Mathematical Subject Classification: 15A15, 15A99
УДК 512.643

А. Д. Хамитова
Одесский национальный политехнический университет

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ПОЛИНОМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ МАТРИЦ ФРОБЕНИУСА

Хамітова А. Д. Про характеристичний поліном добутка матриць Фробеніуса. Отримана формула для обчислення характеристичних поліномів добутка матриць Фробеніуса. Показана можливість застосування цієї формули в задачах управління нелінійними дискретними системами.
Ключові слова: характеристичний поліном, матриця Фробеніуса.

Хамитова А. Д. О характеристическом полиноме произведений матриц Фробениуса. Получена формула для вычисления характеристического полинома произведений матриц Фробениуса. Показана возможность использования этой формулы в задачах управления нелинейными дискретными системами.
Ключевые слова: характеристический полином, матрица Фробениуса.

Khamitova A. D. About the characteristic polynomial of product Frobenius' matrix. The formula for calculating characteristic polynomials of product Frobenius' matrix was obtained. The opportunity of using this formula by the tasks of control of nonlinear discret systems was shown.
Key words: characteristic polynomial, Frobenius' matrix.

Введение. Один из методов стабилизации периодических орбит дискретных динамических систем связан с построением запаздывающей обратной связи (DFC–delayed feedback control). Возможная схема такого управления использует разность между текущим и предшествующим за период состояниями и была предложена К. Пирагасом [6]. Одно из преимуществ этой схемы состоит в исчезновении управления на периодических орбитах. DFC–механизм имеет множество разнообразных приложений, начиная от модулирования лазерных индексов и заканчивая подавлением патологических ритмов высшей нервной системы человека [2, 7].

В работе [3] была рассмотрена одномерная дискретная система

$$z(n+1) = f(z(n)) + u(n)\ ,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$ и $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, а $\mathcal{A}$ — замкнутое подмножество $\mathbb{C}$.

Пусть f имеет T-периодическую орбиту $\Sigma_T = \{\eta_1, \dots, \eta_T\}$, где все η_j различны и $\eta_{j+1} = f(\eta_{j \mod T})$. При этом DFC–управление задано формулой

$$u(n) = (a_1 - 1)f(z(n)) + a_2 f(z(n-T)) + \cdots + a_N f(z(n-(N-1)T))\ ,$$

причем $a_1 + \cdots + a_N = 1$. Фактически мы усредняем правую часть, используя предысторию состояний.

© Хамитова А. Д., 2015

Для исследования локальной устойчивости цикла Σ_T в [3] рассматривалась итерация порядка T отображения G

$$G(\xi_1, \dots, \xi_{T(N-1)+1}) = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{T(N-1)+1},$$

$$a_1 f(\xi_{T(N-1)+1}) + a_2 f(\xi_{T(N-2)+1}) + \dots + a_N f(\xi_1)).$$

Если обозначить эту Т-итерацию через $F = G^T$, то локальная устойчивость цикла определяется собственными значениями матрицы Якоби отображения F в точке $(\eta_1, \dots, \eta_{T(N-1)+1})$, где $\eta_1, \dots, \eta_T$ определяют цикл, а $\eta_j = \eta_{j \mod T}$. Заметим, что корни характеристического полинома независимы от циклической перестановки точек цикла.

Далее, в [3] было показано, что якобиан отображения F имеет удивительно простую форму

$$p(\lambda) = \lambda^{(N-1)T+1} - \mu(q(\lambda))^T, \tag{1}$$

где $\mu = \mu_1 \cdots \mu_T$ и $\mu_j = f'(\eta_j)$. Кроме того,

$$q(\lambda) = a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1}\lambda + a_N \ .$$

Вывод этой формулы, по существу, основан на выводе характеристического уравнения произведений матриц Фробениуса $A_T \cdots A_1$ размера $(N-1)T + 1 \times$ $\times (N-1)T + 1$, где

$$A_{T-j+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ a_N\mu_j & 0 & ... & a_1\mu_j \end{pmatrix}, \ j = 1, \dots, T.$$

Основные результаты

1. Постановка задачи. Удивительная форма характеристического полинома (1) обусловлена разреженностью матриц Фробениуса, входящих в произведение, определяющее матрицу Якоби.

