Mathematical Subject Classification: 34H15, 93C55, 93D15
UDC 517.929.4

Т. О. Романова, М. С. Таірова
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ЗВОРОТНИЙ МЕТОД ПРАКТИЧНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Романова Т. О., Таірова М. С. Зворотний метод практичної стабілізації дискретних лінійних систем. У статті розглянуто питання практичної стабілізації дискретних систем керування. Введено поняття множин потенційної слабкої стійкості для дискретних включень. Запропоновано зворотний метод стабілізації дискретних лінійних систем.
Ключові слова: дискретна система, практична стабілізація.

Романова Т. А., Таирова М. С. Обратный метод практической стабилизации дискретных линейных систем. В статье рассмотрен вопрос практической стабилизации дискретных систем управления. Вводится понятие множеств потенциальной слабой устойчивости для дискретных включений. Предложен обратный метод стабилизации дискретных линейных систем.
Ключевые слова: дискретная система, практическая стабилизация.

Romanova T. O., Tairova M. S. Reverse practical stabilization method for discrete linear systems. In the article the question of practical stabilization of discrete control systems is considered. The concept of potentially weakly stable sets for discrete inclusions is introduced. The reverse stabilization method for discrete linear systems is presented.
Key words: discrete systems, practical stabilization.

Вступ. Значна кількість процесів може бути описана за допомогою дискретних систем і включень. Вони використовуються для опису моделей популяцій [6], при побудові моделі бізнес-циклів та росту в економіці [7] та для опису біологічних, економічних, технічних та інших процесів.

Актуальним наразі є питання практичної стійкості дискретних систем і включень. Практична стійкість розглядає поведінку систем і включень на деякому фіксованому часовому інтервалі. Сильна практична стійкість пов'язана з питанням, чи задовольняють усі розв'язки з певними початковими умовами деяким обмеженням на фіксованому проміжку часу, тоді як слабка стійкість характеризує лише існування таких розв'язків для початкових умов. Практична стабілізація полягає у пошуку таких розв'язків у випадку систем і включень з керуваннями. Вищенаведені питання розглянуті, зокрема, в [3–5].

У даній статті розвинуто ідеї, викладені в цих джерелах, а саме розглянуто альтернативний, зворотний метод практичної стабілізації дискретних систем, а також зворотний метод побудови множини слабкої практичної стійкості дискретного включення.

В статті будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}^n$ – евклідовий n-вимірний простір; $\|\cdot\|$ – евклідова норма; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток, що породжує евклідову норму в $\mathbb{R}^n$; $conv\,(\mathbb{R}^n)$ – множина всіх непорожніх опуклих компактів з $\mathbb{R}^n$;

$intA$ – сукупність внутрішніх точок множини $A \subset \mathbb{R}^n$; ∂A – границя множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $c(A,\psi) = \sup\limits_{a \in A} \langle a, \psi \rangle$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ – опорна функція множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ – одинична сфера з $\mathbb{R}^n$; $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leqslant r\}$ – замкнена куля радіусу r з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$; $F+G = \{f+g : f \in F, g \in G\}$ – сума компактних множин F, G; $\lambda F = \{\lambda f : f \in F\}$ – добуток множини F і числа $\lambda \in \mathbb{R}$; $AF = \{Af : f \in F\}$ – образ множини F при лінійному перетворенні, що задане матрицею $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; cof – обопуклення функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Основні результати

1. Лінійне дискретне включення. Розглядатимемо лінійне дискретне включення:

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k), \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, A_k – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$ – множини керувань, $0 \in U(k)$, $k = 0, 1, ..., N-1$, $U = U(0) \times U(1) \times ... \times U(N-1)$; $\Phi(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$ – множини фазових обмежень, $k = 0, 1, ..., N$, $0 \in \Phi(0)$.

Означення 1. [3] *Розв'язком дискретного включення (1) називається така функція $x : \{0, 1, ..., N\} \to \mathbb{R}^n$, що точка $x(k+1)$ належить множині $A_k x(k) + U(k)$ для всіх $k = 0, 1, ..., N-1$.*

Розв'язок задачі Коші (1) з початковою умовою $x(0) = x_0$ позначається $x(k, x_0)$, $k = \overline{0, N}$. Далі під розв'язком $x(k, x_0)$ дискретного включення (1) будемо розуміти розв'язок відповідної задачі Коші.

Означення 2. [3] *Нульовий розв'язок дискретного включення (1) називається слабко $\{I_0, \Phi(k), 0, N\}$-стійким, якщо для будь-якого початкового значення $x_0 \in I_0$ і будь-якого розв'язка $x(k, x_0)$, $k = \overline{0, N}$ включення виконується $x(k, x_0) \in \Phi(k)$ для всіх $k = 0, 1, ..., N$.*

Означення 3. [4] *Максимальною множиною слабкої практичної стійкості I_* включення (1) є множина, що складається з усіх точок $x_0 \in \Phi(0)$ таких, що існує розв'язок $x(k, x_0)$, $k = \overline{0, N}$ включення, для якого виконується $x(k, x_0) \in \Phi(k)$ для всіх $k = 0, 1, ..., N$.*

Для будь-якого розв'язку $x(k, x_0)$, $k = \overline{0, N}$ включення (1) існує таке керування $u(k), k = \overline{0, N-1} \in U$, що для кожного моменту $k = 0, 1, ..., N-1$ виконується співвідношення

$$x(k+1, x_0) = A_k x(k, x_0) + u(k). \tag{2}$$

1.1. Властивості множини керованості лінійного дискретного включення.

