Дослiдження в математицi i механiцi.– 2015.– Т.20, вип. 2(26).– С. 20–25

УДК 517.5

А. А. Кореновский, К. С. Врублевская
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ САМОУЛУЧШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ

Получены экстремальные значения параметров в одном известном свойстве «самоулучшения показателей».

MSC: 26D10, 42B25.
Ключевые слова: самоулучшение показателя, неравенство Харди, весовые неравенства.

Введение. Термин «самоулучшение показателя» последние десятилетия все чаще встречается в анализе. В широком смысле его можно понимать так, что если некоторое свойство справедливо при каких-то значениях входящих в него параметров, то за счет «ухудшения» одного из них можно добиться «улучшения» другого. Такие свойства полезны во многих приложениях, в частности, и в теории весовых пространств. Так, в работе [1] для исследования весового неравенства Харди применялась следующая лемма, которую можно считать типичным свойством самоулучшения показателя.

Лемма. [1] *Пусть неотрицательная на* $[0,+\infty)$ *функция* w *при некоторых* $B>1$ *и* $1<q<\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^q}\,dx \leqslant \frac{B}{r^q}\int_0^r w(x)\,dx, \quad r>0.$$

Тогда найдутся такие $\delta>0$ *и* $D>1$*, что*

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^{q-\delta}}\,dx \leqslant \frac{D}{r^{q-\delta}}\int_0^r w(x)\,dx, \quad r>0.$$

В [1] говорится, что доказательство этой леммы можно получить с помощью соответствующего результата из [3, с. 12, лемма 21]. Кроме того, в [1] приводится и более простое доказательство. Однако, оба эти доказательства основаны на сведении интегралов к рядам и не позволяют найти точное значение параметра δ. В [2] приведено еще более простое доказательство, и при этом с неулучшаемой границей $\delta_0=\delta_0(q,B)>0$ на параметр δ $(0<\delta<\delta_0)$. Более того, хотя это и не было отмечено, в [2] получено также и наименьшее значение постоянной $D=D(q,B,\delta)$.

Основные результаты. Цель данной заметки заключается в альтернативном, по сравнению с [1–3], доказательстве указанной во введении леммы также с неулучшаемыми значениями параметров δ и D. Сформулируем соответствующий результат.

Получена 13.07.2015

Лемма 1. *Пусть* $B > 1$, $1 < q < \infty$ *и неотрицательная на* $[0, +\infty)$ *функция* w *удовлетворяет условию*

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^q}\,dx \leqslant \frac{B}{r^q}\int_0^r w(x)\,dx, \quad r > 0. \tag{1}$$

Тогда для любого $0 < \delta < \frac{q}{B+1}$ *справедливо неравенство*

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^{q-\delta}}\,dx \leqslant D\cdot\frac{1}{r^{q-\delta}}\int_0^r w(x)\,dx, \quad r > 0, \tag{2}$$

где $D = B/\Big(1 - \frac{B+1}{q}\delta\Big)$. *Более того, при* $\delta = \frac{q}{B+1}$ *неравенство* (2) *теряет силу при любом* $D < \infty$, *а постоянная* $D = B/\Big(1 - \frac{B+1}{q}\delta\Big)$ *справа точная.*

Доказательство. Докажем, что при указанных δ и D из (1) следует (2). Меняя порядок интегрирования, получаем следующее тождество:

$$\int_r^\infty t^{-1-q}\int_0^t w(x)\,dx\,dt =$$

$$= \int_0^r w(x)\,dx\int_r^\infty t^{-1-q}\,dt + \int_r^\infty w(x)\int_x^\infty t^{-1-q}\,dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{q}r^{-q}\int_0^r w(x)\,dx + \frac{1}{q}\int_r^\infty x^{-q}w(x)\,dx. \tag{3}$$

Оценивая последнее слагаемое справа с помощью условия (1), находим:

$$\int_r^\infty t^{-1-q}\int_0^t w(x)\,dx\,dt \leqslant \frac{B+1}{q}r^{-q}\int_0^r w(x)\,dx. \tag{4}$$

