УДК 531.66; 531.44

М. П. Плахтієнко, А. Г. Забуга
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ФРИКЦІЙНО-УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТВЕРДОГО ТІЛА З ТВЕРДОЮ ШОРСТКОЮ ПЛОЩИНОЮ

Досліджено динаміку редукованої до першого порядку ланцюгової віброударної системи з кулоновим тертям, яка пропонується в якості моделі явищ, що відбуваються під час косого удару твердого тіла та абсолютно твердої шорсткої площини. Багатократні удари з тертям були досліджені за допомогою гіпотези Рауса. Було запропоновано розглядати кожен удар, як такий, що складається з двох послідовних стадій. Перша стадія являє собою рух ланцюгової віброударної системи без наявності контакту з твердою шорсткою площиною. Друга стадія являє собою ковзання з кулоновим тертям ланцюгової віброударної системи по твердій шорсткій площині. Показано, що можливість повного затухання коливань у ланцюговій віброударній системі залежить від інтервалу часу між двома послідовними ударами.
MSC: 70F35, 70F40, 70E55.
Ключові слова: фрикційно-ударна взаємодія, віброударна система, змінна структура, гіпотеза Рауса, косий удар, кулонове тертя, в'язке тертя, принцип Даламбера.

Вступ. При дослідженні динаміки багатьох типів машин доводиться мати справу з віброударними системами (ВУС), особливістю яких є те, що вони здійснюють коливальний рух, в процесі якого між їхніми окремими ланками відбуваються удари [1–3]. Часто ВУС моделюють за допомогою ланцюгових (рядних) систем абсолютно твердих тіл, з'єднаних між собою безінерційними пружними елементами. Як правило, ланцюгові системи твердих тіл описують за допомогою систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь, порядок яких іноді може бути знижений [1,2]. Ланцюгова ВУС з кулоновим тертям є нелінійною [4]. Проте, якщо розглядати нелінійні сили кулонового тертя як зовнішні по відношенню до лінійної підсистеми, то порядок останньої іноді може бути знижений за допомогою методу редукції лінійних систем, що управляються [5–7]. У таких випадках ланцюгова ВУС з кулоновим тертям може бути апроксимована системою більш низького порядку. В даній роботі досліджується динаміка редукованої до першого порядку ланцюгової ВУС з кулоновим тертям, яка пропонується в якості моделі явищ, що відбуваються під час косого удару твердого тіла та абсолютно твердої шорсткої площини.

Основні результати

1. Постановка задачі. Розглянемо плоскопаралельний поступальний рух системи двох абсолютно твердих тіл (рис. 1 і 2) під дією сили ваги. Тіла зв'язані пружиною з в'язким демпфером. Цю систему будемо називати умовно «циліндр-поршень».

Надійшла 08.07.2015

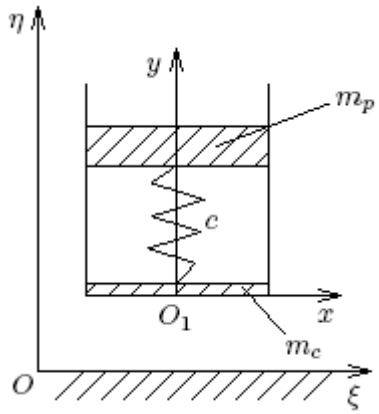

Рис. 1

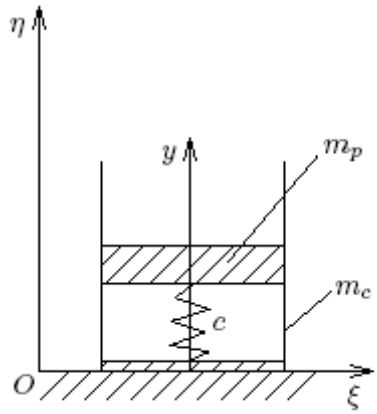

Рис. 2

Під час руху система може бути або вільною (рис. 1), або її переміщення у просторі буде обмежене недеформівною горизонтальною площиною (рис. 2). Позначимо масу поршня, як m_p, а масу циліндра разом з дном — як m_c. Циліндр вважаємо недеформівним, тобто рух поршня відносно дна циліндра у горизонтальному напрямку неможливий. Декартова система координат $O\xi\eta$ інерціальна, а система осей O_1xy зв'язана з дном циліндра і має початок в точці O_1, яка знаходиться у центрі зовнішньої поверхні дна циліндра. Центри мас циліндра і поршня знаходяться на осі симетрії циліндра і поршня, яка при вказаному виборі системи осей O_1xy збігається з віссю O_1y. Точки кріплення пружини до циліндра і поршня також знаходяться на осі O_1y. Оскільки циліндр і поршень недеформівні, то при вказаному виборі системи осей O_1xy зміна довжини пружини дорівнює зміні координати y центра мас поршня у системі O_1xy. Значення координати y, при якому пружина недеформована, дорівнює l. Жорсткість пружини дорівнює c, а її коефіцієнт дисипації — $2n$. Очевидно, що положення точок системи у будь-який момент часу може бути визначене за допомогою абсциси ξ і ординати η точки O_1 дна циліндра, а також ординати y. Через наявність абсолютно твердої шорсткої площини рух системи обмежений неідеальною неутримуючою геометричною в'яззю, рівняння якої:

$$\Phi(\xi, \eta, y) = \eta \geqslant 0, \tag{1}$$

де знак рівності має місце тоді, коли циліндр перебуває у контакті з площиною. Зі сказаного випливає, що механічна система, яка вивчається, матиме три ступеня вільності при $\eta > 0$ і два ступеня вільності при $\eta = 0$.

Будемо вважати, що під час руху поршня відносно циліндра у вертикальному напрямку на поршень з боку циліндра діє сила кулонового тертя Q, обумовлена тертям поршня об стінки циліндра. Силу кулонового тертя Q будемо описувати за допомогою залежності:

$$Q = \begin{cases} -q_0 \operatorname{sign}(\dot{y}) & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ -q_0 \operatorname{sign}(\sum F_A) & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |\sum F_A| > q_0, \\ -\sum F_A & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |\sum F_A| \leqslant q_0, \end{cases} \tag{2}$$

де q_0 — додатна стала, що має розмірність сили, $\dot{y}$ — швидкість руху у вертикальному напрямку поршня відносно циліндра і $\sum F_A$ — сума проекцій на вісь O_1y активних сил і сил інерції, що діють на поршень у рухомій системі відліку O_1xy. У формулі (2) другий рядок відповідає ситуації, коли $\dot{y}$, проходячи через нуль, миттєво змінює знак, а третій дає значення сили тертя спокою, коли $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$ протягом певного скінченного проміжку часу (поки виконується умова $|\sum F_A| \leqslant q_0$).