Означення 4. *Множина $Y(i, I, M_I) \subseteq \mathbb{R}^n$, де $i \leqslant I$, $M_I \subseteq \mathbb{R}^n$, називається множиною керованості включення (1), якщо вона складається з точок $y \in \mathbb{R}^n$, для яких існує такий розв'язок $x(k, x_0)$, $k = \overline{0, N}$ включення, що $x(i, x_0) = y$ і $x(I, x_0) \in M_I$.*

Будемо розглядати такі множини керованості, що $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$, $I = i+1$, тобто керованість для послідовних моментів. Позначатимемо через $Y_i(M_{i+1})$ множини $Y(i, i+1, M_{i+1})$, де $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$.

Знайдемо формулу для множини керованості у випадку включення (1). Нехай x_{i+1} – довільна точка множини M_{i+1}. Підставимо x_{i+1} у (2):

$$x_{i+1} = A_i x_i + u_i, u_i \in U(i).$$

Звідси

$$x_i = A_i^{-1}(x_{i+1} - u_i), u_i \in U(i). \tag{3}$$

Застосування оберненої матриці A_i^{-1} є коректним, оскільки за постановкою включення (1) матриця A_i – невироджена.

Таким чином, для всіх точок $x_i \in Y_i(M_{i+1})$ виконується співвідношення (3). З означень суми множин, добутку множини та числа і образу множини при лінійному перетворенні випливає співвідношення

$$Y_i(M_{i+1}) = A_i^{-1} M_{i+1} + (-1)A_i^{-1}U(i). \tag{4}$$

Нехай $i \in \{0, ..., N-1\}$ – фіксований номер кроку, $M_{i+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ – множина значень на $(i+1)$-му кроці. Розглянемо деякі властивості множини керованості включення (1).

Лема 1. *Нехай множина M_{i+1} – опукла. Тоді множина керованості $Y_i(M_{i+1})$ включення (1) є також опуклою.*

Доведення. Нехай $y_1, y_2 \in Y_i(M_{i+1})$.
Тоді, за формулою (4), існують такі $u_1, u_2 \in U(i)$, і такі $x_1, x_2 \in M_{i+1}$, що

$$\begin{gathered} y_1 = A_i^{-1}x_1 + (-1)A_i^{-1}u_1, \\ y_2 = A_i^{-1}x_2 + (-1)A_i^{-1}u_2. \end{gathered}$$

Розглянемо опуклу комбінацію точок $y_1, y_2 : y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, \lambda \in [0,1]$. Для неї виконується:

$$\begin{gathered} y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \\ = \lambda A_i^{-1}x_1 + (-1)\lambda A_i^{-1}u_1 + (1-\lambda)A_i^{-1}x_2 + (-1)(1-\lambda)A_i^{-1}u_2 = \\ = A_i^{-1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + (-1)A_i^{-1}(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2). \end{gathered}$$

Оскільки множина $U(i)$ – опукла, існує таке управління $u \in U(i)$, що $u = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$. Аналогічно, існує $x \in M_{i+1}$, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Тоді

$$y = A_i^{-1}x + (-1)A_i^{-1}u.$$

З цього випливає, що $y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in Y_i(M_{i+1})$, де $\lambda \in [0,1]$ – довільне, $y_1, y_2 \in Y_i(M_{i+1})$ – довільні.

За означенням опуклої множини, $Y_i(M_{i+1})$ – опукла. Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай $0 \in M_{i+1}$. Тоді для множини керованості виконується $0 \in Y_i(M_{i+1})$.*

Доведення. Виберемо $u_i = 0 \in U(i)$ – з постановки (1).
Тоді, за формулою (5), $A_i^{-1} \cdot 0 + (-1)A_i^{-1} \cdot 0 = 0 \in Y_i(M_{i+1})$. Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай множина* M_{i+1} *– симетрична відносно* 0*. Тоді множина керованості* $Y_i(M_{i+1})$ *– також симетрична відносно* 0.

Доведення. Нехай $y \in Y_i(M_{i+1})$.
За формулою (5), існують такі $x \in M_{i+1}$, $u \in U(i)$, що $y = A_i^{-1}x + +(-1)A_i^{-1}u$.
Тоді $(-y) = -A_i^{-1}x + (-1)(-1)A_i^{-1}u = A_i^{-1}(-x) + (-1)A_i^{-1}(-u)$.
З симетричності M_{i+1}, $-x \in M_{i+1}$; з симетричності $U(i)$, $-u \in U(i)$.
Отже, $(-y) \in Y_i(M_{i+1})$. Лему 3 доведено.