Возникает естественный вопрос — в каких еще случаях произведение матриц Фробениуса имеет характеристический полином относительно простого вида. Чтобы ответить на этот вопрос, предварительно рассмотрим задачу, приводящую к вычислению характеристического полинома произведения матриц Фробеиуса произвольного вида. Отметим, что вопрос о свойствах произведения матриц Фробениуса является актуальным и изучался, например, в [1, 4, 5].

Итак, рассмотрим динамическую систему с запаздыванием

$$z(n+1) = g(z(n), ..., z(n-m)) \ , \tag{2}$$

где $m \geq 1$ это глубина запаздывания, а $g : \mathcal{A} \times ... \times \mathcal{A} \to A$, где $(\mathcal{A} \times ... \times \mathcal{A}) \in \mathbb{C}^{m+1}$. Предположим, что уравнение (2) имеет Т-периодическое решение $\Sigma_T = \{\eta_1, \dots, \eta_T\}$, где все η_j различны и $\eta_{j+1} = f(\eta_{j \mod T})$.

Теперь, аналогично (1), рассматриваем отображение

$$G(\xi_1, \dots, \xi_{m+1}) = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{m+1}, g(\xi_{m+1}, ..., \xi_1))$$

и Т-кратную итерацию G с самим собой $F = G^T$.

Матрица Якоби отображения F высчитывается по правилу дифференцирования сложной функции и равна $A_T \cdots A_1$, где $A_j = G'(y_j)$ и
$y_j = (\eta_{j \mod T}, \eta_{j+1 \mod T}, ..., \eta_{j+T \mod T})$. Если обозначить $\frac{\partial g}{\partial \xi_k}(y_j) = a^{(j)}_{m+2-k}$, $j = 1, ..., T; k = 1, ..., m+1$, то матрица $G'(y_j)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ a^{(j)}_{m+1} & a^{(j)}_{m} & a^{(j)}_{m-1} & ... & a^{(j)}_{1} \end{pmatrix}$$

Требуется найти характеристический полином матрицы Якоби $\det(\lambda E - A_T \cdots A_1)$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

обозначает единичную матрицу.

2. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть для* $j = 1, ..., T$

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ a^{(j)}_{m+1} & a^{(j)}_{m} & a^{(j)}_{m-1} & ... & a^{(j)}_{1} \end{pmatrix}$$

матрица Фробениуса размерности $(m+1) \times (m+1)$. *И пусть*

$$f_j(\lambda) = \lambda^{m+1} - a^{(j)}_1 \lambda^m - ... - a^{(j)}_{m+1}$$

характеристические полиномы матриц A_j.

Тогда характеристический полином произведения матриц Фробениуса можно найти по формуле

$$\det(\lambda E - A_T \cdots A_1) = (-1)^{(T-1)(m-1)} \det Q, \tag{3}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} p^{(1)}_1(\lambda) & p^{(1)}_2(\lambda) & ... & p^{(1)}_T(\lambda) \\ \lambda p^{(2)}_T(\lambda) & p^{(2)}_1(\lambda) & ... & p^{(2)}_{T-1}(\lambda) \\ \lambda p^{(3)}_{T-1}(\lambda) & \lambda p^{(3)}_T(\lambda) & ... & p^{(3)}_{T-2}(\lambda) \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda p^{(T)}_2(\lambda) & \lambda p^{(T)}_3(\lambda) & ... & p^{(T)}_1(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а полиномы $p^{(j)}_k(\lambda), k = 1, ..., T, j = 1, ..., T$ *определяются единственным образом по формулам*

$$f_j(\lambda) = p^{(j)}_1(\lambda^T) + \lambda p^{(j)}_2(\lambda^T) + ... + \lambda^{T-1} p^{(j)}_1(\lambda^T). \tag{5}$$

Доказательство. Собственные значения λ и собственные векторы s матрицы $A_T\cdots A_1$ удовлетворяют уравнению

$$A_T\cdots A_1\cdot s=\lambda s,\qquad (s\neq 0), \tag{6}$$

которое можно представаить в виде системы

$$\left\{\begin{array}{ccc} A_1s_1 & = & s_2\\ ... & ... & ...\\ A_{T-1}s_{T-1} & = & s_T\\ A_Ts_T & = & \lambda s_1,\end{array}\right. \tag{7}$$

где $s_1\neq 0$.

Пары (λ,s) решения системы (6) совпадают с парами (λ,s_1) решения системы (7).

