ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2015 .–Т.20, вип. 1(25).–С. 38–45

Mathematical Subject Classification: 34K05
УДК 519.7

А. Н. Витюк, О. Д. Кичмаренко, Е. Ю. Сапожникова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАКСИМУМОМ

Вiтюк О. Н., Кiчмаренко О. Д., Сапожнiкова К. Ю. Про розв'язнiсть початкової задачi для диференцiального рiвняння з максимумом. Розглядається початкова задача для диференцiального рiвняння з максимумом. Отриманi достатнi умови iснування та єдиностi розв'язку цiєї задачi.
Ключовi слова: диференцiальнi рiвняння з максимумом, теореми iснування та єдиностi.

Витюк А. Н., Кичмаренко О. Д., Сапожникова Е. Ю. О разрешимости начальной задачи для дифференциального уравнения с максимумом. Рассматривается начальная задача для дифференциального уравнения с максимумом. Получены достаточные условия существования и единственности решения этой задачи.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения с максимумом, теоремы существования и единственности.

Vityuk A. N., Kichmarenko O. D., Sapozhnikova K. Yu. About solvability of initial problem for differential equation with maximum. Initial value problem for differential equation with maximum is considered. Sufficient conditions of existence and uniqueness solution for this problem are presented.
Key words: differential equation with maximum, theorems existence and uniqueness.

Введение. Решение многих прикладных задач приводит к исследованию функционально–диффренциальных уравнений. Среди функционально–дифференциальных уравнений особый интерес представляют дифференциальные уравнения с максимумом благодаря их многочисленным приложениям в экономике, экологии, биологии, медицине, теории колебаний, автоматическом регулировании. Исследованиям дифференциальных уравнений с максимумом посвящены работы многих авторов. В работе [2] были представлены результаты качественного анализа решений дифференциальных уравнений с максимумом. Некоторые свойства решений различных типов дифференциальных уравнений с максимумом, такие как, например, существование и единственость, были рассмотрены в работах [7]–[10]. В частности Д. Баиновым и С. Христовой [2] была рассмотрена начальная задача с максимумом

$$y'(t) = F(t, \max_{s\in[p(t),q(t)]} y(s)), \max_{s\in[\beta(t),\alpha(t)]} y'(s))),\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$y(t) = \psi(t),\, y'(t) = \psi'(t),\ t > 0, \tag{2}$$

где $y \in \mathbb{R}, \beta(t) \leqslant \alpha(t) \leqslant t$ и $p(t) \leqslant q(t) \leqslant t$ для $t \geqslant 0$, для которой авторами были предложены условия существования и единственности решения.

В настоящей работе получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для дифференциального уравнения с максимумами.

Условия разрешимости получены с использованием идеи работы [5], которая также использовалась другими авторами, например, [6].

Основные результаты

1. Вспомогательные определения и утверждения

Пусть $J=[0,a]$. Через $C(J)$ обозначим пространство непрерывных функций $f: J\to\mathbb{R}$ с нормой $\|f(x)\|=\max\limits_{J}|f(x)|$.

Теорема 1 (Дини)**.** [4, с. 378] *Если последовательность функций* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n: J\to\mathbb{R}$, *непрерывных на* J, *монотонна и сходится к непрерывной функции* $f: J\to\mathbb{R}$, *то сходимость* $f_n\to f$ *является равномерной на* J.

Приведем теперь аналог теоремы о дифференциальных неравенствах для дифференциальных уравнений с максимумами [2, с. 195].

Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\max_{\tau\in[-h,0]}x(\tau)), \tag{3}$$

$$x(t)=\varphi(t),\quad t\in[-h,0]. \tag{4}$$

Предположения (P):

(a) пусть $f(t,x,y): [-h,a]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ непрерывная функция и для любых (t,x_1,y_1), (t,x_2,y_2), $x_1\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y_2$ из области определения, то $f(t,x_1,y_1)\leqslant f(t,x_2,y_2)$;

(b) существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3) при начальном условии (4).