Рух системи, що вивчається, може бути представлений у вигляді декількох однотипних циклів. Номер циклу позначатимемо індексом який може набувати значень 1, 2, 3, ... У кожному циклі буде дві стадії:

1) рух при відсутності контакту з поверхнею $\eta = 0$, що відбувається на інтервалі часу $t \in [t_{k-1,2}; t_{k1}]$ (де $t_{k-1,2}$ — момент часу, коли закінчується друга стадія $k-1$-го циклу, а t_{k1} — момент часу, коли закінчується перша стадія k-го циклу). Відзначимо, що тут і в подальшому при $k = 1$ замість $t_{k-1,2}$ буде початковий момент часу $t_0 = 0$.

2) після досягнення циліндром у момент часу t_{k1} в'язі $\eta = 0$ виникає реакція в'язі і відбувається ковзний сповільнений рух циліндра вздовж площини на інтервалі часу $t \in (t_{k1}; t_{k2})$. Сила реакції, яка діє на циліндр на вказаному інтервалі часу, може бути розкладена на нормальну до площини складову N і тангенціальну (дотичну) до площини складову F_T, котра являє собою силу кулонового тертя між дном циліндра і площиною.

Очевидно, може трапитися ситуація, коли реакція в'язі $\eta = 0$ не обертається в нуль на другій стадії циклу. У цьому випадку система залишається на другій стадії руху нескінченно довго, перехід на наступний цикл не відбувається, а t_{k2} для даного циклу не існує.

Задача даного дослідження полягає у визначенні величин t_{k2} і t_{k2}. Для розв'язку цієї задачі і дослідження закону руху системи необхідно побудувати її механіко-математичну модель.

2. Рівняння динаміки системи, що вивчається. Ці рівняння мають у декартовій системі координат $O\xi\eta$ вигляд:

$$\begin{aligned} &M\ddot{\xi} = F_T, \\ &m_c\ddot{\eta} = -m_c g + c\,(y - l) + 2n\dot{y} - Q + N, \\ &m_p\,(\ddot{\eta} + \ddot{y}) = -m_p g - c\,(y - l) - 2n\dot{y} + Q, \end{aligned} \tag{3}$$

де було враховано, що ордината m_p у системі $O\xi\eta$ дорівнює $\eta + y$, а також той факт, що вздовж осі $O\xi$ система рухається, як єдине ціле. У рівняннях (3) $M = m_c + m_p$, а $g = 9,81\text{м/с}^2$ – прискорення вільного падіння. Розв'язуючи рівняння (3) відносно других похідних і виконуючи очевидні алгебраїчні перетворення, отримуємо:

$$M\ddot{\xi} = F_T, \quad m_c\ddot{\eta} = -m_c g + c\,(y - l) + 2n\dot{y} - Q + N,$$

$$\frac{m_c m_p}{M}\ddot{y} + c\,(y - l) + 2n\dot{y} = Q - \frac{m_p}{M}N. \tag{4}$$

Для того, щоб дослідити рух системи за допомогою рівнянь (4), треба знайти невідомі значення складових реакцій N, F_T і Q.

Розглянемо спочатку силу кулонового тертя Q. Очевидно, співвідношення (2) дозволяють одразу знайти значення Q у випадку, коли $\dot{y} \neq 0$. У випадку, коли $\dot{y} = 0$, необхідно іще знайти $\sum F_A$. Для того, щоб це зробити, застосуємо принцип Даламбера до останнього з рівнянь (4). Покладаючи у даному рівнянні $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$Q = c\,(y - l) + \frac{m_p}{M} N \text{ при } \dot{y} = 0 \text{ і } \ddot{y} = 0. \tag{5}$$

Порівнюючи (5) з останнім рядком у (2), який відповідає ситуації, коли $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$\sum F_A = -c\,(y - l) - \frac{m_p}{M} N. \tag{6}$$

Для того, щоб визначити Q за допомогою (2) і (6), необхідно визначити складову реакції N, яка входить до (6). У випадку, коли $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$, це можна зробити, якщо згадати, що при цьому поршень не рухається відносно циліндра, а отже, система матиме ті ж самі властивості, що і абсолютно тверде тіло з масою $M = m_c + m_p$. Таким чином, враховуючи рівняння неутримуючої геометричної в'язі (1), можемо записати:

$$N = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta > 0, \\ Mg & \text{при } \eta = 0,\ \dot{y} = 0 \text{ і } \ddot{y} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Підставляючи (6) і (7) у (2), отримаємо:

$$Q = \begin{cases} -q_0 \operatorname{sign}(\dot{y}) & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ q_0 \operatorname{sign}(c\,(y - l)) & \text{при } \dot{y} = 0,\ \eta > 0 \text{ і } |c\,(y - l)| > q_0, \\ c\,(y - l) & \text{при } \dot{y} = 0,\ \eta > 0 \text{ і } |c\,(y - l)| \leqslant q_0, \\ q_0 \operatorname{sign}(c\,(y - l) + m_p g) & \text{при } \dot{y} = 0,\ \eta = 0 \text{ і } |c\,(y - l) + m_p g| > q_0, \\ c\,(y - l) + m_p g & \text{при } \dot{y} = 0,\ \eta = 0 \text{ і } |c\,(y - l) + m_p g| \leqslant q_0. \end{cases} \tag{8}$$