Отсюда следует

$$-\frac{1}{r}\cdot\frac{r^{-q}\int\limits_0^r w(x)\,dx}{\int\limits_r^\infty t^{-1-q}\int\limits_0^t w(x)\,dx\,dt} \leqslant -\frac{q}{B+1}\cdot\frac{1}{r},$$

и поэтому

$$\frac{d}{dr}\left[\ln\left(\int_r^\infty t^{-1-q}\int_0^t w(x)\,dx\,dt\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{r}\cdot\frac{r^{-q}\int\limits_0^r w(x)\,dx}{\int\limits_r^\infty t^{-1-q}\int\limits_0^t w(x)\,dx\,dt} \leqslant -\frac{q}{B+1}\cdot\frac{1}{r}.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$. Проинтегрируем последнее неравенство по переменной $r \in [\alpha, \beta]$ и получим

$$\ln \frac{\int\limits_{\beta}^{\infty} t^{-1-q} \int\limits_{0}^{t} w(x)\,dx\,dt}{\int\limits_{\alpha}^{\infty} t^{-1-q} \int\limits_{0}^{t} w(x)\,dx\,dt} \leqslant -\frac{q}{B+1} \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha},$$

т. е. для $0 < \alpha < \beta$ имеем

$$\beta^{\frac{q}{B+1}} \int\limits_{\beta}^{\infty} t^{-1-q} \int\limits_{0}^{t} w(x)\,dx\,dt \leqslant \alpha^{\frac{q}{B+1}} \int\limits_{\alpha}^{\infty} t^{-1-q} \int\limits_{0}^{t} w(x)\,dx\,dt.$$

Оценивая правую часть с помощью (4), находим

$$\beta^{\frac{q}{B+1}} \int\limits_{\beta}^{\infty} t^{-1-q} \int\limits_{0}^{t} w(x)\,dx\,dt \leqslant \frac{B+1}{q} \alpha^{\frac{q}{B+1}-q} \int\limits_{0}^{\alpha} w(x)\,dx.$$

Пусть $0 < \delta < \frac{q}{B+1}$. Умножим последнее неравенство на $\beta^{-1-\frac{q}{B+1}+\delta}$ и проинтегрируем по β от α до ∞

$$\frac{B+1}{q} \alpha^{\frac{q}{B+1}-q} \int\limits_{0}^{\alpha} w(x)\,dx \int\limits_{\alpha}^{\infty} \beta^{-1-\frac{q}{B+1}+\delta}\,d\beta \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\alpha}^{\infty} \beta^{-1+\delta} \int\limits_{\beta}^{\infty} t^{-1-q} \int\limits_{0}^{t} w(x)\,dx\,dt\,d\beta. \quad (5)$$

Левая часть этого неравенства равна

$$\frac{B+1}{q} \alpha^{\frac{q}{B+1}-q} \int\limits_{0}^{\alpha} w(x)\,dx \frac{\alpha^{-\frac{q}{B+1}+\delta}}{\frac{q}{B+1}-\delta} = \frac{B+1}{q} \frac{1}{\frac{q}{B+1}-\delta} \alpha^{-q+\delta} \int\limits_{0}^{\alpha} w(x)\,dx. \quad (6)$$

Преобразуем правую часть (5), используя тождество (3),

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty}\beta^{-1+\delta}\int\limits_{\beta}^{\infty}t^{-1-q}\int\limits_{0}^{t}w(x)\,dx\,dt\,d\beta =$$

$$= \frac{1}{q}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\beta^{-1-q+\delta}\int\limits_{0}^{\beta}w(x)\,dx\,d\beta + \frac{1}{q}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\beta^{-1+\delta}\int\limits_{\beta}^{\infty}x^{-q}w(x)\,dx\,d\beta =$$