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения* (P), *и, кроме того, непрерывно дифференцируемая функция* $v(t): [-h,a]\to\mathbb{R}$ *такая, что* $v(t)\leqslant\varphi(t)$, $t\in[-h,0]$,

$$v'(t)\leqslant f(t,v(t),\max_{\tau\in[t-h,t]}v(\tau)),\ t\in J. \tag{5}$$

Тогда $v(t)\leqslant x(t),\ t\in J$.

2. Существование решений

Рассмотрим начальную задачу для дифференциального уравнения с максимумом

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\max_{\tau\in\sigma(t)}x(\tau)),\ t\in J=[0,a], \tag{6}$$

$$x(t)=0,\ t\in[-h,0],\ \sigma(t)=[t-h,t],\ h>0. \tag{7}$$

Скажем, что $f(t,x,y): J\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (H), если:

(i) $f(t,x,y)$ непрерывная;

(ii) удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t,x,y)-f(t,\overline{x},\overline{y})| \leqslant K\,|x-\overline{x}|+L\,|y-\overline{y}|\,. \tag{8}$$

Решением задачи (6), (7) называем функцию $x(t)\in C^1([-h,a])$, которая удовлетворяет уравнению (6) для $x\in J$ и условию (7).

Лемма 1. *Пусть функция $f(t,x,y): J\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию (i) и*

$$f(0,0,0)=0. \tag{9}$$

Тогда задача (6), (7) эквивалентна решению уравнения

$$v(t)=\begin{cases}0,\ t\in\sigma(0),\\ f(t,\int\limits_0^t v(s)ds,\ \max\limits_{\tau\in\sigma(t)}\int\limits_0^\tau v(s)ds),\ t\in J,\end{cases} \tag{10}$$

причем если $v(t)\in C([-h,a])$ — решение уравнения (10), то

$$x(t)=\begin{cases}0,\ t\in\sigma(0),\\ \int\limits_0^t v(s)ds,\ t\in J.\end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что условие (9) гарантирует непрерывность функции $v(t)$ при $t=0$. Пусть $x(t)\in C^1([-h,a])$ — решение задачи (6), (7). Тогда $v(t)=\dot{x}(t)\in C([-h,a])$.

Так как

$$x(t)=\begin{cases}0,\ t\in\sigma(0),\\ \int\limits_0^t v(s)ds,\ t\in J,\end{cases}$$

то $\max\limits_{\tau\in\sigma(t)}x(\tau)=\max\limits_{\tau\in\sigma(t)}\int\limits_0^\tau v(s)ds.$

Следовательно, $v(t)$ — решение уравнения (10). Пусть теперь $v(t)\in C([-h,a])$ - решение уравнения (10). Докажем, что

$$x(t)=\begin{cases}0,\ t\in\sigma(0),\\ \int\limits_0^t v(s)ds,\ t\in J\end{cases}$$

является решением задачи (6),(7). Действительно,

$$\dot{x}(t)=\begin{cases}0,\ t\in\sigma(0),\\ v(t),\ t\in J,\end{cases} \tag{11}$$

причем $\dot{x}(t)\in C([-h,a])$. Из (10), (11) следует, что $x(t)$ удовлетворяет (6). Лемма 1 доказана.

Пусть $\max_J |f(t,0,0)| \leqslant T$. Определим функцию $u(t)$ как решение интегрального уравнения

$$u(t) = A\int_0^t u(s)ds + T, \quad A = K + L.$$

Очевидно, что $u(t) = Te^{At}$. Определим последовательность $\{z_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, полагая $z_0(t) = u(t)$,

$$z_{n+1}(t) = A\int_0^t z_n(s)ds, \quad n = 0, 1, 2, ..$$

Докажем, что $0 \leqslant ... \leqslant z_{n+1} \leqslant z_n(t) \leqslant ... \leqslant z_0(t)$. Действительно, $z_1(t) = A\int\limits_0^t z_0(s)ds \leqslant A\int\limits_0^t u(s)ds + T = u(t) = z_0(t)$. Таким образом, $z_1(t) \leqslant z_0(t),\ t \in J$. Пусть $0 \leqslant z_n(t) \leqslant z_{n-1}(t),\ t \in J$. Тогда $z_{n+1}(t) = A\int\limits_0^t z_n(s)ds \leqslant A\int\limits_0^t z_{n-1}(s)ds = z_n(s)$, т.е $z_{n+1}(t) \leqslant z_n(t),\ t \in J$.