Формула (7) визначає нормальну складову реакції N при $\eta > 0$ і у випадку, коли $\eta = 0$, $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$ Для того, щоб знайти N в загальному випадку, підставимо рівняння в'язі (1) і співвідношення (8) у друге рівняння (4) і скористаємося принципом Даламбера. В результаті отримаємо:

$$N = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta > 0, \\ m_c g - c\,(y - l) - 2n\dot{y} - q_0 \operatorname{sign}(\dot{y}) & \text{при } \eta = 0 \text{ і } \dot{y} \neq 0, \\ m_c g - c\,(y - l) + q_0 \operatorname{sign}(c\,(y - l) + m_p g) & \text{при } \eta = 0,\ \dot{y} = 0 \text{ і} \\ & |c\,(y - l) + m_p g| > q_0, \\ Mg & \text{при } \eta = 0,\ \dot{y} = 0 \text{ і} \\ & |c\,(y - l) + m_p g| \leqslant q_0. \end{cases} \tag{9}$$

У співвідношенні (9) враховано той факт, що ситуація $\ddot{y} = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $|c\,(y - l) + m_p g| \leqslant q_0$. Зазначимо, що оскільки в'язь (1) неутримуюча, то має виконуватися умова $N \geqslant 0$. Причому, якщо під час ковзання циліндра вздовж площини $\eta = 0$ складова реакції N обертається в нуль, то має місце відскакування циліндра від в'язі.

Що стосується дотичної складової реакції F_T, то, оскільки вона є єдиною силою, що діє на систему в напрямку осі $O\xi$, можемо, застосовуючи закон Амонтона-Кулона і враховуючи, що $N \geqslant 0$, записати:

$$F_T = -\mu N \mathrm{sign}\left(\dot{\xi}\right), \tag{10}$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання.

Рівняння динаміки (4) разом зі складовими реакцій, записаними у вигляді співвідношень (8), (9) і (10), дозволяють повністю дослідити рух системи, що вивчається.

3. Рух системи при відсутності контакту із площиною. Перша стадія кожного циклу руху характеризується відсутністю контакту системи, що вивчається, з поверхнею. При цьому виконується нерівність $\eta > 0$. Таким чином, підстановка (8), (9) і (10) у (4) з урахуванням вказаної нерівності дозволяє отримати систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\xi} = 0,\\
&m_c\ddot{\eta} = \begin{cases} -m_c g + c\,(y-l) + 2n\dot{y} + q_0 \mathrm{sign}\,(\dot{y}) & \text{при } \dot{y} \neq 0,\\ -m_c g + c\,(y-l) - q_0 \mathrm{sign}\,(c\,(y-l)) & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c\,(y-l)| > q_0,\\ -m_c g & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c\,(y-l)| \leqslant q_0, \end{cases}\\
&\tfrac{m_c m_p}{M}\ddot{y} = \begin{cases} -c\,(y-l) - 2n\dot{y} - q_0 \mathrm{sign}\,(\dot{y}) & \text{при } \dot{y} \neq 0,\\ -c\,(y-l) + q_0 \mathrm{sign}\,(c\,(y-l)) & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c\,(y-l)| > q_0,\\ 0 & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c\,(y-l)| \leqslant q_0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) являє собою систему трьох звичайних диференціальних рівнянь, причому друге і третє рівняння мають змінну структуру. Початкові умови на першій стадії першого циклу руху (тобто при $k = 1$) визначаються за умовою задачі і мають вигляд:

$$\xi\,(0) = 0, \quad \dot{\xi}\,(0) = \dot{\xi}_0, \quad \eta\,(0) = \eta_0, \quad \dot{\eta}\,(0) = 0, \quad y\,(0) = l, \quad \dot{y}\,(0) = 0. \tag{12}$$

На усіх інших циклах руху ($k > 1$) початкові умови мають вигляд: $\xi\,(t_{k-1,2})$, $\dot{\xi}\,(t_{k-1,2})$, $\eta\,(t_{k-1,2}) = 0$, $\dot{\eta}\,(t_{k-1,2}) = 0$, $y\,(t_{k-1,2})$ і $\dot{y}\,(t_{k-1,2})$ і являють собою значення координат і швидкостей ξ, $\dot{\xi}$, η, $\dot{\eta}$, y і $\dot{y}$ відповідно у момент часу $t_{k-1,2}$, в який відбувається перехід від другої стадії $k-1$-го циклу до першої стадії k-го циклу. Значення координати $\eta\,(t_{k-1,2})$ і швидкості $\dot{\eta}\,(t_{k-1,2})$ були отримані з рівняння в'язі (1).

Розглянемо спочатку систему рівнянь (11) на першій стадії першого ($k = 1$) циклу руху. Оскільки початкові умови мають вигляд (12), то можна помітити, що на першій стадії першого циклу виконуються умови $\dot{y} = 0$ і $|c\,(y-l)| = 0 < q_0$, а, отже, система (11) зводиться до:

$$\ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = -g, \quad \ddot{y} = 0. \tag{13}$$

Рівняння системи (13) при початкових умовах (12) мають розв'язок:

$$\xi = \dot{\xi}_0 t, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0, \quad \eta = \eta_0 - \frac{gt^2}{2}, \quad \dot{\eta} = -gt, \quad y = l, \quad \dot{y} = 0. \tag{14}$$

Для того, щоб розв'язати систему (11) при $k > 1$, зазначимо, що перше і третє рівняння можуть бути розв'язані незалежно від другого і одне від одного. Розв'язок першого рівняння системи (11) загальновідомий і має при $k > 1$ вигляд:

$$\xi = \xi\left(t_{k-1,2}\right) + \dot{\xi}\left(t_{k-1,2}\right)\left(t - t_{k-1,2}\right), \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}\left(t_{k-1,2}\right). \tag{15}$$