Обозначим

$$s_j=\begin{pmatrix} s_j^{(1)}\\ .\\ .\\ .\\ s_j^{(m+1)}\end{pmatrix},\qquad j=1,\dots,T,$$

и

$$\sigma_k=\begin{pmatrix} s_1^{(k)}\\ .\\ .\\ .\\ s_T^{(k)}\end{pmatrix},\qquad k=1,\dots,m+1.$$

Тогда систему (7) можно записать в виде

$$\left\{\begin{array}{rcl} s_j^{(k)} & = & s_{j+1}^{(k-1)},\\ s_T^{(k)} & = & \lambda s_1^{(k-1)},\\ a_{m+1}^{(j)}s_j^{(1)}+a_m^{(j)}s_j^{(2)}+...+a_1^{(j)}s_j^{(m+1)} & = & s_{j+1}^{(m+1)},\\ a_{m+1}^{(T)}s_T^{(1)}+a_m^{(T)}s_T^{(2)}+...+a_1^{(T)}s_T^{(m+1)} & = & \lambda s_1^{(m+1)},\\ j=1,...,T-1,\ k=2,...,m+1. & & \end{array}\right. \tag{8}$$

Или в матричном виде

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_{k+1} & = & U\sigma_k,\ k=1,...,m,\\ \alpha_1\sigma_1+\alpha_2\sigma_2+...+\alpha_{m+1}\sigma_{m+1} & = & U\sigma_{m+1},\end{array}\right. \tag{9}$$

где матрицы $U,\alpha_1,...,\alpha_{m+1}$ имеют размер $T\times T$ и определяются формулами

$$U=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1\\ \lambda & 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix},\quad \alpha_j=\mathrm{diag}\{a_j^{(1)},...,a_j^{(T)}\},\ j=1,...,m+1.$$

Обозначим через E_j единичную матрицу порядка j. Тогда

$$U^j = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & E_{T-j} \\ \lambda E_j & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, ..., T.$$

Для $j = k_1T + k_2$ (k_1, k_2 — натуральные числа) получим

$$U^j = \lambda^{k_1} U^{k_2}.$$

Систему (9) запишем в виде

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_{k+1} & = & U\sigma_k,\ k = 1, ..., m, \\ (U^{m+1} - \alpha_1 U^m - ... - \alpha_{m+1})\sigma_1 & = & \mathbb{O}. \end{array} \right. \tag{10}$$

Система (7) будет иметь решением нетривиальный вектор s_1 тогда и только тогда, когда система (10) будет иметь решением нетривиальный вектор σ_1. А это возможно тогда и только тогда, когда

$$\det(U^{m+1} - \alpha_1 U^m - ... - \alpha_{m+1}) = 0.$$

Обозначим $m + 1 - j = k_jT + s_j,\ j = 0, ..., m$, где $s_j \in \{0, 1, ..., T-1\}$, $k_j \in \mathbb{N}$; и введем в рассмотрение множество

$$J_s = \{j \in \{1, ..., m+1\} : j = s \pmod T\}, s = 0, 1, ..., T-1.$$

Тогда

$$U^{m+1} - \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j U^{m+1-j} = \lambda^{k_0} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & E_{T-s_0} \\ \lambda E_{s_0} & \mathbb{O} \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{m+1} \lambda^{k_j} \alpha_j \begin{pmatrix} \mathbb{O} & E_{T-s_j} \\ \lambda E_{s_j} & \mathbb{O} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^{k_0} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & E_{T-s_0} \\ \lambda E_{s_0} & \mathbb{O} \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{T+1} \left(\sum_{j=1,...,m+1; j \in J_{s_k}} \lambda^{k_j} \alpha_j \right) \begin{pmatrix} \mathbb{O} & E_{T-s_k} \\ \lambda E_{s_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\alpha_j \begin{pmatrix} \mathbb{O} & E_{T-s_k} \\ \lambda E_{s_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & a_j^{(1)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & a_j^{(T-s_k)} \\ \lambda a_j^{(T-s_k+1)} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda a_j^{(T)} & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

то

$$U^{m+1} - \sum_{j=1}^{m+i} \alpha_j U^{m+1-j} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & p_1^{(2)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p_1^{(T)} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & p_2^{(1)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & p_2^{(2)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & p_2^{(T-1)} \\ \lambda p_2^{(T)} & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_3^{(1)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & p_3^{(T-2)} \\ \lambda p_3^{(T-1)} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda p_3^{(T)} & ... & ... & 0 \end{pmatrix} + ...$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & p_T^{(1)} \\ \lambda p_T^{(2)} & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda p_T^{(T)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & ... & p_T^{(1)} \\ \lambda p_T^{(2)} & p_1^{(2)} & ... & p_{T-1}^{(2)} \\ \lambda p_{T-1}^{(3)} & \lambda p_T^{(3)} & ... & p_{T-2}^{(3)} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda p_2^{(T)} & \lambda p_3^{(T)} & ... & p_1^{(T)} \end{pmatrix},$$

где $p_k^{(j)} = p_k^{(j)}(\lambda)$ и определяются по формулам (5).