Таким образом, $z_n(t) \in C(J)$, последовательность $\{z_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ невозрастающая и ограничена снизу. Следовательно, существует измеримая функция $\overline{z}(t)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(t) = \overline{z}(t),\ t \in J$.

По теореме Лебега о мажорантной сходимости

$$\overline{z}(t) = A\int_0^t \overline{z}(s)ds. \tag{12}$$

Единственным решением уравнения (12) есть $\overline{z}(t) = 0,\ t \in J$. По теореме Дини последовательность $\{z_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно на J сходится к нулю. Рассмотрим последовательности $\{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, где $v_0(t) = 0$ для $t \in [-h, a]$,

$$v_{n+1}(t) = \begin{cases} 0,\ t \in \sigma(0), \\ f(t, \int\limits_0^t v_n(s)ds, \max\limits_{\tau\in\sigma(t)} \int\limits_0^{\tau} v_n(s)ds),\ t \in J. \end{cases}$$

Пусть

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} T,\ t \in \sigma(0), \\ u(t),\ t \in J, \end{cases}$$

$$\overline{z}_n(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in \sigma(0), \\ z_n(t), \quad t \in J. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть функция $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (H) и условию (9). Тогда существует единственное решение*

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in \sigma(0), \\ v(t), \quad t \in J \end{cases}$$

уравнения (10) такое, что $\overline{v}(t) \in C([-h,a])$,

$$|\overline{v}(t)| \leqslant \overline{u}(t), \tag{13}$$

$$|\overline{v}(t) - v_n(t)| \leqslant \overline{z}_n(t),\ t \in [-h,a],\ n \geqslant 0. \tag{14}$$

Доказательство. Докажем предварительно, что $|v_n(t)| \leqslant \overline{u}(t),\ t \in [-h,a]$. Очевидно, что $|v_0(t)| \leqslant \overline{u}(t)$, и $|v_n(t)| \leqslant \overline{u}(t)$ для $t \in \sigma(0)$. Остается доказать, что $|v_n(t)| \leqslant \overline{u}(t)$, для $t \in J,\ n \geqslant 1$. Пусть $|v_n(t)| \leqslant \overline{u}(t),\ \ t \in J$, и докажем, что $|v_{n+1}(t)| \leqslant \overline{u}(t)$, $t \in J$. Действительно, для $t \in J$

$$|v_{n+1}(t)| \leqslant \left| f\left(t, \int\limits_0^t v_n(s)ds, \max_{\tau\in\sigma(t)} \int\limits_0^\tau v_n(s)ds\right) - f(t,0,0)\right| + |f(t,0,0)| \leqslant$$

$$\leqslant K\int\limits_0^t |v_n(s)|\,ds + L\max_{\tau\in\sigma(t)}\int\limits_0^\tau |v_n(s)|\,ds + T \leqslant K\int\limits_0^t |v_n(s)|\,ds + L\int\limits_0^t |v_n(s)|\,ds + T \leqslant$$

$$\leqslant A\int\limits_0^t |v_n(s)|\,ds + T \leqslant A\int\limits_0^t u(s)ds + T = u(t).$$

Далее, воспользуемся индукцией, чтобы доказать, что для любого натурального $p \geqslant 1$ и $x \in J$

$$|v_{n+p}(t) - v_n(t)| \leqslant z_n(t). \tag{15}$$

При $n = 0$, $|v_p(t) - v_0(t)| = |v_p(t)| \leqslant u(t) = z_0(t),\ t \in J$.

Пусть $|v_{k+p}(t) - v_k(t)| \leqslant z_k(t)$. Тогда

$$|v_{k+1+p}(t) - v_{k+1}(t)| = \left| f\left(t, \int\limits_0^t v_{k+p}(s)ds, \max_{\tau\in\sigma(t)}\int\limits_0^\tau v_{k+p}(s)ds\right) -\right.$$

$$\left. -f\left(t, \int\limits_0^t v_k(s)ds, \max_{\tau\in\sigma(t)}\int\limits_0^\tau v_k(s)ds\right)\right| \leqslant K\int\limits_0^t |v_{k+p}(s) - v_k(s)|\,ds +$$

$$+L\max_{\tau\in\sigma(t)}\int\limits_0^\tau |v_{k+p}(s) - v_k(s)|\,ds \leqslant (K+L)\int\limits_0^t |v_{k+p}(s) - v_k(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant A\int\limits_0^t z_k(s)ds = z_{k+1}(t).$$

Следовательно, соотношение (15) доказано. Так как последовательность $\{z_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно на J сходится к нулю, то согласно (15) последовательность $\{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно на J сходится к $v(t) \in C(J)$. Из (15) при $p \to \infty$ следует (14).

