Mathematical Subject Classification: 39A10, 93C23, 93C55
УДК 517.93

М. Л. Карпычева
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБЩАЯ СХЕМА УСРЕДНЕНИЯ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Карпичева М. Л. Загальна схема усереднення систем дискретних рівнянь зі змінним запізненням в задачах оптимального керування. Розглядається задача оптимального керування для систем дискретних рівнянь, які містять змінне запізнення відносно стану та керування. Для розв'язування задачі використовується метод усереднення. Доводиться, що за оптимальним керуванням усередненої задачі можна побудувати асимптотично оптимальне керування початкової задачі.
Ключові слова: метод усереднення, дискретне рівняння, змінне запізнення, задача оптимального керування.

Карпычева М. Л. Общая схема усреднения систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием в задачах оптимального управления. Рассматривается задача оптимального управления для систем дискретных уравнений, содержащих переменное запаздывание относительно состояния и управления. Для решения задачи используется метод усреднения. Доказывается, что по оптимальному управлению усредненной задачи можно построить асимптотически оптимальное управление исходной задачи.
Ключевые слова: метод усреднения, дискретное уравнение, переменное запаздывание, задача оптимального управления.

Karpycheva M. L. The general schema of averaging of systems of discrete equations with variable delay in the optimal control tasks. There is considered the optimal control problem for systems of discrete equations with variable delay about the state and control. The averaging method using to solve the problem. For the optimal control of averaging problem we can construct the asymptotically optimal control of the original problem, it is proved.
Key words: averaging method, discrete equation, variable delay, optimal control problem.

Введение. Применение численных методов для моделирования динамических систем и анализа их свойств приводит к исследованию систем дискретных уравнений. Если реакция динамической системы на управляющие воздействия носит запаздывающий характер, то при построении математической модели необходимо ввести в рассмотрение переменное запаздывание относительно состояния и управления.

Вопросы существования оптимального управления для систем дискретных уравнений рассматривались в работах [1–3]. Различные схемы усреднения применительно к системам дискретных уравнений стандартного вида и соответствующих задач оптимального управления рассматривались в работах [4–6], применительно к системам с быстрыми и медленными переменными — в работах [7–8].

Метод усреднения для систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием и соответствующих задач оптимального управления обоснован в работах [9–10], а с переменным запаздыванием для периодических систем — в работе [11].

В данной работе метод усреднения применяется для решения систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием по состоянию и управлению. Обосновывается модификация алгоритма построения асимптотически оптимального управления исходной задачи, если известно оптимальное управление усредненной задачи.

Основные результаты. Рассмотрим систему дискретных уравнений для управляемого движения, содержащую переменное запаздывание относительно состояния и управления

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot \left[f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right) + A\left(x_i, x_{s(i)}\right) \cdot \varphi\left(i, u_i, u_{ss(i)}\right) \right], \quad x_0 = x^0, \tag{1}$$

где $x_i \in D \subset R^n$ – текущее n-мерное состояние системы из замкнутого множества D, индекс i определяет текущий момент дискретного времени, причем $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, где $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L = const$, $E\left(c\right)$ – целая часть числа c, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right)$ – заданная n-мерная функция, $A\left(x_i, x_{s(i)}\right)$ – заданная $n \times n_1$-матрица, $\varphi\left(i, u_i, u_{s(i)}\right)$ – заданная n_1-мерная функция, $u_i \in U \subset comp\left(R^r\right)$ – текущее r-мерное управление, выбираемое из компактного множества U, заданная функция запаздывания $s\left(i\right) \in I_s = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., i\}$ определяет момент дискретного времени влияния переменного запаздывания на текущее i-е состояние системы, очевидно, что $s\left(i\right) \leqslant i$ для любого $i \in I$, а заданная функция $ss\left(i\right) \in I_s = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., i\}$ определяет влияние переменного запаздывания на управление системой, при этом $ss\left(i\right) \leqslant i$ для любого $i \in I$.

Определение 1. *Допустимыми управлениями дискретной задачи (1) назовем функции $u = \{u_i \in U,\ i \in I\}$ из компактного множества U, для которых найдется значение $\varepsilon_0 > 0$, не зависящее от $u = \{u_i \in U,\ i \in I\}$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ соответствующие решения $x = \{x_i,\ i \in I\}$ задачи управления (1) определены и принадлежат замкнутому множеству D.*

Для исследования задачи (1) применим метод усреднения. Предположим, что для функций $f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right)$ и $\varphi\left(i, u_i, u_{s(i)}\right)$ существуют пределы

$$f_0\left(w^1, w^2\right) = \lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(j, w^1, w^2\right), \tag{2}$$

$$V = \lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} \varphi\left(j, U, U\right) \tag{3}$$

равномерно относительно целочисленного $q \geqslant 0$ и $w^1, w^2 \in D$.