У роботі [9] було наведено аналітичний і чисельний розв'язки диференціального рівняння, що має вигляд, аналогічний до третього рівняння системи (11). Будемо вважати, що за умовою задачі виконується нерівність $c > \frac{n^2 M}{m_c m_p}$. Спираючись на результати, отримані у вказаній роботі, знаходимо аналітичний розв'язок третього рівняння системи (11) при $k > 1$ і за умови, що $\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right) \neq 0$, у вигляді:

$$\begin{gathered}
\dot{y} = -A_{ki}\delta e^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \varphi_k\right) - A_{ki}\omega e^{-\delta t}\sin\left(\omega t + \varphi_k\right), \\
y = A_{ki}e^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \varphi_k\right) + l - \frac{q_0}{c}\operatorname{sign}\left(\dot{y}\right), \quad i = 0, 1, 2, ..., \\
\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{\left(\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right) + B\delta\right)\cos\omega t_{k-1,2} + B\omega\sin\omega t_{k-1,2}}{\left(\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right) + B\delta\right)\sin\omega t_{k-1,2} - B\omega\cos\omega t_{k-1,2}}, \\
B = y\left(t_{k-1,2}\right) - l + \frac{q_0}{c}\operatorname{sign}\left(\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right)\right), \\
\delta = \frac{nM}{m_c m_p}, \quad \omega = \sqrt{\frac{cM}{m_c m_p} - \frac{n^2 M^2}{m_c^2 m_p^2}}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Індекс i у розв'язку (16) дорівнює нулю у моменти часу $t_{k-1,2}$ і збільшується на одиницю кожен раз, коли система проходить через $\dot{y} = 0$. Моменти часу T_{ki}, в які система i-й раз проходить через $\dot{y} = 0$ на k-му циклі, визначаються за формулою:

$$T_{ki} = -\frac{1}{\omega}\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\omega} + \varphi_k - \pi\left(p_k + i - 1\right)\right), \tag{17}$$

де p_k – найменше ціле число, для якого виконується умова $T_{ki} \geqslant t_{k-1,2}$. Знаючи T_{ki}, можна визначити величини A_{ki} за допомогою співвідношень:

$$\begin{gathered}
A_{k,0} = \frac{e^{\delta t_{k-1,2}}}{\omega}\sqrt{\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right)^2 + B^2\left(\delta^2 + \omega^2\right) + 2\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right)B\delta}, \\
A_{ki} = A_{k,0} - \frac{2q_0}{c}\frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega}e^{\delta T_{ki}}\sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\delta\pi\alpha}{\omega}}, \quad (i > 0),
\end{gathered} \tag{18}$$

де B визначено у формулах (16).

Кожен раз, коли має місце ситуація $\dot{y} = 0$, необхідно перевіряти, чи виконується умова $|c\left(y - l\right)| > q_0$. Якщо дана умова виконується, то швидкість $\dot{y}$ змінює знак при проходженні через нульове значення, якщо ні – залишається нулем до тих пір, поки ця умова не почне виконуватися. Як бачимо, для перевірки виконання вказаної умови необхідно знати значення координати y у моменти часу T_{ki}, тобто $y\left(T_{ki}\right)$. Значення $y\left(T_{ki}\right)$ можна знайти шляхом підстановки (17) і (18) у (16). В результаті маємо:

$$y\left(T_{ki}\right) = \left(A_{k,0}e^{-\delta T_{ki}}\frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{2q_0}{c}\sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\delta\pi\alpha}{\omega}} + \frac{q_0}{c}\right)(-1)^{p_k + i - 1} + l, \tag{19}$$

Якщо у певний момент часу T_{ki} має місце нерівність $|c\,(y\,(T_{ki})-l)| \leqslant q_0$, то рух поршня відносно циліндра припиняється і, починаючи з даного моменту часу, розв'язок третього рівняння системи (11) має вигляд:

$$y = y\,(T_{ki})\,, \quad \dot{y} = 0. \tag{20}$$

Ситуація, котра описується співвідношеннями (20), матиме місце до тих пір, поки у момент часу t_{k1} поршень не почне рух відносно циліндра в результаті удару останнього об площину $\eta = 0$.

Формули (16)-(20) являють собою розв'язок третього рівняння системи (11) за умови, що початкова швидкість $\dot{y}\,(t_{k-1,2}) \neq 0$. Якщо ж має місце ситуація, коли $\dot{y}\,(t_{k-1,2}) = 0$ і $|c\,(y\,(t_{k-1,2})-l)| > q_0$, то розв'язок визначатиметься формулами, що мають той самий вигляд, що і (16)-(20), але з тією різницею, що замість $\mathrm{sign}\,(\dot{y}\,(t_{k-1,2}))$ у цих формулах буде $(-\mathrm{sign}\,[c\,(y\,(t_{k-1,2})-l)])$. Що ж стосується ситуації, коли $\dot{y}\,(t_{k-1,2}) = 0$ і $|c\,(y\,(t_{k-1,2})-l)| \leqslant q_0$, то її немає сенсу розглядати, оскільки у такому випадку рух поршня відносно циліндра буде відсутній, а, отже, циліндр не відірветься від площини $\eta = 0$ і перехід на наступний цикл не відбудеться.

Залишається знайти розв'язок другого рівняння системи (11). Для того, щоб це зробити, додамо друге і третє рівняння даної системи. В результаті отримаємо:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\eta + \frac{m_p}{M}y\right) = -g. \tag{21}$$

Нескладно переконатися у тому, що рівняння (21) описує рух центра мас у вертикальному напрямку в системі $O\xi\eta$. Розв'язуючи дане рівняння при початкових умовах, що були визначені вище, знаходимо значення координати η і швидкості $\dot{\eta}$ у вигляді:

$$\eta = \frac{m_p}{M}\,(y\,(t_{k-1,2})-y) + \frac{m_p}{M}\dot{y}\,(t_{k-1,2})\,(t-t_{k-1,2}) - \frac{g\,(t-t_{k-1,2})^2}{2},$$

$$\dot{\eta} = \frac{m_p}{M}\,(\dot{y}\,(t_{k-1,2})-\dot{y}) - g\,(t-t_{k-1,2})\,, \tag{22}$$

де y і $\dot{y}$ визначаються за допомогою формул (16)-(20).