1.2. Множини потенційної слабкої стійкості лінійного дискретного включення.

Означення 5. *Множиною потенційної слабкої практичної стійкості включення (1) для i-го кроку, де* $i \in \{0, ..., N-1\}$*, будемо називати множину, яка складається з усіх точок* y_i *таких, що* $y_i \in \Phi(i)$*, а також існує розв'язок* $x(k, y_i)$, $k = \overline{i, N}$ *включення вигляду*

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k), k = i, i+1, ..., N-1, \tag{5}$$

для якого виконується $x(k, y_i) \in \Phi(k)$ *для усіх* $k = i, i+1, ..., N$.

Будемо позначати таку множину $\tilde{Y}_i$.
Мають місце наступні твердження:

Теорема 1. *Нехай* $\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_{i+1}$ *– потенційно стійкі множини відповідно для i-го та* $(i+1)$*-го кроків включення (1),* $i \in \{0, ..., N-1\}$*. Тоді має місце співвідношення*

$$\tilde{Y}_i \subseteq \Phi(i) \cap Y_i(\tilde{Y}_{i+1}), \tag{6}$$

де $\Phi(i)$ *– множина фазових обмежень для кроку i,* Y_i *– множина керованості включення (1) на i-му кроці.*

Доведення. Необхідно довести, що для довільної точки $y_i \in \tilde{Y}_i$ виконуються твердження

$$y_i \in \Phi(i) \text{ і } y_i \in Y_i(\tilde{Y}_{i+1}). \tag{7}$$

Перша частина (7) випливає з означення множини $\tilde{Y}_i$.
Доведемо другу частину твердження.
За означенням множини $\tilde{Y}_i$, для $y_i \in \tilde{Y}_i$ існує розв'язок $x(k, y_i)$, $k = \overline{i, N}$ включення (5), для якого $x(k, y_i) \in \Phi(k)$ для усіх $k = i, i+1, ..., N$.
Нехай $y_{i+1} = x(i+1, y_i)$ – значення цього розв'язку на $(i+1)$-му кроці.
Розглянемо усі точки розв'язку $x(k, y_i)$, $k = \overline{i, N}$, крім $x(i, y_i)$, тобто підмножину вигляду

$$x(k, y_{i+1}) = x(k, y_i), k = \overline{i+1, N}.$$

Для цієї підмножини розв'язку будуть виконуватися співвідношення:
$x(k, y_{i+1}) \in \Phi(k)$ для усіх $k = i+1, ..., N$, а також

$$x(k+1, y_{i+1}) \in A_k x(k, y_{i+1}) + U(k), k = i+1, ..., N-1. \tag{8}$$

З цього випливає, що $x(k, y_{i+1}), k = \overline{i+1, N}$ – слабко стійкий розв'язок включення

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k), k = i+1, ..., N-1. \tag{9}$$

З включення (9) та означення 5 випливає, що $y_{i+1} \in \tilde{Y}_{i+1}$.

Оскільки $y_i = x(i, y_i)$, а $y_{i+1} = x(i+1, y_i)$, y_i і y_{i+1} належать до одного розв'язку включення (5). З даного факту, а також означення 4, отримаємо, що $y_i \in Y_i(\{y_{i+1}\})$.

Оскільки $y_{i+1} \in \tilde{Y}_{i+1}$, маємо $y_i \in Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$.

Таким чином, другу частину твердження (7) доведено, а в силу довільності точки $y_i \in \tilde{Y}_i$ — отримано справедливість (6). Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_{i+1}$ – потенційно стійкі множини відповідно для i-го і $(i+1)$-го кроків включення (1), $i \in \{0, ..., N-1\}$. Тоді виконується*

$$\tilde{Y}_i \supseteq \Phi(i) \cap Y_i(\tilde{Y}_{i+1}), \tag{10}$$

де $\Phi(i)$ – множина фазових обмежень для кроку i, Y_i – множина керованості включення (1) на i-му кроці.

Доведення. Розглянемо довільну точку $y_i \in \Phi(i) \cap Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$. Маємо:

$$y_i \in \Phi(i); \tag{11}$$

$y_i \in Y_i(\tilde{Y}_{i+1}),$ тому

$$\exists\, y_{i+1} \in \tilde{Y}_{i+1} : y_{i+1} \in A_i y_i + U(i); \tag{12}$$

$y_{i+1} \in \tilde{Y}_{i+1}$, тому $\exists\, x(k, y_{i+1}), k = \overline{i+1, N}$ – розв'язок включення (9), тобто виконується:

$$x(k+1, y_{i+1}) \in A_k x(k, y_{i+1}) + U(k), k = i+1, ..., N-1, \tag{13}$$

а також

$$x(k, y_{i+1}) \in \Phi(k), k = i+1, ..., N. \tag{14}$$

Об'єднавши твердження (11)–(14), отримаємо, що для розв'язку

$$x(k, y_i) = \begin{cases} y_i, & k = i, \\ x(k, y_{i+1}), & k = i+1, ..., N \end{cases}$$

виконуються всі умови означення слабко стійкого розв'язку включення (5), а значить, $y_i \in \tilde{Y}_i$. Враховуючи довільність y_i, теорему доведено.