Сходимость в (2) и (3) означает, что найдется монотонно убывающая функция $\psi\left(h\right)$ такая, что $\lim\limits_{h \to \infty} \psi\left(h\right) = 0$, и для любого целочисленного $q \geqslant 0$ будут справедливы неравенства

$$\left\| f_0\left(w^1, w^2\right) - \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(j, w^1, w^2\right) \right\| \leqslant \psi\left(h\right), \tag{4}$$

$$\delta\left(V,\ \frac{1}{h}\sum_{j=q}^{q+h-1}\varphi\left(j,U,U\right)\right)\leqslant\psi\left(h\right),\tag{5}$$

где $\delta\left(A,B\right)$ – метрика Хаусдорфа для множеств A и B.

По условию множество U является компактным, поэтому построенное множество V является выпуклым и компактным [2].

Задаче (1) с управлениями $u\in U$ поставим в соответствие усредненную задачу с управлениями $v\in V$, для ее построения выберем целочисленное значение $h\left(\varepsilon\right)$, обладающее свойствами

$$\lim_{\varepsilon\to 0}h\ \left(\varepsilon\right)=+\infty,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\cdot h\left(\varepsilon\right)=0.\tag{6}$$

На множестве $I=\{0,1,2,...,N\}$ зафиксируем точки kh, отстоящие друг от друга на расстоянии $h\left(\varepsilon\right)$, при этом получим медленно меняющееся время

$$k\in I_k=\{0,1,2,...,N_k\}\,,\quad N_k=E\left(\frac{L}{\varepsilon h}\right).\tag{7}$$

На множестве значений $k\in I_k$ при условии существования пределов (2), (3) построим усредненную задачу управления вида

$$\xi_{k+1}=\xi_k+\varepsilon h\cdot\left[f_0\left(\xi_k,\xi_{m(k)}\right)+A\left(\xi_k,\xi_{m(k)}\right)\cdot v_k\right],\quad \xi_0=x^0,\tag{8}$$

где $\xi_k\in D\subset R^n$ – текущее состояние системы в медленном времени $k\in I_k$, а целочисленная функция

$$m\left(k\right)=E\left(\frac{s\left(kh\right)}{h}\right)\tag{9}$$

определяет моменты времени влияния запаздывания на текущее состояние системы для усредненной задачи в медленном времени, причем $m\left(k\right)\leqslant k$ для любого $k\in I_k$, а это значит, что $m\left(k\right)\in I_m=\{0,1,2,...,k\}$, значения $v_k\in V,k\in I_k$ – новое управление усредненной задачи (8).

Для синхронизации времени при получении оценки близости решения $x=\{x_i,i\in I\}$ исходной задачи (1) и решения $\xi=\{\xi_k,k\in I_k\}$ усредненной задачи (8) определим промежуточные значения для решения усредненной задачи при помощи кусочно-линейной интерполяции по формуле

$$\gamma_i=\xi_k+\frac{\left(i-kh\right)\left(\xi_{k+1}-\xi_k\right)}{h},\tag{10}$$

где $i\in\left[kh,\ \left(k+1\right)h\right)$ – текущее дискретное время исходной задачи (1), находящееся между соответствующими моментами дискретного времени $k\in I_k$ усредненной задачи (8).

Установим соответствие между управлениями $u=\{u_i\in U,\ i\in I\}$ задачи (1) и управлениями $v=\{v_k\in V,\ k\in I_k\}$ усредненной задачи (8).

Из неравенства (5) следует, что для любого допустимого управления $u=\{u_i\in U,i\in I\}$ задачи (1) на промежутке $i\in\left[kh,\left(k+1\right)\cdot h\right)$, $k\in I_k$ существует ступенчатое среднее управление $\bar{v}=\{\bar{v}_k\in V,\ k\in I_k\}$ усредненной задачи (8), определяемое соотношениями

$$\left\|\bar{v}_k-\frac{1}{h}\sum_{i=kh}^{(k+1)h-1}\varphi\left(i,u_i,u_{ss(i)}\right)\right\|=$$

$$= \min_{v_k \subset V} \left\| v_k - \frac{1}{h} \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} \varphi\left(i, u_i, u_{ss(i)}\right) \right\| \leqslant \psi\left(h\right). \tag{11}$$

Аналогично, для любого допустимого управления $v = \{v_k \in V, k \in I_k\}$ усредненной задачи (8) на промежутке $i \in [kh, (k+1) \cdot h)$, $k \in I_k$ существует управление $\bar{u} = \{\bar{u}_i \in U, i \in I\}$ задачи (1), определяемое из соотношений

$$\left\| v_k - \frac{1}{h} \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} \varphi\left(i, \bar{u}_i, \bar{u}_{ss(i)}\right) \right\| =$$

$$= \min_{u_i \subset U} \left\| v_k - \frac{1}{h} \sum_{i=kh}^{(k+1)h-1} \varphi\left(i, u_i, u_{ss(i)}\right) \right\| \leqslant \psi\left(h\right), \tag{12}$$

управление $\bar{u} = \{\bar{u}_i \in U, i \in I\}$ в (12) может определяться неоднозначно.