Формули (14)-(20) і (22) являють собою розв'язок диференціальних рівнянь (11), які описують динаміку системи при $\eta > 0$. У моменти часу t_{k1} дана умова перестає виконуватися, оскільки на систему накладається геометрична в'язь $\eta = 0$. На першій стадії першого циклу відповідний момент часу $t_{1,1}$ може бути знайдений із розв'язку (14), якщо покласти $\eta = 0$ у відповідному співвідношенні. В результаті маємо:

$$t_{1,1} = \sqrt{\frac{2\eta_0}{g}}. \tag{23}$$

Моменти часу t_{k1} при $k > 1$ визначаються з першого співвідношення (22), якщо у ньому покласти $\eta = 0$. Алгебраїчне рівняння відносно t_{k1}, отримане вказаним шляхом, може бути розв'язане аналітично лише у тому випадку, коли рух поршня відносно циліндра припинився під дією сил кулонового тертя раніше, ніж виник контакт з поверхнею $\eta = 0$. Дійсно, після того, як рух поршня відносно циліндра

припинився, розв'язок третього рівняння системи (11) має вигляд (20). Якщо підставити (20) у перше із співвідношень (22) і покласти $\eta = 0$, то отримаємо алгебраїчне рівняння, яке має аналітичний розв'язок:

$$\begin{aligned} t_{k1} = t_{k-1,2} + \tfrac{1}{g}\tfrac{m_p}{M}\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right) + \\ + \tfrac{1}{g}\sqrt{\left(\tfrac{m_p}{M}\dot{y}\left(t_{k-1,2}\right)\right)^2 - 2g\tfrac{m_p}{M}\left(y\left(T_{ki}\right) - y\left(t_{k-1,2}\right)\right)}, \end{aligned} \tag{24}$$

де $k > 1$, а $y\left(T_{ki}\right)$ визначається за формулами (20).

Якщо рух поршня не припинився за час, поки виконується умова $\eta > 0$, то алгебраїчне рівняння відносно t_{k1} при $k > 1$ не може бути розв'язане аналітично, оскільки координата y, що входить до першого співвідношення (22), визначається за формулами (16). Для чисельного розв'язку вказаного алгебраїчного рівняння може бути застосований метод хорд [8].

4. Рух системи при наявності контакту із площиною. У моменти часу t_{k1} на систему накладається геометрична в'язь (1). При цьому відбувається абсолютно непружний механічний удар абсолютно твердого циліндра маси m_c з абсолютно твердою шорсткою площиною. Нормальна до площини складова $\dot{\eta}$ швидкості циліндра обертається при ударі в нуль. Отже, маємо:

$$\dot{\tilde{\eta}}\left(t_{k1}\right) = 0. \tag{25}$$

Тут і далі позначення «$\sim$» над символом означає, що мається на увазі значення величини, яке вона має матиме після удару.

Оскільки між площиною і циліндром при контакті виникають сили кулонового тертя, то в результаті механічного удару змінюватиметься не лише нормальна $\dot{\eta}$, а й дотична $\dot{\xi}$ складова швидкості циліндра. Визначити миттєву зміну дотичної складової швидкості, коли відома миттєва зміна нормальної складової швидкості, можна за допомогою гіпотези Рауса [10, 11] Згідно з цією гіпотезою, дотична складова швидкості в результаті удару може або зменшитися за модулем (але не змінити знак) на певну величину, або обернутися в нуль. Застосовуючи гіпотезу Рауса до системи, що вивчається, знаходимо дотичну до площини складову швидкості після миттєвого накладання в'язі (1) у вигляді:

$$\dot{\tilde{\xi}}\left(t_{k1}\right) = \begin{cases} \dot{\xi}\left(t_{k1}\right) - \frac{\mu m_c |\dot{\eta}(t_{k1})| \operatorname{sign}\left(\dot{\xi}(t_{k1})\right)}{M} & \text{при } M\left|\dot{\xi}\left(t_{k1}\right)\right| > \mu m_c \left|\dot{\eta}\left(t_{k1}\right)\right|, \\ 0 & \text{при } M\left|\dot{\xi}\left(t_{k1}\right)\right| \leqslant \mu m_c \left|\dot{\eta}\left(t_{k1}\right)\right|. \end{cases} \tag{26}$$

Варто зазначити, що величина $\dot{\tilde{\xi}}\left(t_{k1}\right)$, визначена співвідношенням (26), являє собою горизонтальну складову швидкості і циліндра і поршня, оскільки у горизонтальному напрямку система рухається, як єдине ціле.

Вертикальна складова швидкості поршня у системі координат $O\xi\eta$ не зміниться при миттєвому накладанні в'язі $\eta = 0$. А от у системі координат O_1xy вона зміниться, оскільки точка O_1 зв'язана з циліндром, нормальна складова швидкості якого при ударі обертається в нуль. Отже, враховуючи сказане і формулу (25), знаходимо значення вертикальної складової швидкості поршня у системі координат O_1xy у вигляді:

$$\dot{\tilde{y}}\left(t_{k1}\right) = \dot{\eta}\left(t_{k1}\right) + \dot{y}\left(t_{k1}\right). \tag{27}$$

Що ж стосується значень координат, то вони при ударі абсолютно твердих тіл не змінюються. Отже, враховуючи, що у моменти часу t_{k1} на систему накладається в'язь $\eta = 0$, можемо записати:

$$\widetilde{\xi}\left(t_{k1}\right) = \xi\left(t_{k1}\right), \quad \widetilde{\eta}\left(t_{k1}\right) = \eta\left(t_{k1}\right) = 0, \quad \widetilde{y}\left(t_{k1}\right) = y\left(t_{k1}\right). \tag{28}$$

Рівняння динаміки (4) з урахуванням (8), (9) і (10), а також рівності $\eta = 0$, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&M\ddot{\xi} = \begin{cases} F_{1\xi} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ F_{2\xi} & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left|c\left(y-l\right)+m_p g\right| > q_0, \\ -\mu M g \operatorname{sign}\left(\dot{\xi}\right) & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left|c\left(y-l\right)+m_p g\right| \leqslant q_0, \end{cases} \\
&\ddot{\eta} = 0, \\
&m_p\ddot{y} = \begin{cases} F_{1y} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ F_{2y} & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left|c\left(y-l\right)+m_p g\right| > q_0, \\ 0 & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left|c\left(y-l\right)+m_p g\right| \leqslant q_0, \end{cases} \\
&F_{1\xi} = -\mu\left(m_c g - c\left(y-l\right) - 2n\dot{y} - q_0 \operatorname{sign}\left(\dot{y}\right)\right) \operatorname{sign}\left(\dot{\xi}\right), \\
&F_{2\xi} = -\mu\left(m_c g - c\left(y-l\right) + q_0 \operatorname{sign}\left(c\left(y-l\right)+m_p g\right)\right) \operatorname{sign}\left(\dot{\xi}\right), \\
&F_{1y} = -c\left(y-l\right) - 2n\dot{y} - m_p g - q_0 \operatorname{sign}\left(\dot{y}\right), \\
&F_{2y} = -c\left(y-l\right) - m_p g + q_0 \operatorname{sign}\left(c\left(y-l\right)+m_p g\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

Рівняння (29) описують динаміку системи при $\eta = 0$. Початковий момент часу дорівнює t_{k1}, а початкові значення координат і швидкостей визначаються за формулами (25)-(28).