В итоге мы установили, что собственные значения произведений матриц Фробениуса $A_T \cdots A_1$ совпадают с корнями уравнения $\det Q = 0$.

Далее, возможны два случая: либо $\det(\lambda E - A_T \cdots A_1) = \det Q$, либо $\det(\lambda E - A_T \cdots A_1) = -\det Q$. Чтобы определить, какой из этих случаев реализуется, подсчитаем определители $\det(\lambda E - A_T \cdots A_1)$ и $\det Q$ при $\lambda = 0$.

Имеем

$$\det(-A_T \cdots A_1) = \det(-A_T) \cdots \det A_1 =$$

$$= -a_{m+1}^{(T)}(-1)^{m+2}(-1)^m \cdot \prod_{j=1}^{T-1}\left((-1)^{m+2}a_{m+1}^{(j)}\right) = (-1)^{m(T-1)+1}\prod_{j=1}^{T} a_{m+1}^{(j)}.$$

Далее, при $\lambda = 0$

$$\det Q = p_1^{(1)}(0) \cdots p_1^{(T)}(0) = (-a_{m+1}^{(1)}) \cdots (-a_{m+1}^{(T)}) = (-1)^T a_{m+1}^{(1)} \cdots a_{m+1}^{(T)}.$$

Таким образом, окончательно

$$\det(-A_T \cdots A_1) = (-1)^{m(T-1)+1+T} \det Q = (-1)^{(m-1)(T-1)} \det Q.$$

Теорема доказана.

Заметим, что из формулы (4) следует, что значения определителя Q не меняются при циклической перестановке верхних индексов у полиномов $p_k^{(j)}$. Отсюда получается хорошо известный факт о независимости характеристического уравнения произведения матриц Фробениуса $A_T \cdots A_1$ при циклической перестановке индексов у матриц A_j.

Следствие 1. *Пусть* $m = (N-1)T$, *где* $N \in \{2, 3, ...\}, T \in \{1, 2, ...\}$. *Пусть*

$$f_j(\lambda) = \lambda^{(N-1)T+1} - a_1^{(j)}\lambda^{(N-1)T} - a_2^{(j)}\lambda^{(N-2)T} ... - a_N^{(j)},\ j = 1, ..., T,$$

и A_j *- матрица Фробениуса для полинома* $f_j(\lambda)$. *Тогда*

$$\det(\lambda E - A_T \cdots A_1) =$$

$$= \lambda^{(N-1)T+1} - \prod_{j=1}^{T}\left[a_1^{(j)}\lambda^{N-1} + a_2^{(j)}\lambda^{N-2} + ... + a_N^{(j)}\right].$$

Доказательство. Имеем

$$f_j(\lambda) = p_1^{(j)}(\lambda^T) + \lambda p_2^{(j)}(\lambda^T),$$

где $p_1^{(j)}(\lambda) = -a_1^{(j)}\lambda^{N-1} - ... - a_N^{(j)}$ и $p_1^{(j)}(\lambda) = \lambda^{N-1}$. Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} & \lambda^{N-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & p_1^{(2)} & \lambda^{N-1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \lambda^N & 0 & 0 & ... & p_1^{(T)} \end{pmatrix}$$

следовательно,

$$\det Q = p_1^{(1)} \cdots p_1^{(T)} + (-1)^{T+1}\lambda^N \cdot \lambda^{(N-1)(T-1)} = p_1^{(1)} \cdots p_1^{(T)} + (-1)^{T+1}\lambda^{(N-1)T+1} =$$

$$= (-1)^{T+1}\left(\lambda^{(N-1)T+1} - \prod_{j=1}^{T}(a_1^{(j)}\lambda^{N-1} + .. + a_N^{(j)})\right).$$

Т. к. при $m = (N-1)T$ мы имеем $(-1)^{((N-1)T-1)(T-1)} = (-1)^{(N-1)T(T-1)}(-1)^{T-1} = = (-1)^{T+1}$, то по Теореме 1

$$\det(\lambda E - A_T \cdots A_1) = \lambda^{(N-1)T+1} - \prod_{j=1}^{T}\left[a_1^{(j)}\lambda^{N-1} + ... + a_N^{(j)}\right].$$

Утверждение доказано.