Докажем, что управление $\bar{v} = \{\bar{v}_k \in V, k \in I_k\}$, построенное по формулам (11), можно взять в качестве асимптотического управления для усредненной задачи (8), а управление $\bar{u} = \{\bar{u}_i \in U, i \in I\}$, построенное по формулам (12), – в качестве асимптотического управления для задачи (1).

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{i \in I; x_i \in D; u_i \in U\}$ для задач управления (1) и (8) выполнены следующие условия:*

1) *функции $f\left(i, w^1, w^2\right)$, $A\left(w^1, w^2\right)$, $\varphi\left(i, w^1, w^2\right)$ равномерно ограничены константой M;*
2) *функции $f\left(i, w^1, w^2\right)$, $A\left(w^1, w^2\right)$ удовлетворяют условию Липшица по переменным w^1, w^2 с постоянной λ;*
3) *равномерно относительно целочисленного значения $q \geqslant 0$ и $w^1, w^2 \in D$ существуют пределы (2), (3);*
4) *функции $s\left(i\right)$ и $ss\left(i\right)$ принимают целочисленные значения из множества $I_s = \{0, 1, 2, ..., i\}$ для любого $i \in I$, функция $s\left(i\right)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ_s;*
5) *для любого допустимого управления $v = \{v_k \in V, k \in I_k\}$ усредненной задачи (8) соответствующее ему решение $\xi = \{\xi_k, k \in I_k\}, \xi_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью принадлежит области D.*

Тогда для любого $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0\left(\eta, L\right) > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}, N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ справедливы следующие утверждения:

I) *для любого допустимого управления $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ и соответствующего решения $x = \{x_i, i \in I\}$ задачи (1) существует такое допустимое управление $v = \{v_k \in V, k \in I_k\}$, построенное по схеме (11), и соответствующее решение $\gamma = \{\gamma_i, i \in I\}, x_0 = \gamma_0 = x^0 \in D' \subset D$ усредненной задачи (8), (10), что справедлива оценка*

$$\|x_i - \gamma_i\| \leqslant \eta; \tag{13}$$

II) для любого допустимого управления $v = \{v_k \in V, k \in I_k\}$ и соответствующего решения $\gamma = \{\gamma_i, i \in I\}$ усредненной задачи (8), (10) существует такое допустимое управление $u = \{u_i \in U,\ i \in I\}$, построенное по схеме (12), и соответствующее решение $x = \{x_i, i \in I\}, \gamma_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$ задачи (1), что справедлива оценка (13).

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ – допустимое управление задачи (1), $x = \{x_i, i \in I\}$ – соответствующее ему решение. Пусть $v = \{v_k \in V, k \in I_k\}$ – управление усредненной задачи (8), построенное по схеме (11), а $\xi = \{\xi_k, k \in I_k\}$ – соответствующее ему решение, удовлетворяющее начальному условию $\xi_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$, которое по условию теоремы вместе со своей ρ-окрестностью лежит в области D. Значения $\gamma = \{\gamma_i, i \in I\}$, построенные по формулам (10), при $i \in [kh, (k+1)\,h)$, $k \in I_k$ принадлежат отрезкам $\gamma_i \in [\xi_k; \xi_{k+1})$, поэтому вместе со своей ρ-окрестностью также лежат в области D.

Выберем произвольное $\eta > 0$ такое, что $\eta < \rho$, и зафиксируем его. Оценим разность между решениями задачи управления (1) и соответствующей усредненной задачи (8), (10) в произвольный момент дискретного времени $i \in I$. При этом найдется момент медленного времени $k \in I_k$ такой, что $i \in [kp, (k+1)\,p - 1)$ и будет выполняться неравенство

$$\|x_{i+1} - \gamma_{i+1}\| \leqslant \|x_{i+1} - x_{kh}\| + \|x_{kh} - \gamma_{kh}\| + \|\gamma_{kh} - \gamma_{i+1}\|\,. \tag{14}$$

В неравенстве (14) оценим каждое слагаемое отдельно. Для первого слагаемого с учетом выполнения условия 1) теоремы получим

$$\|x_{i+1} - x_{kh}\| \leqslant \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{i} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) + A\left(x_j, x_{s(j)}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j, u_{ss(j)}\right) \right] \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon h M\,(1 + M)\,. \tag{15}$$

Из уравнений усредненной задачи управления (8), (10) следует, что

$$\gamma_{i+1} = \gamma_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{i} \left[f_0\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) + A\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) \cdot v_k \right],$$

откуда при выполнении условия 1) теоремы получим оценку для третьего слагаемого в (14) в виде

$$\|\gamma_{i+1} - \gamma_{kh}\| \leqslant \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{i} \left[f_0\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) + A\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) \cdot v_k \right] \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon h M\,(1 + M)\,. \tag{16}$$