Друге і третє рівняння системи (29) можуть бути розв'язані незалежно від першого і одне від одного. Друге рівняння має розв'язок:

$$\eta = \widetilde{\eta}\left(t_{k1}\right) = 0, \quad \dot{\eta} = \dot{\widetilde{\eta}}\left(t_{k1}\right) = 0, \tag{30}$$

який узгоджується з рівнянням в'язі $\eta = 0$.

Третє рівняння системи (29) має ті ж самі властивості, що і третє рівняння системи (11), а, отже, може бути розв'язане у аналогічний спосіб. За умови, що початкова швидкість $\dot{\widetilde{y}}\left(t_{k1}\right) \neq 0$, третє рівняння системи (29) має при початкових умовах (25)-(28) розв'язок:

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = -\widetilde{A}_{ki}\widetilde{\delta}e^{-\widetilde{\delta}t}\cos\left(\widetilde{\omega}t + \widetilde{\varphi}_k\right) - \widetilde{A}_{ki}\widetilde{\omega}e^{-\widetilde{\delta}t}\sin\left(\widetilde{\omega}t + \widetilde{\varphi}_k\right), \\
&y = \widetilde{A}_{ki}e^{-\widetilde{\delta}t}\cos\left(\widetilde{\omega}t + \widetilde{\varphi}_k\right) + l - \frac{m_p g}{c} - \frac{q_0}{c}\operatorname{sign}\left(\dot{y}\right), \\
&\widetilde{\varphi}_k = \operatorname{arctg}\frac{\left(\dot{\widetilde{y}}\left(t_{k1}\right) + \widetilde{B}\widetilde{\delta}\right)\cos\widetilde{\omega}t_{k1} + \widetilde{B}\widetilde{\omega}\sin\widetilde{\omega}t_{k1}}{\left(\dot{\widetilde{y}}\left(t_{k1}\right) + \widetilde{B}\widetilde{\delta}\right)\sin\widetilde{\omega}t_{k1} - \widetilde{B}\widetilde{\omega}\cos\widetilde{\omega}t_{k1}}, \\
&\widetilde{B} = y\left(t_{k1}\right) - l + \frac{m_p g}{c} + \frac{q_0}{c}\operatorname{sign}\left(\dot{\widetilde{y}}\left(t_{k1}\right)\right), \\
&\widetilde{\delta} = \frac{n}{m_p}, \quad \widetilde{\omega} = \sqrt{\frac{c}{m_p} - \frac{n^2}{m_p^2}}, \quad i = 0, 1, 2, ...,
\end{aligned} \tag{31}$$

де $\dot{\widetilde{y}}(t_{k1})$ визначається за формулою (27). Відмітимо, що, оскільки $\frac{M}{m_c} = \frac{m_c+m_p}{m_c} > 1$ і, як було сказано вище, $c > \frac{n^2 M}{m_c m_p}$, то $\frac{c}{m_p} > \frac{n^2}{m_p^2}$, а, отже, $\widetilde{\omega}$ у формулах (31) буде дійсним числом.

Формули (31) за своїм механічним змістом аналогічні формулам (16). Співвідношення, аналогічні до (17)-(19), матимуть у випадку третього рівняння системи (29) вигляд:

$$\widetilde{T}_{ki} = -\frac{1}{\widetilde{\omega}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\delta}}{\widetilde{\omega}} + \widetilde{\varphi}_k - \pi\left(\widetilde{p}_k + i - 1\right)\right), \tag{32}$$

де $\widetilde{p}_k$ – найменше ціле число, для якого виконується умова $\widetilde{T}_{k1} \geqslant t_{k1}$.

$$\widetilde{A}_{k,0} = \frac{e^{\widetilde{\delta} t_{k1}}}{\widetilde{\omega}}\sqrt{\dot{\widetilde{y}}(t_{k1})^2 + \widetilde{B}^2\left(\widetilde{\delta}^2 + \widetilde{\omega}^2\right) + 2\dot{\widetilde{y}}(t_{k1})\widetilde{B}\widetilde{\delta}},$$

$$\widetilde{A}_{ki} = \widetilde{A}_{k,0} - \frac{2q_0}{c}\frac{\sqrt{\widetilde{\delta}^2 + \widetilde{\omega}^2}}{\widetilde{\omega}} e^{\widetilde{\delta}\widetilde{T}_{ki}} \sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\widetilde{\delta}\pi\alpha}{\widetilde{\omega}}}, \quad (i > 0), \tag{33}$$

$$y\left(\widetilde{T}_{ki}\right) = \left(\widetilde{A}_{k,0} e^{-\widetilde{\delta}\widetilde{T}_{ki}} \frac{\widetilde{\omega}}{\sqrt{\widetilde{\delta}^2 + \widetilde{\omega}^2}} - \frac{2q_0}{c}\sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\widetilde{\delta}\pi\alpha}{\widetilde{\omega}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{q_0}{c}\right)(-1)^{\widetilde{p}_k + i - 1} + l - \frac{m_p g}{c}. \tag{34}$$

Якщо у певний момент часу $\widetilde{T}_{ki}$ має місце нерівність $\left|c\left(y\left(\widetilde{T}_{ki}\right) - l\right) + m_p g\right| \leqslant q_0$, то рух поршня відносно циліндра припиняється і, починаючи з даного моменту часу, розв'язок третього рівняння системи (29) має вигляд:

$$y = y\left(\widetilde{T}_{ki}\right), \quad \dot{y} = 0. \tag{35}$$

Коли розв'язок третього рівняння системи (29) має вигляд (35), виконується нерівність $|c(y - l) + m_p g| \leqslant q_0$. Виконання даної нерівності при $\eta = 0$ і $\dot{y} = 0$ означає згідно з (9), що нормальна складова реакції буде $N = Mg$, а, отже, не обертатиметься в нуль. Звідси випливає, що, починаючи з того моменту часу, коли розв'язок третього рівняння системи (29) матиме вигляд (35), контакт циліндра з поверхнею $\eta = 0$ матиме місце нескінченно довго.