Следствие 2. *Пусть* $m = (N-1)T$, *где* $N \in \{2, 3, ...\}, T \in \{1, 2, ...\}$, *и*

$$f_j(\lambda) = \lambda^{(N-1)T+1} - \mu_j(a_1\lambda^{(N-1)T} + ... + a_N),\ j = 1, ..., T,$$

A_j *— матрица Фробениуса для полинома* $f_j(\lambda)$. *Тогда*

$$\det(\lambda E - A_T \cdots A_1) = \lambda^{(N-1)T+1} - \mu_1 \cdots \mu_T\left(a_1\lambda^{N-1} + ... + a_N\right)^T.$$

Заметим, что это следствие составляет основной результат работы [3].

В качестве приложения полученной теоремы рассмотрим следующую задачу: найти $\det(E - A^T)$ для произвольной матрицы A (необязательно в форме Фробениуса).

Приведем решение. Во-первых,

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = p_1(\lambda^T) + \lambda p_2(\lambda^T) + \lambda^{T-1}p_T(\lambda^T).$$

Во-вторых,

$$\det(\lambda E - A^T) = (-1)^{(m-1)(T-1)}\det Q(\lambda),$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} p_1(\lambda) & p_2(\lambda) & ... & p_T(\lambda) \\ \lambda p_T(\lambda) & p_1(\lambda) & ... & p_{T-1}(\lambda) \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda p_2(\lambda) & \lambda p_3(\lambda) & ... & p_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$E - A^T = (-1)^{(m-1)(T-1)} \begin{pmatrix} p_1(1) & p_2(1) & ... & p_T(1) \\ p_T(1) & p_1(1) & ... & p_{T-1}(1) \\ ... & ... & ... & ... \\ p_2(1) & p_3(1) & ... & p_1(1) \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица — циркулянт, следовательно, если обозначить

$$\phi(x) = p_1(1) + xp_2(1) + ... + x^{T-1}p_T(1),$$

то мы получаем весьма любопытную формулу

$$\det(E - A^T) = (-1)^{(m-1)(T-1)} \prod_{j=0}^{T-1} \phi(e^{i\frac{2\pi}{T}j}),$$

которую можно использовать для тестирования матрицы A на устойчивость по Шуру.

Приведем примеры, иллюстрирующие теорему.

Пример 1. Пусть $m = 1, T = 3$ и

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2^{(1)} & a_1^{(1)} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2^{(2)} & a_1^{(2)} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2^{(3)} & a_1^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Полином

$$f_j(\lambda) = \lambda^2 - a_1^{(j)}\lambda - a_2^{(j)},\ j = 1, 2, 3$$

можно переписать как

$$f_j(\lambda) = -a_2^{(j)} - a_1^{(j)}\lambda + \lambda^2 \cdot 1,$$

и тогда $p_1^{(j)} = -a_2^{(j)}$, $p_2^{(j)} = -a_1^{(j)}$, и $p_3^{(j)} = 1$.

Следовательно,

$$Q = \begin{pmatrix} -a_2^{(1)} & -a_1^{(1)} & 1 \\ \lambda & -a_2^{(2)} & -a_1^{(2)} \\ -\lambda a_1^{(3)} & \lambda & -a_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

и

$$\det Q = -a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_2^{(3)} + \lambda^2 - \lambda a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)} - \lambda a_1^{(2)}a_2^{(1)} - \lambda a_1^{(1)}a_2^{(3)} - \lambda a_1^{(3)}a_2^{(2)} =$$

$$= \lambda^2 - \lambda(a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)} + a_1^{(2)}a_2^{(1)} + a_1^{(1)}a_2^{(3)} + a_1^{(3)}a_2^{(2)}) - a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_2^{(3)}.$$

Далее,

$$A_3A_2A_1 = \begin{pmatrix} a_1^{(2)}a_2^{(1)} & a_2^{(2)} + a_1^{(1)}a_1^{(2)} \\ a_2^{(1)}a_2^{(3)} + a_1^{(2)}a_1^{(3)}a_2^{(1)} & a_1^{(1)}a_2^{(3)} + a_1^{(3)}a_2^{(2)} + a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)} \end{pmatrix}$$

и

$$\det(\lambda E - A_3A_2A_1) = \lambda^2 - \lambda(a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)} + a_1^{(2)}a_2^{(1)} + a_1^{(1)}a_2^{(3)} + a_1^{(3)}a_2^{(2)}) - a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_3^{(3)}.$$

Таким образом, действительно $\det(\lambda E - A_3A_2A_1) = \det Q$.