З теорем 1 і 2 випливає рівність

$$\tilde{Y}_k = \Phi(k) \cap Y_k(\tilde{Y}_{k+1}),$$

де $k \in \{0, 1, ..., N-1\}$.

Знайдемо вигляд множини $\tilde{Y}_N$. З означення множини $\tilde{Y}_i$, для останнього, N-го кроку множина $\tilde{Y}_N$ буде співпадати з фазовою множиною $\Phi(N)$.

Об'єднавши отримані результати, можливо записати рекурентну формулу для множин потенційної слабкої стійкості дискретного включення (1):

$$\tilde{Y}_k = \begin{cases} \Phi(N), & k = N, \\ \Phi(k) \cap Y_k(\tilde{Y}_{k+1}), & k = 0, ..., N-1. \end{cases} \tag{15}$$

1.3. Властивості множини потенційної слабкої стійкості лінійного дискретного включення.

Лема 4. *Множина потенційної слабкої стійкості $\tilde{Y}_i$ на кроці $i \in \{0, ..., N\}$ – опукла.*

Доведення. Скористаємося методом індукції.

Якщо $i = N$, маємо: $\tilde{Y}_i = Y_N = \Phi(N)$, $\Phi(N)$ – опукла за умовами (1).

Нехай $i \in \{0, ..., N-1\}$, $\tilde{Y}_{i+1}$ – опукла.

Тоді $\tilde{Y}_i = \Phi(i) \cap Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$.

$\Phi(i)$ опукла за постановкою задачі (1), $Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$ – опукла з властивості множини керованості (лема 1). Тоді $\tilde{Y}_i$ – опукла як перетин двох опуклих множин. Лему доведено.

Лема 5. *Для потенційно слабко стійкої множини $\tilde{Y}_i$, де $i \in \{0, ..., N\}$, виконується $0 \in \tilde{Y}_i$.*

Доведення. Застосуємо метод індукції.

Якщо $i = N$, маємо: $\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_N = \Phi(N)$. $0 \in \Phi(N)$ за умовами (1). Звідси $0 \in \tilde{Y}_i$.

Тепер, нехай $i \in \{0, ..., N-1\}$ і $0 \in \tilde{Y}_{i+1}$. За формулою (16), $0 \in \tilde{Y}_i$ тоді і тільки тоді, коли $0 \in \Phi(i)$ і $0 \in Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$. Оскільки $0 \in \Phi(i)$ за постановкою задачі (1), а $0 \in Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$ за властивістю множини керованості (лемою 2), $0 \in \tilde{Y}_i$. Лему доведено.

Лема 6. *Нехай $\Phi(k), k = 0, ..., N$ та $U(k), k = 0, ..., N-1$ – симетричні відносно* 0.

Тоді потенційно слабко стійкі множини $\tilde{Y}_i, i = 0, ..., N$ – симетричні відносно 0.

Доведення. Проведемо доведення за індукцією.

Якщо $i = N$, маємо: $\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_N = \Phi(N)$. $\Phi(N)$ – симетрична відносно 0 за умовами леми. Тому $\tilde{Y}_N$ – також симетрична відносно 0.

Тепер, нехай $i \in \{0, ..., N-1\}$ і $\tilde{Y}_{i+1}$ – симетрична відносно 0. З формули (15), $y \in \tilde{Y}_i$ тоді і тільки тоді, коли $y \in \Phi(i)$ і $y \in Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$. За умовами леми, $\Phi(i)$ – симетрична відносно 0, тому $(-y) \in \Phi(i)$. Крім того, за властивістю множини керованості (лема 3), $Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$ – також симетрична відносно 0, отже, $(-y) \in Y_i(\tilde{Y}_{i+1})$. З цього випливає, що $(-y) \in \Phi(i) \cap Y_i(\tilde{Y}_{i+1}) = \tilde{Y}_i$.

Лему доведено.

Лема 7. *Опорна функція множини $\tilde{Y}_i$ виражається рекурентною формулою*

$$c(\tilde{Y}_i, \psi) = \begin{cases} c(\Phi(N), \psi), & i = N, \\ co\big(min\{c(\Phi(i), \psi), c(Y_i(\tilde{Y}_{i+1}), \psi)\}\big) & i = 0, ..., N-1, \end{cases} \tag{16}$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Це твердження випливає з формули (15) та вигляду опорної функції перетину множин.

Лема 8. *Множина початкових умов слабкої практичної стійкості I_* співпадає з множиною $\tilde{Y}_0$ потенційної слабкої стійкості для 0-го кроку, тобто*

$$I_* = \tilde{Y}_0. \tag{17}$$

Доведення. Випливає з означень множин I_* і $\tilde{Y}_0$.

2. Зворотний алгоритм практичної стабілізації лінійних дискретних систем керування.