В (14) осталось оценить второе слагаемое. Учитывая, что $\gamma_{kh} = \xi_k$, $\gamma_{m(k)h} = \xi_{m(k)}$ для всех $k \in I_k$, соответствующие задачи управления (1) и (8), (10) представим в виде

$$x_{(k+1)h} = x_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) + A\left(x_j, x_{s(j)}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j, u_{ss(j)}\right) \right],$$

$$\gamma_{(k+1)h} = \gamma_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left[f_0\left(\gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) + A\left(\gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) \cdot v_k \right].$$

Рассмотрим соответствующую разность

$$\left\| x_{(k+1)h} - \gamma_{(k+1)h} \right\| \leqslant \left\| x_{kh} - \gamma_{kh} \right\| +$$

$$+\varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - f\left(j, \gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f\left(j, \gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) - h \cdot f_0\left(\gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) \right\| +$$

$$+\varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| A\left(x_j, x_{s(j)}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j, u_{ss(j)}\right) - A\left(\gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j, u_{ss(j)}\right) \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| A\left(\gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) \right\| \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \varphi\left(j, u_j, u_{ss(j)}\right) - h \cdot v_k \right\|. \qquad (17)$$

В неравенстве (17) оценим последовательно каждое слагаемое. При выполнении условий 1), 2) теоремы для второго слагаемого получим

$$\varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - f\left(j, \gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - f\left(j, x_{kh}, x_{s(kh)}\right) \right\| +$$

$$+\varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| f\left(j, x_{kh}, x_{s(kh)}\right) - f\left(j, \gamma_{kh}, \gamma_{m(k)h}\right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\left\| x_j - x_{kh} \right\| + \left\| x_{s(j)} - x_{s(kh)} \right\| \right) +$$

$$+\varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\left\| x_{kh} - \gamma_{kh} \right\| + \left\| x_{s(kh)} - \gamma_{m(k)h} \right\| \right).$$

При выполнении условия 4) теоремы оценим отдельно выражение

$$\left\| x_{s(j)} - x_{s(kh)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\| \sum_{\min(s(j),s(kh)) \leqslant t < \max(s(j),s(kh))} \left(f\left(t, x_t, x_{s(t)}\right) + A\left(x_t, x_{s(t)}\right) \varphi\left(t, u_t, u_{ss(t)}\right) \right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M\left(1+M\right)\cdot\left\|s\left(j\right)-s\left(kh\right)\right\|=$$
$$=\varepsilon\lambda_s M\left(1+M\right)\cdot\left\|j-kh\right\|\leqslant\varepsilon h\lambda_s M\left(1+M\right). \tag{18}$$

С учетом (15) для второго слагаемого в (17) получим

$$\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-f\left(j,\gamma_{kh},\gamma_{m(k)h}\right)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\lambda h\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)\cdot\left(1+\lambda_s\right)+$$
$$+\varepsilon\lambda h\cdot\left(\left\|x_{kh}-\gamma_{kh}\right\|+\left\|x_{s(kh)}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right).$$

При выполнении условия 3) теоремы следует существование функции $\psi\left(h\right)$ такой, что справедливо неравенство (4). Поэтому для третьего слагаемого в (17) получим оценку

$$\varepsilon\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}f\left(j,\gamma_{kh},\gamma_{m(k)h}\right)-h\cdot f_0\left(\gamma_{kh},\gamma_{m(k)h}\right)\right\|\leqslant\varepsilon h\psi\left(h\right).$$

При выполнении условий 1), 2) теоремы, полученных оценок (15), (18) для четвертого слагаемого в (17) справедливо

$$\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|A\left(x_j,x_{s(j)}\right)\cdot\varphi\left(j,u_j,u_{ss(j)}\right)-A\left(\gamma_{kh},\gamma_{m(k)h}\right)\cdot\varphi\left(j,u_j,u_{ss(j)}\right)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|\varphi\left(j,u_j,u_{ss(j)}\right)\right\|\cdot\left\|A\left(x_j,x_{s(j)}\right)-A\left(x_{kh},x_{s(kh)}\right)\right\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|\varphi\left(j,u_j,u_{ss(j)}\right)\right\|\cdot\left\|A\left(x_{kh},x_{s(kh)}\right)-A\left(\gamma_{kh},\gamma_{m(k)h}\right)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\lambda M\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left(\left\|x_j-x_{kh}\right\|+\left\|x_{s(j)}-x_{s(kh)}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon\lambda M\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left(\left\|x_{kh}-\gamma_{kh}\right\|+\left\|x_{s(kh)}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right)\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon h\lambda M\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)\cdot\left(1+\lambda_s\right)+$$
$$+\varepsilon h\lambda M\cdot\left(\left\|x_{kh}-\gamma_{kh}\right\|+\left\|x_{s(kh)}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right).$$