$$= \frac{1}{q}\frac{1}{q-\delta}\alpha^{-q+\delta}\int\limits_{0}^{\alpha}w(x)\,dx + \frac{1}{q}\frac{1}{q-\delta}\int\limits_{\alpha}^{\infty}x^{-q+\delta}w(x)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{q}\int\limits_{\alpha}^{\infty}x^{-q}w(x)\int\limits_{\alpha}^{x}\beta^{-1+\delta}\,d\beta\,dx =$$

$$= \frac{1}{q}\left[\frac{1}{q-\delta}\alpha^{-q+\delta}\int\limits_{0}^{\alpha}w(x)\,dx + \left(\frac{1}{q-\delta}+\frac{1}{\delta}\right)\int\limits_{\alpha}^{\infty}x^{-q+\delta}w(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\delta}\alpha^{\delta}\int\limits_{\alpha}^{\infty}x^{-q}w(x)\,dx\right].$$

Оценивая последнее слагаемое справа в квадратных скобках с помощью условия (1), находим

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty}\beta^{-1+\delta}\int\limits_{\beta}^{\infty}t^{-1-q}\int\limits_{0}^{t}w(x)\,dx\,dt\,d\beta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q}\left[\frac{1}{q-\delta}\alpha^{-q+\delta}\int\limits_{0}^{\alpha}w(x)\,dx + \left(\frac{1}{q-\delta}+\frac{1}{\delta}\right)\int\limits_{\alpha}^{\infty}x^{-q+\delta}w(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \frac{B}{\delta}\alpha^{-q+\delta}\int\limits_{0}^{\alpha}w(x)\,dx\right]. \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), в результате элементарных вычислений получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty}x^{-(q-\delta)}w(x)\,dx \leqslant \frac{\frac{B+1}{\frac{q}{B+1}-\delta} - \frac{1}{q-\delta} + \frac{B}{\delta}}{\frac{1}{q-\delta}+\frac{1}{\delta}}\cdot\alpha^{-(q-\delta)}\int\limits_{0}^{\alpha}w(x)\,dx, \quad \alpha > 0.$$

Так как постоянная в правой части

$$\frac{\frac{B+1}{\frac{q}{B+1}-\delta} - \frac{1}{q-\delta} + \frac{B}{\delta}}{\frac{1}{q-\delta}+\frac{1}{\delta}} = \frac{B}{1-\frac{B+1}{q}\delta},$$

то тем самым доказано (2).

Покажем теперь, что при $\delta = \frac{q}{B+1}$ неравенство (2) теряет силу при любом $D < \infty$. Для этого рассмотрим функцию $w(x) = x^{\gamma-1}$, $0 < \gamma < q$. При $r > 0$ имеем

$$\int\limits_r^\infty \frac{w(x)}{x^q}\,dx = \frac{r^{-q+\gamma}}{q-\gamma}, \qquad \int\limits_0^r w(x)\,dx = \frac{r^\gamma}{\gamma}.$$

Таким образом, условие (1) выполняется с постоянной

$$B = \frac{\int\limits_r^\infty \frac{w(x)}{x^q}\,dx}{\frac{1}{r^q}\int\limits_0^r w(x)\,dx} = \frac{\gamma}{q-\gamma},$$

откуда получаем $\gamma = \frac{B}{B+1}q$. Это означает, что при заданных $B > 1$, $q > 1$ функция $w(x) = x^{\frac{B}{B+1}q-1}$ удовлетворяет условию (1). Если же $\delta = \frac{q}{B+1}$, то подынтегральная функция в левой части неравенства (2) равна $x^{q-\delta}w(x) = x^{q-\delta}x^{\frac{B}{B+1}q-1} = \frac{1}{x}$ и, таким образом, интеграл слева в (2) расходится, а справа в (2) сходится.