Розглянемо лінійну дискретну систему керування:

$$x(k+1) = A_k x(k) + u(k), k = 0, ..., N-1, \tag{18}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, A_k – невироджена матриця розмірності $n \times n$, керування $u(k) \in U(k)$, $U(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$ – множини керувань, $0 \in U(k)$, $k = 0, 1, ..., N-1$, $U = U(0)\times$ $\times U(1) \times ... \times U(N-1)$; $\Phi(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$ – множини фазових обмежень, $0 \in int(\Phi(k))$, $k = 0, 1, ..., N$.

Означення 6. [5] *Розв'язком дискретної системи керування (18) називається така функція $x : \{0, 1, ..., N\} \to \mathbb{R}^n$, що для кожної пари точок $x(k)$, $x(k+1)$, $k = 0, ..., N-1$ виконується $x(k+1) = A_k x(k) + u(k)$.*

Означення 7. [5] *Керування $u \in U$ називається таким, що практично (слабко) стабілізує систему (18) з точки $x_0 \in \Phi(0)$ в фазових обмеженнях $\Phi(k)$, $k = 0, ..., N$, якщо існує розв'язок системи $x(k, x_0, u), k = \overline{0, N}$, такий, що $x(k, x_0, u) \in \Phi(k)$ для всіх $k = 0, ..., N$.*

Означення 8. [5] *Система (18) називається слабко стабілізованою з точки x_0 в фазових обмеженнях $\Phi(k)$, $k = 0, ..., N$, якщо для точки x_0 існує стабілізуюче керування в цих обмеженнях.*

Згідно з [5], множина усіх початкових точок x_0, для яких система (18) є стабілізованою, співпадає з множиною I_* слабкої практичної стійкості включення (1).

Означення 9. *Задача слабкої стабілізації системи (18) з початкової точки $x_0 \in I_*$ полягає в пошуку такого керування $u \in U$, що практично стабілізує систему.*

2.1. Ідея алгоритму.

Будемо знаходити керування послідовно, тобто в порядку $u(0), u(1), ..., u(N-1)$.

Зафіксуємо деяку точку $x_0 \in I_* = \tilde{Y}_0$. Знайдемо для неї вектор керування $u(0)$, такий, що існує розв'язок $\tilde{x} = \tilde{x}(k), k = \overline{0, N}$ системи (18) (і, відповідно, включення (1)), що цілком лежить у фазових обмеженнях, і виконується: $\tilde{x}(0) = x_0$ і $\tilde{x}(1) = A_0 x_0 + u(0)$. Такий розв'язок існує з означення множини I_*, тому для точки $x_1 = \tilde{x}(1)$ мають виконуватися всі умови її належності до множини $\tilde{Y}_1$. Це значить, що $x_1 \in \tilde{Y}_1$. Отже, на 0-му кроці необхідно знайти таке керування $u(0)$, що переведе систему у точку $x(1) \in \tilde{Y}_1$. При знайденому конкретному значенні $u(0)$ отримаємо конкретне значення $x(1) = x_1$.

Тепер, аналогічно, будемо шукати таке $u(1)$, щоб $x_2 = A_1 x_1 + u(1)$ належала $\tilde{Y}_2$, тощо. З властивостей множини потенційної слабкої стійкості $\tilde{Y}_i$ випливає, що такі керування гарантовано існують.

Отже, схему пошуку керування можна описати таким чином:

для $k = 0, 1, ..., N-1$:

$u(k) : x(k+1) = A_k x_k + u(k) \in \tilde{Y}_{k+1}$;

$x_{k+1} = A_k x_k + u(k)$.

Отже, для фіксованого номера кроку $i \in \{0, ..., N-1\}$, а також стану системи на цьому кроці $x_i \in \tilde{Y}_i$ необхідно знайти вектор $u_i \in U(i)$, такий, що

$$x_{i+1} = A_i x_i + u_i \in \tilde{Y}_{i+1}.$$

За властивістю опорної функції [1], $x_{i+1} \in \tilde{Y}_{i+1}$ тоді, коли

$$\langle x_{i+1}, \psi \rangle \leqslant c(\tilde{Y}_{i+1}, \psi) \ \ \forall \psi \in S,$$

тобто

$$\langle A_i x_i + u_i, \psi \rangle \leqslant c(\tilde{Y}_{i+1}, \psi) \ \ \forall \psi \in S. \tag{19}$$

Будемо шукати вектори керування $u(i)$ у вигляді

$$u(i) = P_i \xi_i, \tag{20}$$

де $P_i \in \mathbb{R}, P_i \geqslant 0$ – число, а $\xi_i \in S$ – вектор одиничної сфери, $i = 0, ..., N-1$.

Оскільки $u(i) = P_i \xi_i$ має належати $U(i)$, необхідно накласти на P_i додаткове обмеження:

$$\begin{gathered} P_i \in [0, P_{max}(i, \xi_i)], \\ P_{max}(i, \xi_i) = d_*(U(i), \xi_i), \end{gathered} \tag{21}$$

де $d_*(U(i), \xi_i)$ — значення функції деформації множини $U(i)$ у напрямку вектору ξ_i.