Формули (31)-(35) являють собою розв'язок третього рівняння системи (29) за умови, що початкова швидкість $\dot{\widetilde{y}}(t_{k1}) \neq 0$. Якщо ж має місце ситуація, коли $\dot{\widetilde{y}}(t_{k1}) = 0$ і $|c(y(t_{k1}) - l) + m_p g| > q_0$, то розв'язок визначатиметься формулами, що мають той самий вигляд, що і (31)-(35), але з тією різницею, що замість $\operatorname{sign}\left(\dot{\widetilde{y}}(t_{k1})\right)$ у цих формулах буде $(-\operatorname{sign}[c(y(t_{k1}) - l) + m_p g])$. Що ж стосується ситуації, коли $\dot{\widetilde{y}}(t_{k1}) = 0$ і $|c(y(t_{k1}) - l) + m_p g| \leqslant q_0$, то, починаючи з моменту часу t_{k1}, розв'язок матиме вигляд співвідношень (35), в яких замість $y\left(\widetilde{T}_{ki}\right)$ буде $y(t_{k1})$.

Залишається розв'язати перше рівняння системи (29). Для цього відмітимо спочатку, що права частина даного рівняння являє собою силу кулонового тертя.

Оскільки ніякі активні сили в напрямку $O\xi$ не діють, а площина $\eta = 0$ нерухома, то швидкість $\dot{\xi}$ не може змінити знак, а може лише обернутися в нуль.

Нехай початкова швидкість $\dot{\xi}_0 > 0$. Спираючись на вищесказане, необхідно знайти розв'язок першого рівняння системи (29) у двох випадках: при $\dot{\xi} > 0$ і при $\dot{\xi} = 0$. Розглянемо спочатку випадок $\dot{\xi} > 0$. Для того, щоб це зробити, врахуємо той факт, що $\operatorname{sign}\left(\dot{\xi}\right) = 1$ при $\dot{\xi} > 0$, помножимо ліву і праву частини третього рівняння системи (29) на μ і додамо отриманий результат до першого рівняння системи (29). Неважко переконатися, що в результаті, за умови, що $\dot{\xi} > 0$, при будь-яких значеннях $\dot{y}$ і $|c\,(y - l) + m_p g|$ отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(M\xi + \mu m_p y\right) = -\mu M g. \tag{36}$$

Розв'язок рівняння (36) при початкових умовах, що визначаються формулами (25)-(28), має вигляд:

$$\begin{aligned} &\xi = \xi\left(t_{k1}\right) - \tfrac{\mu m_p}{M}\left(y - y\left(t_{k1}\right)\right) + \\ &+ \left(\dot{\tilde{\xi}}\left(t_{k1}\right) + \tfrac{\mu m_p}{M}\dot{\tilde{y}}\left(t_{k1}\right)\right)\left(t - t_{k1}\right) - \tfrac{\mu g}{2}\left(t - t_{k1}\right)^2, \\ &\dot{\xi} = \dot{\tilde{\xi}}\left(t_{k1}\right) - \tfrac{\mu m_p}{M}\left(\dot{y} - \dot{\tilde{y}}\left(t_{k1}\right)\right) - \mu g\left(t - t_{k1}\right), \end{aligned} \tag{37}$$

де $\dot{\tilde{\xi}}\left(t_{k1}\right)$ визначається за формулою (26), $\dot{\tilde{y}}\left(t_{k1}\right)$ – формулою (27), а y і $\dot{y}$ – співвідношеннями (31)-(35). Оскільки у правих частинах співвідношень (37) стоять величини, знайдені нами раніше, то дані формули дозволяють знайти ξ і $\dot{\xi}$ при $\dot{\xi} > 0$.

Співвідношення (37) являють собою розв'язок першого рівняння системи (29) при $\dot{\xi} > 0$. Якщо ж $\dot{\xi} = 0$, то дане рівняння зводиться до вигляду:

$$\ddot{\xi} = 0. \tag{38}$$

Для розв'язання рівняння (38) необхідно знати момент часу, який ми позначимо t_S, коли швидкість $\dot{\xi}$ обертається в нуль. Якщо формула (26) дає $\dot{\tilde{\xi}}\left(t_{k1}\right) = 0$, то, очевидно, $t_S = t_{k1}$ і $\xi\left(t_S\right) = \xi\left(t_{k1}\right)$. У протилежному випадку t_S необхідно шукати шляхом розв'язку алгебраїчного рівняння, яке випливає зі співвідношення (37) для $\dot{\xi}$, якщо там покласти $\dot{\xi}$ і $t = t_S$. Отримане у такий спосіб алгебраїчне рівняння може бути розв'язане чисельно методом хорд [8]. Значення координати $\xi\left(t_S\right)$ знаходимо шляхом підстановки $t = t_S$ у перше зі співвідношень (37). Розв'язок рівняння (38) при початковому моменті часу t_S, початковій координаті $\xi\left(t_S\right)$ і початковій швидкості $\dot{\xi}\left(t_S\right) = 0$ має вигляд:

$$\xi = \xi\left(t_S\right), \quad \dot{\xi} = 0. \tag{39}$$

Співвідношення (30)-(35), (37) і (39) являють собою розв'язок диференціальних рівнянь (29), а, отже, описують динаміку системи при контакті з площиною $\eta = 0$. У моменти часу t_{k2} цей контакт зникає, тобто, відбувається відскакування циліндра від в'язі $\eta = 0$. Для того, щоб знайти моменти часу t_{k2}, відзначимо, що, оскільки в'язь (1) неутримуюча, то контакт циліндра із площиною $\eta = 0$ має місце до тих пір, поки виконується умова $N > 0$. З формули (9) випливає,

що нормальна складова реакції N може зменшитися до нуля лише у одному з двох випадків: $\dot{y} \neq 0$ або $\dot{y} = 0$ і $|c(y-l) + m_p g| > q_0$. У випадку, коли $\dot{y} = 0$ і $|c(y-l) + m_p g| \leqslant q_0$, формула (9) дає $N = Mg > 0$. Отже, враховуючи сказане, знаходимо рівняння відносно t_{k2} шляхом підстановки співвідношень (31)-(34) у формулу (9) і покладаючи $t = t_{k2}$ і $N = 0$. Отримане у такий спосіб алгебраїчне рівняння може бути розв'язане чисельно методом хорд [8].