Кроме того,

$$q_n = \left| \max_{\tau\in\sigma(t)} \int\limits_0^{\tau} v_n(s)ds - \max_{\tau\in\sigma(t)} \int\limits_0^{\tau} v(s)ds \right| \leqslant \max_{\tau\in\sigma(t)} \left| \int\limits_0^{\tau} v_n(s)ds - \int\limits_0^{\tau} v(s)ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\tau\in\sigma(t)} \int\limits_0^{\tau} |v_n(s) - v(s)|\, ds \leqslant \int\limits_0^{a} |v_n(s) - v(s)|\, ds.$$

Следовательно, $q_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Единственность. Пусть существует другое решение уравнения (10)

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} 0, \ t \in \sigma(0), \\ w(t), \ t \in J \end{cases}$$

такое, что $\overline{w}(t) \in C([-h, a]), \ |\overline{w}(t)| \leqslant \overline{u}(t), \ t \in [-h, a]$. Докажем, что

$$|\overline{w}(t) - v_n(t)| \leqslant \overline{z}_n(t), \ t \in [-h, a]. \qquad (16)$$

Очевидно, что достаточно доказать справедливость (16) для $t \in J$. Используя индукцию, при $n = 0$ имеем $|w(t) - v_0(t)| \leqslant u(t) = z_0(t), \ t \in J$.

Пусть $|w(t) - v_n(t)| \leqslant z_n(t), \ t \in J, \ n \geqslant 1$ и докажем, что $|w(t) - v_{n+1}(t)| \leqslant$ $\leqslant z_{n+1}(t), \ t \in J$. Действительно, для $t \in J$

$$|w(t) - v_{n+1}(t)| =$$

$$= \left| f\left(t, \int\limits_0^{t} w(s)ds, \max_{\tau\in\sigma(t)} \int\limits_0^{\tau} w(s)ds\right) - f\left(t, \int\limits_0^{t} v_n(s)ds, \max_{\tau\in\sigma(t)} \int\limits_0^{\tau} v_n(s)ds\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \int\limits_0^{t} |w(s) - v_n(s)ds| + L \int\limits_0^{t} |w(s) - v_n(s)ds| \leqslant A \int\limits_0^{t} z_n(s)ds = z_{n+1}(t).$$

Согласно (16) $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{v}_n(t) = \overline{w}(t)$ равномерно на J. Следовательно, $\overline{v}(t) = \overline{w}(t)$.

Теорема 3 доказана.

Замечание. Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \max_{\tau\in\sigma(t)} x(\tau)), \qquad (17)$$

$$x(t) = \alpha, \ t \in \sigma(0). \qquad (18)$$

Пусть

$$f(0, x(0), \max_{\tau\in\sigma(t)} x(0)) = f(0, \alpha, \alpha) = 0. \tag{19}$$

Полагаем, что $u(t) = \alpha$ для $t \in [-h, a]$.
Определим такую функцию $y(t)$, что $x(t) = y(t) + u(t)$ для $t \in [-h, a]$. Очевидно, что $y(t) = x(t) - u(t) = 0,\ t \in \sigma(0)$. Если $t \in J$, то $y'(t) = x'(t) - u'(t) = f(t, y(t) + u(t), \max_{\tau\in\sigma(t)} (y(\tau) + u(\tau))) = f(t, y(t) + \alpha, \alpha + \max_{\tau\in\sigma(t)} y(\tau))$.

