Таким образом, с учетом (21) имеем

$$\lim_{x\to\infty} R_i(x,z_1,z_2)=0 \quad (i\in\{1,3\})$$

$$\text{равномерно по} \quad (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right],$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0 \quad (i\in\{2,4\})$$

$$\text{равномерно по} \quad x\in[x_0,+\infty[.$$

Тогда согласно теореме 2.1 из [3] система (20) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_1\geq x_0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замен (18), (19) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (6). В силу этих представлений и (1) y является $P_\omega(Y_0,Y_1,\infty)$- решением. Теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0,\omega[\to R$ — $P_\omega(Y_0,Y_1,\infty)$-решение уравнения (1). Так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим второе из асимптотических соотношений (9) и соотношение (12). Используя второе из асимптотических соотношений (9), перепишем (12) при $t\uparrow\omega$ в виде

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}=$$

$$=\alpha_0 p(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0+1}\theta_0\left(|\pi_\omega(t)|\mathrm{sign}y_0^0\right)\exp(R(|\ln|y(t)||))\cdot\tfrac{y'(t)}{y(t)}[1+o(1)].$$

Далее предположим, что соблюдается условие (7). Положим

$$W(t)=\int_a^t L(\tau)\exp(R(|\ln|y(\tau)||))\cdot\frac{y'(\tau)}{y(\tau)}\,d\tau.$$

Обозначим $v(t)=\exp(R(|\ln|y(t)||))$. Покажем, что функция $L(t(v^{-1}(z)))$, где v^{-1} — функция, обратная для v, является медленно меняющейся функцией при $z\to+\infty$. Действительно, в силу условий (7) и (11) имеем

$$\lim_{z\to J_0}\frac{z\left(L(t(v^{-1}(z)))\right)'}{L(t(v^{-1}(z)))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{v(t)L'(t)}{v'(t)L(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)R'\left(|\ln|y(t)||\right)}=0.$$

Отсюда в силу теоремы об интегрировании правильно меняющихся функций и (11) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{W(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{\exp\left(R(|\ln|y(t)||)\right)L(t)|}=1. \tag{22}$$

С учетом (22) и (12) имеет место первое из представлений (9). С учетом знака $y'(t)$ получаем также первое и второе из условий (8).

Достаточность. Предположим,что функция $\psi_0(z)$ удовлетворяет S_0, а также соблюдаются условия (7), (3) и (8). Рассмотрим ту же, что и при доказательстве теоремы 1, функцию F, которая, очевидно, обладает теми же свойствами.

Уравнение (1) с помощью преобразования

$$F(y'(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)[1+z_1(x)] \\ \\ \dfrac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2(x)] \end{pmatrix},$$

где

$$I(t) = \frac{L(t)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}, \quad x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \qquad \beta = \begin{cases} \ \ 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = \beta G_0(x)[K_1(x,z_1,z_2)G_1(x)(1+z_2)^{-\sigma_0} + \\ +K_2(x,z_1,z_2)(1+z_2)(1+z_1) - G_1(x)(1+z_1)], \\ \\ z_2' = -\beta\left[z_2 + z_2^2 - K_1(x,z_1,z_2)G_0(x)G_1(x)(1+z_2)^{1-\sigma_0}\right], \end{cases} \tag{23}$$

в которой

$$G_1(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{I(t(x))}, \quad G_0(x) = R'(|\ln|\pi_\omega(t)||),$$

$$\Lambda^0(t,z_1,z_2) = F_1^{-1}\left(\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)[1+z_1], \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2]\right),$$

$$\Lambda^0(t,z_1,z_2) = F_0^{-1}\left(\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)[1+z_1], \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2]\right),$$

$$K_1(x,z_1,z_2) = \frac{\theta_0\left(\Lambda^0(t(x),z_1,z_2)\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\theta_0(|\pi_\omega(t(x))|\mathrm{sign} y_0^0)} \times$$

$$\times\left[1-\sigma_0-\sigma_1 - \frac{\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\widetilde{\theta}_1'\left(\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\right)}{\widetilde{\theta}_1\left(\Lambda^1(t(x),z_1,z_2)\right)}\right],$$

$$K_2(x,z_1,z_2) = \frac{R'\left(\left|\ln\left|\Lambda^0(t(x),z_1,z_2)\right|\right|\right)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что

$$\lim_{x\to\infty} K_i(x,z_1,z_2) = 1 \quad \text{равномерно по} \quad (z_1,z_2) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]. \tag{24}$$

В силу (3) ясно, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{\pi_\omega(t)} = Y_1^0.$$

Кроме того, из (7) и (8) следует

$$\lim_{t\uparrow\omega} \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t) = \Phi_{01}.$$

Поэтому можно выбрать $t_0 \in [a, \omega[$ так, чтобы

$$\begin{pmatrix} \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)[1+z_1(x)] \\ \\ \dfrac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2(x)] \end{pmatrix} \in F(\Delta) \text{ при } t \in [t_0, \omega[, \quad |z_i| \leqslant \frac{1}{2}, i = 1,2.$$

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (23) на множестве

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \text{ где } x_0 = \beta \ln |t_0|,$$

$$D = \{(z_1, z_2) : |z_i| \leqslant \frac{1}{2}, \; i = 1, 2\}.$$

Перепишем (23) в виде

$$\begin{cases} z_1' = G_0(x)\left[A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(x, z_1, z_2)\right], \\ \\ z_2' = A_{22}z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(x, z_1, z_2), \end{cases}$$

где

$$A_{11} = -\beta, \quad A_{12} = -\beta, \quad A_{22} = -\beta,$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = \beta(K_2(x, z_1, z_2) - 1)(1 + z_1)(1 + z_2) +$$
$$+\beta G_1(x)[K_1(x, z_1, z_2)(1 + z_2)^{-\sigma_0} - 1 - z_2],$$
$$R_2(x, z_1, z_2) = \beta z_1 z_2,$$
$$R_3(x, z_1, z_2) = -\beta K_1(x, z_1, z_2) G_0(x) G_1(x)(1 + z_2)^{1-\sigma_0},$$
$$R_4(x, z_1, z_2) = -\beta z_2^2.$$

Из (7) и (3) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} G_i(x) = 0, \quad (i = 0, 1).$$

В силу вида функции G_0 ясно, что

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} G_0(x)dx = \infty.$$

Таким образом, с учетом (24) имеем

$$\lim_{x\to\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \text{ равномерно по } (z_1, z_2) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad i \in \{1, 3\},$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_i(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \text{ равномерно по } x \in [x_0, +\infty[, \quad i \in \{2, 4\}.$$

Тогда согласно теореме 2.1 из [3] система (23) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geqslant x_0)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Ему соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (9). В силу этих представлений и (1) y является $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решением.

Заключение. При некоторых дополнительных ограничениях установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решений уравнения (1) и их производных первого порядка, а также получены необходимые и достаточные условия существования таких решений для функций φ_0, не удовлетворяющих условию S.

1. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов // Укр. Мат. журнал. – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 310–331.
2. **Белозерова М. А.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями / М. А. Белозерова // Вісник Одеського нац. університету. Математика і механіка. – 2010. – Т. 15, вип. 18. – С. 7–21.
3. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. Мат. ж. – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52–80.

Получена 05.11.2014