Наконец, покажем, что постоянную $D = B/\left(1 - \frac{B+1}{q}\delta\right)$ в правой части (2) нельзя уменьшить. Как видно из предыдущего, функция $w(x) = x^{\frac{B}{B+1}q-1}$ удовлетворяет условию (1). Для $0 < \delta < \frac{q}{B+1}$ вычислим оба интеграла в (2) при $r > 0$

$$\int\limits_r^\infty x^{\frac{B}{B+1}q-1-q+\delta}\,dx = \frac{r^{\frac{B}{B+1}q-q+\delta}}{q - \frac{B}{B+1}q - \delta}, \qquad \int\limits_0^r x^{\frac{B}{B+1}q-1}\,dx = \frac{r^{\frac{B}{B+1}q}}{\frac{B}{B+1}q}.$$

Таким образом,

$$\frac{\int\limits_r^\infty x^{\frac{B}{B+1}q-1-q+\delta}\,dx}{r^{-q+\delta}\int\limits_0^r x^{\frac{B}{B+1}q-1}\,dx} = \frac{\frac{B}{B+1}q}{q - \frac{B}{B+1}q - \delta} = \frac{B}{1 - \frac{B+1}{q}\delta},$$

т. е. при $D = B/\left(1 - \frac{B+1}{q}\delta\right)$ неравенство (2) обращается в равенство и тем самым лемма 1 доказана полностью.

Заключение. Вопрос нахождения неулучшаемых границ «самоулучшения параметров» представляет, как правило, и самостоятельный интерес. Рассмотренная здесь Лемма применялась в [1, 2] для доказательства ограниченности в весовом пространстве оператора Харди на классе монотонных функций. Естественно, что «грубые» значения параметров «самоулучшения» уже не позволят найти норму этого оператора. Возможно, знание точных границ «самоулучшения» может оказаться полезным для вычисления нормы оператора Харди, или, по крайней мере, для улучшения известных оценок этой нормы.

1. **Ariño M. A.** Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions / M. A. Ariño, B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. - 1990. - V. 320, № 2. - P. 727 - 735.
2. **Maligranda L.** Weighted estimates of integral operators decreasing functions / L. Maligranda // Proc. Internat. Conf. dedicated to F. D. Gakhov, Minsk. – 1996. – P. 226–236.
3. **Strömberg J. O.** Weighted Hardy spaces / J. O. Strömberg, A. Torchinsky. – Lectures Notes in Math. : Springer – Verlag, New York, 1989. – V. 1381. – 193 p.

Кореновський А. О., Врублевська К. С.

Про одну властивість самопокращення показника

Резюме

Отримані екстремальні значення параметрів у одній відомій властивості «самопокращення показників».

Ключові слова: самопокращення показника, нерівність Гарді, вагові нерівності.

Korenovskyi A., Vrublevska K.

On the one self-improving property of exponent

Summary

In this note an alternative proof of the well-known property, associated with the so-called "self-improving property", is presented. This property states that if for some $B > 1$, $1 < q < \infty$, nonnegative on $(0, +\infty)$ function w satisfies $\int\limits_r^\infty \frac{w(x)}{x^q}\,dx \leqslant \frac{B}{r^q}\int\limits_0^r w(x)\,dx, r > 0$, then the same inequality remains valid if to reduce the "little" the q and to increase the B. This proof contains the best possible parameters for such a possible "self-improving". On the use of this property, for example, the proof of the Hardy transformation tightness in the space with the weight, is based. Perhaps the knowledge of the exact values of the parameters of this "self-improving" will be useful for the Hardy operator norm finding in the weighted space, or for the improving t of the norm's well-known estimates.

Key words: self-improving property, Hardy inequality, weighted inequalities.

References

1. Arino, M. A. & Muckenhoupt, B. (1990). Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions. *Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 320*(2), 727–735.
2. Maligranda, L. (1996). Weighted estimates of integral operators decreasing functions. *Proc. Internat. Conf. dedicated to F. D. Gakhov, Minsk,* 226–236.
3. Strömberg, J. O. & Torchinsky, A. (1989). Weighted Hardy spaces. *Lectures Notes in Math. New York: Springer-Verlag., Vol. 1381*, 193.