Тоді з (19), (20) має виконуватися співвідношення

$$\langle A_i x_i + P_i \xi_i, \psi \rangle \leqslant c(\tilde{Y}_{i+1}, \psi) \ \ \forall \psi \in S.$$

Застосуємо деякі елементарні перетворення:

$$c(\tilde{Y}_{i+1}, \psi) - \langle A_i x_i, \psi \rangle - \langle P_i \xi_i, \psi \rangle \geqslant 0 \ \ \forall \psi \in S;$$

$$\min_{\psi \in S} \Big(c(\tilde{Y}_{i+1}, \psi) - \langle A_i x_i, \psi \rangle - \langle P_i \xi_i, \psi \rangle \Big) \geqslant 0. \tag{22}$$

Оскільки стабілізуюче керування $u(i) = P_i \xi_i$ гарантовано існує, то (22) буде виконуватись для деякої пари $\langle P, \xi \rangle$, а значить,

$$\max_{\xi \in S} \max_{P \in [0, P_{max}(i,\xi)]} \min_{\psi \in S} \Big(c(\tilde{Y}_{i+1}, \psi) - \langle A_i x_i, \psi \rangle - \langle P \xi, \psi \rangle \Big) \geqslant 0. \tag{23}$$

З нерівності (23) отримаємо, що стабілізуюче керування $u(k), k = \overline{0, N-1}$ можливо знайти за наступними формулами:

для $k = 0, ..., N-1$

$$u(k) = P_k \xi_k, \tag{24}$$

де

$$\xi_k = \underset{\xi \in S}{argmax} \max_{P \in [0, P_{max}(i,\xi)]} F_k(P, \xi); \tag{25}$$

$$P_k = \underset{P \in [0, P_{max}(i,\xi_k)]}{argmax} F_k(P, \xi_k); \tag{26}$$

$$x(k+1) = A_k x(k) + u(k). \tag{27}$$

При цьому

$$F_k(P,\xi) = \min_{\psi\in S}\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle P\xi,\psi 1\rangle\big); \tag{28}$$

$$P_{max}(k,\xi) = d_*(U(k),\xi), \tag{29}$$

де $d_*(U(k),\xi)$ – значення функції деформації множини $U(k)$ у напрямку вектору ξ, а S – одинична сфера.

Було доведено, що за умови належності початкової точки x_0 множині I_* для керування $u(k)$, що задовольняє умовам (24)–(29), виконується

$$F_k(P_k,\xi_k) = \min_{\psi\in S}\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle P_k\xi_k,\psi\rangle\big) \geqslant 0, \tag{30}$$

тобто отримане керування існує, є допустимим та стабілізуючим.

2.2. Зменшення обчислювальної складності.

Для оптимізації пошуку стабілізуючого керування доведемо наступне твердження:

Лема 9. *Нехай $\xi\in S$ – фіксований вектор.*

Тоді функція $F_k(P,\xi)$, що задається формулою (28), є опуклою вгору відносно змінної $P\in\mathbb{R}$ на сегменті $[0,P_{max}(k,\xi)]$.

Доведення. З означення опуклої вгору функції, опуклість $\xi\in S$ еквівалентна наступному твердженню: нехай $p_1,p_2\in[0,P_{max}(k,\xi)], \lambda\in[0,1]$. Тоді

$$\lambda F_k(p_1,\xi) + (1-\lambda)F_k(p_2,\xi) \leqslant F_k(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\xi). \tag{31}$$

Доведемо (31). Якщо підставити (28) у (31), отримаємо

$$\begin{gathered}\lambda\min_{\psi\in S}\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle p_1\xi,\psi\rangle\big)+\\ +(1-\lambda)\min_{\psi\in S}\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle p_2\xi,\psi\rangle\big) \leqslant\\ \leqslant \min_{\psi\in S}\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)\xi,\psi\rangle\big).\end{gathered} \tag{32}$$

Позначимо

$$\begin{gathered}F_1 = c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle p_1\xi,\psi\rangle;\\ F_2 = c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle p_2\xi,\psi\rangle;\\ F_{12} = c(\tilde{Y}_{k+1},\psi) - \langle A_k x(k),\psi\rangle - \langle(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)\xi,\psi\rangle.\end{gathered}$$

Нехай $\psi_1 = \underset{\psi\in S}{argmin}\, F_1$; $\psi_2 = \underset{\psi\in S}{argmin}\, F_2$; $\psi_{12} = \underset{\psi\in S}{argmin}\, F_{12}$. Тоді запишемо (32) у вигляді

$$\lambda\min_{\psi\in S} F_1 + (1-\lambda)\min_{\psi\in S} F_2 - \min_{\psi\in S} F_{12} \leqslant 0.$$