Таким образом, $y(t)$ есть решение задачи

$$y'(t) = F(t, y(t), \max_{\tau\in\sigma(t)} y(\tau)). \tag{20}$$

$$y(t) = 0,\ t \in \sigma(0), \tag{21}$$

где $F(t, y(t), \max_{\tau\in\sigma(t)} y(\tau)) = f(t, y(t) + \alpha, \alpha + \max_{\tau\in\sigma(t)} y(\tau))$. Если функция f удовлетворяет условиям (i), (ii), то F также удовлетворяет этим же условиям. Так как согласно (19) $F(0, 0, 0) = f(0, \alpha, \alpha) = 0$, то условие (7) для F выполняется. Следовательно, существует единственное решение $y(t)$ задачи (20),(21), а значит, и задачи (17), (18).

Пример 1. *Рассмотрим начальную задачу*

$$x'(t) = \max_{\tau\in\sigma(t)} x(\tau) + t,\ t \in J,\ J = [0, 1], \tag{22}$$

где $\sigma(t) = [t - h, t],\ h = 0.5,$

$$x(t) = 0,\ t \in [-h, 0]. \tag{23}$$

В этом примере $K = 0,\ L = 1$. Существует единственное решение задачи (22), (23). Для $v(t) = 0,\ t \in [-0.5, 1]$

$$v'(t) \leqslant \max_{\tau\in\sigma(t)} v(\tau) + t.$$

Согласно теореме 2 имеем $x(t) \geqslant 0,\ t \in J$. Следовательно, $x'(t) \geqslant 0,\ t \in J$. Теперь уравнение (22) принимает вид $x'(t) = x(t) + t,\ x(0) = 0$, так как $x(t)$ не убывает на J, причем $x(t) = e^t - t - 1,\ u(t) = e^t$.

Пример 2.

$$x'(t) = \max_{\tau\in\sigma(t)} x(\tau) + t,\ t \in J,\ J = [0, 1],$$

$$x(t) = 1,\ t \in \sigma(0),\ \alpha = 1.$$

Для этой задачи $u(t) = 1,\ t \in [-h, 1],\ y(t)$ — решение начальной задачи

$$y'(t) = \max_{\tau\in\sigma(t)} y(\tau) + 1 + t,\ y(t) = 0,\ t \in \sigma(t).$$

Тогда $y(t) = 2e^t - t - 2,\quad x(t) = y(t) + u(t) = 2e^t - t - 1.$

Заключение. Таким образом, в представленной нами работе получены достаточные условия разрешимости начальной задачи с максимумом в случае нулевой или постоянной функции предыстории, определенной на промежутке фиксированной длины.

1. **Магомедов А. Р.** Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумом / Магомедов А. Р. – Баку : Элм, 1991. — 220 с.
2. **Bainov D. D.** Differential equations with maxima / Bainov D. D., Hristova S. G. – London, N.Y.:CRC Pres.
3. **Сендов Б.** Усредненные модули гладкости / Сендов Б., Попов В. – М.: Мир, 1998. — 328 с.
4. **Зорич В. А.** Математический анализ. Т. 2 / Зорич В. А. – М.: Наука, 1984. — 640 с.
5. **Wazewski T.** Sur un procede de prouver la converqence des approximations successives sans utilisations des series decomparaison / Wazewski T. – Bull. Acad. Sic., ser. su: math., astr. et phys. — 1960. — V. 8, № 1.— pp. 45–52.
6. **Jankowski T.** On the existence and uniqueness of solutions of systems of disserential equations with deiated argument / Jankowski T., Kwapisz – Ann. Polon. Math. — 1972. — V. 2.— pp. 257–281.
7. **Angelov V.** On the functional-differential equations with "maximums" / Angelov V., Bainov D. — Applicable Anal. — 1983. — 16(3). — pp. 187-194.
8. **Georgiev L.** On the existence and uniqueness of solutions for maximum equations/ Georgiev L., Angelov V. — Glasnik Matematicki —2002.— 37(2). — pp. 275–281.
9. **Георгиев Л.** О проблеме непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения с "максимумом"от параметра / Георгиев Л., Мунтян В., Шпакович В. — Акад. Наук Украинской ССР. — 1987.
10. **Sobeih M.** A study for a unique solution for a vector differential equation with maximum / Sobeih M., Aly E. — An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. — 1991. — 37(1). — pp. 27–36.

Получена 27.11.2014