При выполнении условия 3) теоремы следует существование функции $\psi\left(h\right)$ такой, что справедливо неравенство (11). Поэтому для пятого слагаемого в (17) получим оценку

$$\varepsilon\left\|A\left(\gamma_{kh},\gamma_{m(k)h}\right)\right\|\cdot\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\varphi\left(j,u_j,u_{ss(j)}\right)-h\cdot v_k\right\|\leqslant\varepsilon hM\psi\left(h\right).$$

Неравенство (17) примет вид

$$\left\|x_{(k+1)h}-\gamma_{(k+1)h}\right\| \leqslant \|x_{kh}-\gamma_{kh}\| +$$
$$+\varepsilon h\lambda\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)\cdot\left(1+\lambda_s\right)+\varepsilon h\lambda\cdot\left(\|x_{kh}-\gamma_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon h\lambda M\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)\cdot\left(1+\lambda_s\right)+\varepsilon h\lambda M\cdot\left(\|x_{kh}-\gamma_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon h\psi\left(h\right)+\varepsilon hM\psi\left(h\right)\leqslant$$
$$\leqslant\|x_{kh}-\gamma_{kh}\|+\varepsilon h\lambda\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)^2\cdot\left(1+\lambda_s\right)+$$
$$+\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\cdot\left(\|x_{kh}-\gamma_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-x_{m(k)h}\right\|+\left\|x_{m(k)h}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon h\left(1+M\right)\psi\left(h\right).$$

В полученном неравенстве оценим отдельно выражение

$$\left\|x_{s(kh)}-x_{m(k)h}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\left\|\sum_{\min(s(kh),m(k)h)\leqslant t<\max(s(kh),m(k)h)}\left(f\left(t,x_t,x_{s(t)}\right)+A\left(x_t,x_{s(t)}\right)\varphi\left(t,u_t,u_{ss(t)}\right)\right)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon M\left(1+M\right)\|s\left(kh\right)-m\left(k\right)h\|=$$
$$=\varepsilon hM\left(1+M\right)\left\|\frac{s\left(kh\right)}{h}-E\left(\frac{s\left(kh\right)}{h}\right)\right\|\leqslant\varepsilon hM\left(1+M\right).$$

Окончательно для неравенства (17) получим

$$\left\|x_{(k+1)h}-\gamma_{(k+1)h}\right\| \leqslant \|x_{kh}-\gamma_{kh}\| +$$
$$+\varepsilon h\lambda\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)^2\cdot\left(1+\lambda_s\right)+$$
$$+\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\cdot\left(\|x_{kh}-\gamma_{kh}\|+\varepsilon hM\left(1+M\right)+\left\|x_{m(k)h}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon h\left(1+M\right)\psi\left(h\right)\leqslant$$
$$\leqslant\|x_{kh}-\gamma_{kh}\|+\varepsilon h\lambda\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)^2\cdot\left(2+\lambda_s\right)+$$
$$+\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\cdot\left(\|x_{kh}-\gamma_{kh}\|+\left\|x_{m(k)h}-\gamma_{m(k)h}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon h\left(1+M\right)\psi\left(h\right). \tag{19}$$

Введем обозначение

$$\sigma_k=\max_{0\leqslant j\leqslant kh}\|x_j-\gamma_j\|, \tag{20}$$

тогда соотношение (19) преобразуется к виду

$$\left\|x_{(k+1)h}-\gamma_{(k+1)h}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\right)\cdot\sigma_k+\varepsilon h\lambda\cdot\varepsilon hM\left(1+M\right)^2\cdot\left(2+\lambda_s\right)+\varepsilon h\left(1+M\right)\psi\left(h\right),$$

которое выполняется для любого $k\in\{0,1,...,N_k-1\}$, поэтому

$$\sigma_{N_k}\leqslant\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\right)\cdot\sigma_{N_k-1}+$$

$$+\varepsilon h\left(1+M\right)\cdot\left[\varepsilon h\cdot\lambda M\left(1+M\right)\cdot\left(2+\lambda_s\right)+\psi\left(h\right)\right]. \qquad (21)$$

Обозначим в неравенстве (21) следующие выражения:

$$a=\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\right),$$

$$b=\varepsilon h\left(1+M\right)\cdot\left[\varepsilon h\cdot\lambda M\left(1+M\right)\cdot\left(2+\lambda_s\right)+\psi\left(h\right)\right], \qquad (22)$$

тогда неравенство (21) примет вид

$$\sigma_{N_k}\leqslant a\cdot\sigma_{N_k-1}+b\leqslant$$

$$\leqslant a\cdot\left(a\cdot\sigma_{N_k-2}+b\right)+b=a^2\cdot\sigma_{N_k-2}+b\cdot\left(a+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant a^2\cdot\left(a\cdot\sigma_{N_k-3}+b\right)+b\cdot\left(a+1\right)=a^3\cdot\sigma_{N_k-3}+b\cdot\left(a^2+a+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant ...\leqslant a^{N_k}\cdot\sigma_0+b\cdot\left(a^{N_k-1}+...+a^2+a+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant a^{N_k}\cdot\sigma_0+b\cdot\frac{a^{N_k-1}-1}{a-1},$$