Пример 2. Отметим, что формула (4) тем эффективнее, чем больше запаздывание m. Пусть, например, $T = 3, m = 6$. Без применения формулы (4) необходимо дважды переменожить матрицы седьмого порядка, а потом еще и раскрыть определитель седьмого порядка.

Воспользуемся формулой (4), для чего запишем

$$f_j(\lambda) = (-a_1^{(j)}\lambda^6 - a_4^{(j)}\lambda^3 - a_7^{(j)}) + \lambda(\lambda^6 - a_3^{(j)}\lambda^3 - a_6^{(j)}) + \lambda^2(-a_2^{(j)}\lambda^3 - a_5^{(j)}) =$$
$$= p_1^{(j)}(\lambda) + \lambda p_2^{(j)}(\lambda) + \lambda^2 p_3^{(j)}(\lambda).$$

Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} -a_1^{(1)}\lambda^2 - a_4^{(1)}\lambda - a_7^{(1)} & \lambda^2 - a_3^{(1)}\lambda - a_6^{(1)} & -a_2^{(1)}\lambda - a_5^{(1)} \\ \lambda(-a_2^{(2)}\lambda - a_5^{(2)}) & -a_1^{(2)}\lambda^2 - a_4^{(2)}\lambda - a_7^{(2)} & \lambda^2 - a_3^{(2)}\lambda - a_6^{(2)} \\ \lambda(\lambda^2 - a_3^{(3)}\lambda - a_6^{(3)}) & \lambda(-a_2^{(3)}\lambda - a_5^{(3)}) & -a_1^{(3)}\lambda^2 - a_4^{(3)}\lambda - a_7^{(3)} \end{pmatrix}$$

и

$$\det(\lambda E - A_3A_2A_1) = \det Q.$$

Заключение. Определяя причины симметрии характеристического уравнения произведений матриц Фробениуса специального вида, мы получили формулу, позволяющую значительно сократить количество вычислений в случае, когда размерность матриц Фробениуса значительно больше числа этих матриц. Вспомогательная матрица для матриц Фробениуса произвольного вида имеет ясную структуру, которая, в частных случаях, совпадает со структурой Ганкелевых матриц. Нам кажется, что формула (3) может быть полезна для многочисленных задач, связанных с определением свойств степеней и произведений матриц Фробениуса. Например, см [1, 4, 5].

1. **Chen Y. C.** The combinatorial power of the companion matrix / Y. C. Chen, J. D. Louck // Linear Algebra Appl. – 1996. – Is. 232. – P. 261–278.
2. **Bielawski S.** Controlling unstable periodic orbits by a delayed continuous feedback / S. Bielawski, D. Derozier, P. Glorieux // Physical Review E. – 1994. – Vol. 49. – P. 971–975.
3. **Dmitrishin D.** On the stability of cycles by delayed feedback control / D. Dmitrishin, A. Khamitova, P. Hagelstein, A. Stokolos // http://arxiv.org/abs/1501.04573 .

4. **Key E. S.** Eigenvalue multiplicities of products of companion matrices / E. S. Key, H. Volkmer // Electronic Journal of Linear Algebra. – 2004. – Vol. 11. – P. 103–114.
5. **Lima A.** On product of companion matrices / A. Lima, Jialing Dai // Linear Algebra and its Applications. – 2011. – Is. 435. – P. 2921–2935.
6. **Pyragus K.** Continuous control of chaos by self-controlling feedback / K. Pyragus // Physics Letters A. – 1992. – Vol. 170. – P. 421–428.
7. **Rosenblum M.** Delayed feedback control of collective synchrony: An approach to suppression of pathological brain rhythms / M. Rosenblum, A. Pikovsky // Physical Review E. – 2004. – Vol. 70.

Получена 04.12.2014