Доведемо цю нерівність. Дійсно,

$$\begin{gathered}\lambda\min_{\psi\in S} F_1 + (1-\lambda)\min_{\psi\in S} F_2 - \min_{\psi\in S} F_{12} =\\ = \lambda\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_1) - \langle A_k x(k),\psi_1\rangle - \langle p_1\xi,\psi_1\rangle\big)+\\ +(1-\lambda)\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_2) - \langle A_k x(k),\psi_2\rangle - \langle p_2\xi,\psi_2\rangle\big)-\\ -c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_{12}) + \langle A_k x(k),\psi_{12}\rangle + \lambda p_1\langle\xi,\psi_{12}\rangle + (1-\lambda)p_2\langle\xi,\psi_{12}\rangle.\end{gathered} \tag{33}$$

Помітимо, що

$$-c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_{12})+\langle A_k x(k),\psi_{12}\rangle=\big(-\lambda-(1-\lambda)\big)\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_{12})-\langle A_k x(k),\psi_{12}\rangle\big).$$

Тоді права частина (33) прийме вигляд

$$\begin{gathered}\lambda\Big(\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_1)-\langle A_k x(k),\psi_1\rangle-\langle p_1\xi,\psi_1\rangle\big)-\\ -\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_{12})-\langle A_k x(k),\psi_{12}\rangle-\langle p_1\xi,\psi_{12}\rangle\big)\Big)+\\ +(1-\lambda)\Big(\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_2)-\langle A_k x(k),\psi_2\rangle-\langle p_2\xi,\psi_2\rangle\big)-\\ -\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_{12})-\langle A_k x(k),\psi_{12}\rangle-\langle p_2\xi,\psi_{12}\rangle\big)\Big)=\\ =\lambda\big(\min_{\psi\in S}F_1-F_1(\psi_{12})\big)+(1-\lambda)\big(\min_{\psi\in S}F_2-F_2(\psi_{12})\big)\leqslant 0.\end{gathered}$$

Таким чином, нерівність (31) доведена, а з неї випливає і твердження леми. Лему доведено.

За властивістю опуклих функцій [2], будь-який локальний максимум опуклої угору функції є глобальним. Це значить, що для максимізації функції $F_k(P,\xi)$ за змінною P можливо застосовувати стандартні обчислювальні методи (нульового порядку, оскільки F_k не є диференційованою).

Враховуючи отримані результати, сформулюємо алгоритм стабілізації.

Алгоритм 1: Алгоритм стабілізації лінійних систем керування (двовимірний випадок)

Дано: $x(0)=x_0\in I_*$.

Для $k=0,...,N-1$ **:**

1. Задати розбиття $\hat{S}=\{\xi_i\}_{i=0}^{m-1}=\big\{\big(cos(\frac{2\pi i}{m}),sin(\frac{2\pi i}{m})\big)\big\}_{i=0}^{m-1}$.
2. Задати значення мінімальної знайденої довжини керування $P_{min}=INF$ і відповідного їй вектору $\xi_{min}=(1,0)$.
3. **Для кожного** $\xi_i\in\hat{S}, i=0,...,m-1$ **:**
   - 3.1. Знайти значення $P_{max}(k,\xi_i)=d_*(U(k),\xi_i)$.
   - 3.2. Методом максимізації нульового порядку знайти $P^*=\underset{P\in[0,P_{max}(k,\xi_i)]}{argmax}F_k(P,\xi_i)$,

     де $F_k(P,\xi)=\min\limits_{\psi_j\in\hat{S}}\big(c(\tilde{Y}_{k+1},\psi_j)-\langle A_k x(k),\psi_j\rangle-\langle P\xi,\psi_j\rangle\big)$,

     $$c(\tilde{Y}_i,\psi)=\begin{cases}c(\Phi(N),\psi), & i=N,\\ co\big(min\{c(\Phi(i),\psi),c(A_i^{-1}\tilde{Y}_{i+1}+(-1)A_i^{-1}U(i),\psi)\}\big) & \text{інакше.}\end{cases}$$
   - 3.3. **Якщо** $F_k(P^*,\xi_i)<0$ **,**
     перейти до наступної ітерації 3.
   - 3.4. **Якщо** $P_{min}>P^*$ **,**
     $P_{min}=P^*,\xi_{min}=\xi_i$.
4. **Якщо** $P_{min}=INF$ **,**
   повернути: *«відповідь не знайдено»*.

   інакше

   $u(k)=P_{min}\xi_{min}$,

   $x(k+1)=A_k x(k)+u(k)$.

Повернути $u(k),k=\overline{0,N-1}$; $x(k),k=\overline{0,N}$.

Приклад. *Розглянемо систему вигляду (18), де* $n = 2, N = 6$,

$$A_k = \begin{pmatrix} \ln(k) & 0.1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k = 1, 3, 5; \quad U(k) = S_1(0), 0 \leqslant k \leqslant 6;$$
$$A_k = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k = 0, 2, 4; \quad \Phi(k) = S_{50}(0), 0 \leqslant k \leqslant 7.$$

Знайдемо стабілізуюче керування для точки $x_0 = (0, 6)^T$.