откуда, учитывая, что $\sigma_0=\ \|x_0-\gamma_0\|=0$, и в соответствии с введенными обозначениями (20) и (22), получим

$$\sigma_{N_k}\leqslant\varepsilon h\left(1+M\right)\cdot\left[\varepsilon h\cdot\lambda M\left(1+M\right)\cdot\left(2+\lambda_s\right)+\psi\left(h\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\right)^{N_k-1}-1}{\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\right)-1}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\varepsilon hM\left(1+M\right)\left(1+0.5\lambda_s\right)+\frac{\psi\left(h\right)}{2\lambda}\right]\cdot\left[\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\right)^{N_k-1}-1\right].$$

Последний множитель в полученном неравенстве содержит степень, в основании которой величина $2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\to 0$, а показатель степени $N_k=E\left(L/\varepsilon h\right)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, поэтому

$$\sigma_{N_k}\leqslant\left[\varepsilon hM\left(1+M\right)\left(1+0.5\lambda_s\right)+\frac{\psi\left(h\right)}{2\lambda}\right]\times$$

$$\times\left[\left[\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\right)^{\frac{1}{2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)}}\right]^{2\varepsilon h\lambda\left(1+M\right)\left(N_k-1\right)}-1\right]\sim$$

$$\sim\left[\varepsilon hM\left(1+M\right)\left(1+0.5\lambda_s\right)+\frac{\psi\left(h\right)}{2\lambda}\right]\left(e^{2\lambda L\left(1+M\right)}-1\right). \qquad (23)$$

Из неравенства (14) с учетом полученных оценок (15), (16), (23) для всех $i\in\left[kh,\left(k+1\right)h\right)$, $k\in I_k$ будет выполняться неравенство

$$\|x_{i+1}-\gamma_{i+1}\|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon hM\left(1+M\right)+\left[\varepsilon hM\left(1+M\right)\left(1+0.5\lambda_s\right)+\frac{\psi\left(h\right)}{2\lambda}\right]\left(e^{2\lambda L\left(1+M\right)}-1\right),$$

в котором, учитывая свойства (6) и поведение функции $\lim\limits_{h\to\infty}\psi(h)=0$, получим

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(2\varepsilon hM(1+M)+\left[\varepsilon hM(1+M)(1+0.5\lambda_s)+\frac{\psi(h)}{2\lambda}\right]\left(e^{2\lambda L(1+M)}-1\right)\right)=0,$$

откуда следует, что для произвольно выбранных $0<\eta<\rho$ и $L>0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta,L)>0$, что для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $i\in I=\{0,1,2,...,N\}$, $N=E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ выполняется неравенство

$$\|x_{i+1}-\gamma_{i+1}\|\leqslant\eta<\rho.$$

Полученная оценка $\|x_{i+1}-\gamma_{i+1}\|<\rho$ означает, что для любого допустимого управления $u=\{u_i\in U,i\in I\}$ и соответствующего решения $x=\{x_i,i\in I\}$ задачи (1) существует управление $v=\{v_k\in V,k\in I_k\}$, построенное по схеме (11), и соответствующее решение $\gamma=\{\gamma_i,i\in I\}$, $x_0=\gamma_0=x^0\in D'\subset D$ усредненной задачи (8), (10), которое находится в ρ-окрестности решения задачи (1) и не выходит на границу области D. Следовательно, построенное управление $v=\{v_k\in V,k\in I_k\}$ усредненной задачи является допустимым и справедлива оценка (13) теоремы. Первая часть теоремы доказана.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $v=\{v_k\in V,k\in I_k\}$ – допустимое управление усредненной задачи (8), а $\xi=\{\xi_k,k\in I_k\}$ – соответствующее ему решение, которое по условию теоремы вместе со своей ρ-окрестностью лежит в области D. Значения $\gamma=\{\gamma_i,i\in I\}$, построенные по формулам (10), при $i\in[kh,(k+1)h)$, $k\in I_k$ принадлежат отрезкам $\gamma_i\in[\xi_k;\xi_{k+1})$, поэтому вместе со своей ρ-окрестностью также лежат в области D. Пусть $u=\{u_i\in U,i\in I\}$ – управление задачи (1), построенное по схеме (12), а $x=\{x_i,i\in I\}$ – соответствующее ему решение, удовлетворяющее начальному условию $\gamma_0=x_0=x^0\in D'\subset D$.

Оценка разности для решений задачи (1) и усредненной задачи (8), (10), соответствующих указанным управлениям, проводится так же, как и в первой части доказательства. Полученный результат $\|x_{i+1}-\gamma_{i+1}\|<\rho$ для любого $i\in I=\{0,1,2,...,N\}$, $N=E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ означает, что решение $x=\{x_i,\ i\in I\}$ задачи (1) находится в ρ-окрестности решения $\gamma=\{\gamma_i,i\in I\}$ усредненной задачи (8), (10) и не выходит на границу области D ни для какого момента дискретного времени $i\in I$. Значит, построенное по схеме (12) управление $u=\{u_i\in U,\ i\in I\}$ является допустимым и справедлива оценка (13) теоремы.

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу оптимального управления, которая описывается системой дискретных уравнений (1) с переменным запаздыванием относительно состояния и управления и терминальным критерием качества

$$J(u)=\Phi(x_N)\to\min_{u\subset U}. \tag{24}$$

Определение 2. *Оптимальным управлением задачи (1), (24) назовем такое допустимое управление $u^*=\{u_i^*\in U,\ i\in I\}$, на котором критерий качества (24) принимает минимальное значение $J^*=J(u^*)$.*

Для задачи оптимального управления (1), (24) рассмотрим соответствующую усредненную задачу оптимального управления, которая на множестве значений

$k \in I_k = \{0, 1, 2, ..., N_k\}$ описывается системой дискретных уравнений с переменным запаздыванием (8), (10) и терминальным критерием качества

$$J_0(v) = \Phi(\gamma_N) \to \min_{v \subset V}. \tag{25}$$

Через $v^* = \{v_k^* \in V, k \in I_k\}$ обозначим оптимальное управление задачи (8), (10), (25), на котором критерий качества (25) принимает минимальное значение $J_0^* = J_0(v^*)$.

Установим соотношение между оптимальным решением задачи (1), (24) и оптимальным решением усредненной задачи (8), (10), (25).

Теорема 2. *Пусть в области $Q = \{ i \in I; x_i \in D; u_i \in U\}$ для задач оптимального управления (1), (24) и (8), (10), (25) выполнены условия теоремы 1, кроме того:*

6) $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda > 0$.

Тогда оптимальное решение усредненной задачи (8), (10), (25) является асимптотически оптимальным решением задачи (1), (24), то есть для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}, N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ справедливы оценки

$$|J^* - J_0^*| \leqslant \eta, \quad J(\bar{u}) - J^* \leqslant \eta, \tag{26}$$

где J^* и J_0^* – оптимальные значения критериев качества задачи (1), (24) и усредненной задачи (8), (10), (25) соответственно, $J(\bar{u})$ – значение критерия качества задачи (1), (24) на управлении $\bar{u} = \{\bar{u}_i \in U, i \in I\}$ из соотношения (12).

Доказательство. Из постановки задачи следует, что множество допустимых управлений U системы (1) является непустым компактным множеством, а множество соответствующих решений D системы (1) является замкнутым. При выполнении условия 1) теоремы следует, что множество D является ограниченным, а значит, компактным. Известно [2], что при выполнении условий 1), 2) теоремы для дискретной задачи вида (1), (24) всегда существует оптимальное управление $u^* = \{u_i^* \in U,\ i \in I\}$ и соответствующая ему оптимальная траектория $x^* = \{x_i^*,\ i \in I\}$ для любого начального состояния, при этом критерий качества (24) на оптимальном управлении принимает конечное значение $J^* = J(u^*) = \min\limits_{u \in U} J(u)$. Аналогично, для усредненной дискретной задачи (8), (10), (25) существует оптимальное управление $v^* = \{v_k^* \in V,\ k \in I_k\}$ и соответствующая оптимальная траектория $\xi^* = \{\xi_k^*, k \in I_k\}$, промежуточные значения $\gamma^* = \{\gamma_i^*, i \in I\}$, построенные по формулам (10), и конечное значение критерия качества $J_0^* = J_0(v^*) = \min\limits_{v \in V} J_0(v)$.

Выполнение условий теоремы для любого допустимого управления $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ задачи (1) означает, что условия теоремы выполняются и для оптимального управления $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$ с соответствующей траекторией $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$ задачи (1), (24).

Следовательно, для произвольно выбранных $\eta_0 > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ существует допустимое управление $\bar{v} = \{\bar{v}_k \in V, k \in I_k\}$, построенное по схеме (11), и соответствующее решение $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_i, i \in I\}$, $x_0^* = \bar{\gamma}_0 = x^0 \in D' \subset D$ усредненной задачи (8), (10), что будет справедлива оценка

$$\| x_i^* - \bar{\gamma}_i \| \leqslant \eta_0.$$

Неравенство выполняется для любого $i \in I$, значит, и для $i = N$, поэтому при выполнении условия 6) теоремы получим

$$\left| J^* - \bar{J}_0 \right| = | \, J\,(u^*) - J_0\,(\bar{v})| =$$

$$= | \, (x_N^*) - \, (\bar{\gamma}_N)| \leqslant \lambda \cdot \|x_N^* - \bar{\gamma}_N\| \leqslant \lambda\eta_0 = \eta. \tag{27}$$