За допомогою алгоритму знайдено наступні вектори керування u та траєкторію x (рядки відповідають значенням векторів на кроках номер $0..N-1$ та $0..N$ відповідно):

$$u = \begin{pmatrix} -0.9779 & 0.2086 \\ 0.8996 & -0.4366 \\ 0.9994 & 0.0315 \\ 0.7344 & 0.6787 \\ -0.9991 & -0.0420 \\ -0.8544 & -0.5195 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 6.0000 \\ 11.0221 & -8.7914 \\ 0.0205 & 10.5855 \\ -7.7736 & -15.8263 \\ -9.3884 & -7.0949 \\ 22.4865 & 1.2120 \\ 35.4574 & 21.966 \end{pmatrix}.$$

Траєкторію та її співвідношення з множинами фазових обмежень $\Phi(k)$ та потеційної слабкої стійкості $\tilde{Y}_k$ зображено на рис. 1:

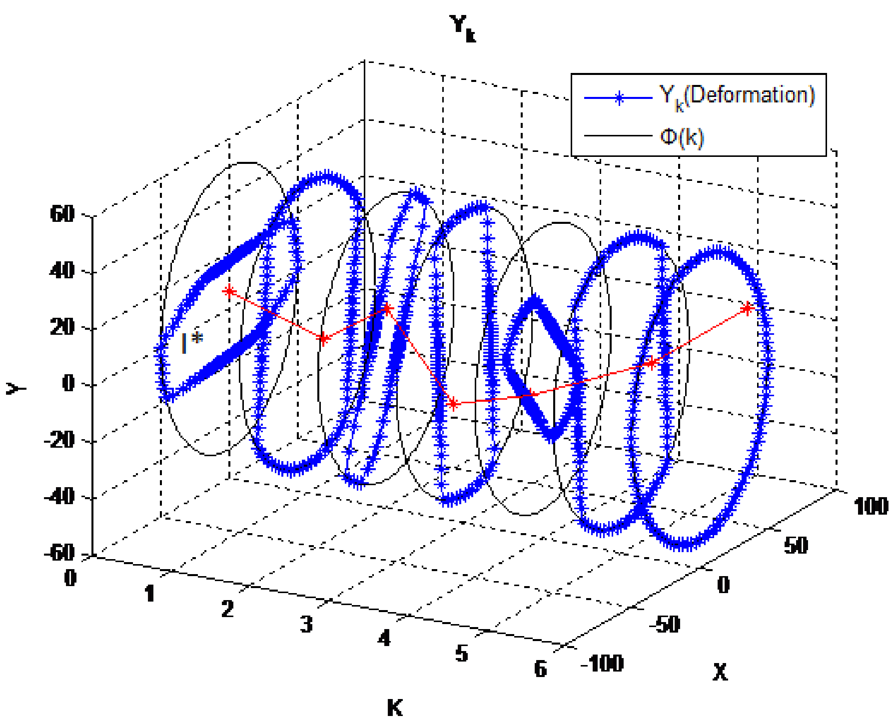

Рис. 1: Апроксимації множин $\Phi(k)$ та $\tilde{Y}_k$, а також траєкторія $x(k)$

З рисунку можна переконатися, що точка $x_0 = (0,6)^T$ є близькою до границі множини слабкої практичної стійкості I_*, оскільки відповідна стабілізована траєкторія $x(k)$ на кроці $k = 6$ є близькою до границі фазової множини $\Phi(k)$.

Висновки. Таким чином, в статті було запропоновано новий метод стабілізації дискретних багатозначних систем (лінійних систем керування). Ці результати можливо поширити на питання практичної стабілізації дискретних включень. Також можливо використати ці результати при вивченні дискретних нелінійних систем та включень.

1. **Арсирий А. В.** Многозначный анализ и линейные задачи управления / Арсирий А. В., Кичмаренко О. Д., Скрипник Н. В. – Одесса, «Астропринт», 2008.
2. **Горячев Л. В.** Выпуклые функции и их свойства / Горячев Л. В. – Дальневосточный государственный университет, 1996.
3. **Пічкур В. В.** Апроксимація максимальної множини початкових умов в задачі практичної стійкості систем з багатозначною правою частиною / Пічкур В. В., Сасонкіна М. С. – Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1–2(13–14). – С. 121–128.
4. **Пичкур В. В.** Оптимальные множества начальных условий в задаче практической устойчивости дискретных включений / Пічкур В. В., Сасонкіна М. С. // «Mathematical analisis, differential equations and their applications» (september 15–20, 2010). – Sunny Beach, Bulgaria. – 2011. – С.291–300.
5. **Pichkur V. V.** Practical stabilization of discrete control systems / Pichkur V. V., Sasonkina M. S. // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 81, No. 6ю – pp. 877–884.
6. **Ravi P. Agarwal.** Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. Second Edition, revised and expanded / Ravi P. Agarwal. – Singapore: National university of Singapore, 1968. – P. 988.
7. **Zhang W. B.** Discrete dynamical systems, bifurcations and chaos in economics / Zhang W. B. – Elsevier, 2006. – P. 459.

Надійшла 15.11.2014