Аналогично, для оптимального управления $v^* = \{v_k^* \in V, k \in I_k\}$ и соответствующей траектории $\xi^* = \{\xi_k^*, k \in I_k\}$ с промежуточными значениями $\gamma^* = \{\gamma_i^*, i \in I\}$ усредненной задачи (8), (25) существует допустимое управление $\bar{u} = \{\bar{u}_i \in U, i \in I\}$, построенное по схеме (12), и соответствующее решение $\bar{x} = \{\bar{x}_i, i \in I\}$, $\gamma_0^* = \bar{x}_0 = x^0 \in D' \subset D$ задачи (1), что будут справедливы оценки

$$\|\gamma_i^* - \bar{x}_i\| \leqslant \eta_0,$$

$$|J_0\,(v^*) - J\,(\bar{u})| = | \, (\gamma_N^*) - \, (\bar{x}_N) - | \leqslant \lambda \cdot \|\gamma_N^* - \bar{x}_N - \| \leqslant \lambda\eta_0 = \eta. \tag{28}$$

На оптимальном управлении критерий качества принимает минимальное значение, поэтому для любого другого допустимого управления справедливо

$$J\,(\bar{u}) \geqslant J\,(u^*)\,, \qquad J_0\,(\bar{v}) \geqslant J_0\,(v^*)\,. \tag{29}$$

Для оптимальных значений критериев качества задачи (1), (24) и усредненной задачи (8), (10), (25) может выполняться одно из двух неравенств

$$J\,(u^*) \geqslant J_0\,(v^*) \quad \text{или} \quad J\,(u^*) < J_0\,(v^*)\,.$$

В первом случае из (29), (28) следует

$$J\,(\bar{u}) \geqslant J\,(u^*) \geqslant J_0\,(v^*) \geqslant J\,(\bar{u}) - \eta,$$

откуда

$$|J\,(u^*) - J_0\,(v^*)| \leqslant \eta.$$

Во втором случае из (29), (27) следует

$$J_0\,(\bar{v}) \geqslant J_0\,(v^*) > J\,(u^*) \geqslant J_0\,(\bar{v}) - \eta,$$

откуда

$$|J_0\,(v^*) - J\,(u^*)| \leqslant \eta.$$

Следовательно, в обоих случаях справедливо первое неравенство в (26), из которого с учетом неравенства (28) следует второе неравенство в (26). Теорема доказана.

Заключение. Из доказанной теоремы 1 следует, что для любого допустимого управления исходной задачи, содержащей запаздывание по состоянию и управлению, можно построить допустимое управление усредненной задачи в медленном времени такое, что соответствующие траектории исходной и усредненной задач будут близки на асимптотически большом промежутке времени. Справедливо и обратное. Для любого допустимого управления усредненной задачи в медленном времени можно построить допустимое управление исходной задачи с учетом запаздывания по управлению, а соответствующие траектории будут близки.

Из доказанной теоремы 2 следует, что для оптимального управления усредненной задачи в медленном времени по приведенному алгоритму можно построить асимптотически оптимальное управление исходной задачи с учетом влияния переменного запаздывания на состояние и управление.

Интересными могут быть результаты практического применения метода усреднения для нахождения оптимального управления в системах дискретных уравнений с переменным запаздыванием.

1. **Бутковский А. Г.** О необходимых и достаточных условиях оптимальности для импульсных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1963. — Т. 24, № 8. — С. 1056–1064.
2. **Пропой А. И.** О принципе максимума для дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1965. — Т. 26, № 7. — С. 1177–1187.
3. **Афанасьев В. Н.** Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М.: Высш. шк., 1998. — 574 с.
4. **Белан Е. Л.** О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений // Украинский математический журнал. — 1967. — Т. 19, № 3. — С. 85–90.
5. **Мартынюк Д. И.** Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений / Мартынюк Д. И., Данилов В. И., Паньков В. Г. // Украинский математический журнал. — 1996. — Т. 48, № 4. — С. 464–475.
6. **Плотников В. А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления / Плотников В. А., Плотникова Л. И., Яровой А. Т. // Нелинейные колебания. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 241–254.
7. **Бойцова И. А.** Метод усреднения в системах дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными // Вестник ОНУ. Математика и механика. — 2008. — Т. 13, Вып. 18. — С. 7–22.
8. **Бойцова И. А.** Численно-асимптотический метод решения дискретных задач оптимального управления с быстрыми и медленными переменными // Вестник БГУ. Сер. I. — 2011. — № 1. — С. 105–110.
9. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием /Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л. // Научный вестник Ужгородского университета. Математика и информатика. — 2012. — Вып. 23, № 2. — С.76–85.
10. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение периодических управляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени. /Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л. // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. — 2012. — Т. 17, вып. 1–2. — С. 54–69.
11. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение дискретных уравнений с переменным запаздыванием в задачах управления / Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л. // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014: Труды. [Электр. ресурс] — М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. — С. 1304–1316.

Получена 20.12.2014