5. Аналіз динаміки системи при конкретних значеннях параметрів і початкових умовах. Виберемо наступні значення параметрів системи:

$$\begin{array}{l} m_c = 0,1\text{кг}, \quad m_p = 1\text{кг}, \quad l = 0,1\text{м}, \\ c = 2000\text{Н/м}, \quad n = 1\text{Н}\cdot\text{с/м}, \quad \mu = 0,4, \\ q_0 = 0,5\text{Н}, \quad \dot{\xi}_0 = 6\text{м/с}, \quad \eta_0 = 0,04\text{м}. \end{array} \tag{40}$$

Початкові умови визначаються формулами (12).

У таблиці 1 наведено результати обчислення величин t_{k1} і t_{k2}, а також тих моментів часу T_{ki} і $\widetilde{T}_{ki}$, коли рух поршня відносно циліндра припиняється, і відповідні значення $y(T_{ki})$ і $y\left(\widetilde{T}_{ki}\right)$. Ті моменти часу T_{ki} і $\widetilde{T}_{ki}$, коли рух поршня відносно циліндра не припиняється, в таблиці 1 наведені не будуть.

k	T_{ki}, с	$y(T_{ki})$,м	t_{k1}, с	t_{k2}, с	$\widetilde{T}_{ki}$, с	$y\left(\widetilde{T}_{ki}\right)$,м
1	–	–	0,0903	0,1719	–	–
2	$T_{2,6} = 0,2882$	0,1001	0,3156	0,4006	–	–
3	$T_{3,5} = 0,4953$	0,1000	0,5120	0,6017	–	–
4	$T_{4,4} = 0,6743$	0,0998	0,6847	0,7812	–	–
5	–	–	0,8359	0,9502	–	–
6	–	–	0,9753	–	$\widetilde{T}_{6,9} = 1,5906$	0,0952

Таблиця 1. Результати обчислення величин t_{k1}, t_{k2}, T_{ki}, $y(T_{ki})$, $\widetilde{T}_{ki}$ і $y\left(\widetilde{T}_{ki}\right)$.

Як можна бачити з таблиці 1, відскакування циліндра від площини $\eta = 0$ при початкових умовах (12) і значеннях параметрів (40) відбувається п'ять разів. На перших стадіях другого, третього і четвертого циклів рух поршня відносно циліндра припиняється раніше, ніж відбувається удар останнього об площину $\eta = 0$. Причому, на другому циклі рух поршня відносно циліндра припиняється, коли ситуація $\dot{y} = 0$ трапляється в шостий раз, на третьому – в п'ятий, а на четвертому – в четвертий. На перших стадіях п'ятого і шостого циклів рух циліндра відносно поршня не встигає припинитися раніше, ніж відбувається удар. На шостому циклі відскакування циліндра від площини $\eta = 0$ не відбувається. Рух поршня відносно циліндра на другій стадії шостого циклу припиняється тоді, коли ситуація $\dot{y} = 0$ трапляється в дев'ятий раз.

Рух циліндра у горизонтальному напрямку припиняється на другій стадії шостого циклу в момент часу $t_S = 1,5293$с.

На рис. 3 наведено графік залежності координати y від часу t на інтервалі $t \in [0; 1,7]$ с.

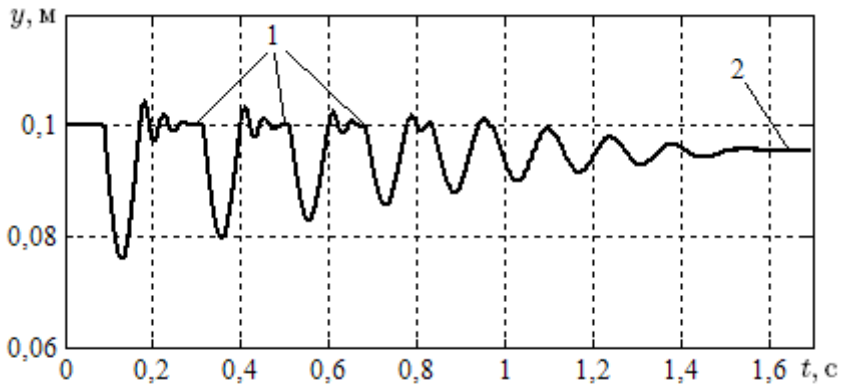

Рис. 3

З графіку на рис. 3 видно, що рух циліндра і поршня один відносно другого у вертикальному напрямку являють собою складний коливальний процес. Причому, частоти коливань при $\eta > 0$ і $\eta = 0$ різні. Це узгоджується з формулами (16) і (31), які при значеннях параметрів (40) дають для $\eta > 0$ частоту $\omega \approx 148\text{с}^{-1}$, а для $\eta = 0$ буде $\widetilde{\omega} \approx 45\text{с}^{-1}$. Коливання в системі затухають внаслідок дії сил в'язкого і кулонового тертя. На перших стадіях другого, третього і четвертого циклів рух поршня і циліндра один відносно другого припиняється повністю, внаслідок чого на графіку виникають інтервали, для яких $y = y\left(T_{ki}\right) = \text{const}$ (T_{ki} і відповідні значення $y\left(T_{ki}\right)$ наведені у таблиці 1). На рис. 3 вказані інтервали позначені цифрою 1. На п'ятому і шостому циклах така зупинка не відбувається. Це означає, що на п'ятому і шостому циклах удар циліндра об площину $\eta = 0$ відбувається за наявності руху в системі O_1xy. В результаті величина ударного імпульсу залежатиме не лише від вертикальної складової швидкості руху центра мас у системі $O\xi\eta$, а й від швидкості руху циліндра відносно центра мас системи. Це треба враховувати при проектуванні механізмів, в яких може виникати фрикційно-ударна взаємодія. На другій стадії шостого циклу відскакування циліндра від площини $\eta = 0$ не відбувається, коливання затухають і в момент часу $\widetilde{T}_{6,9} = 1,5906\text{с}$ рух поршня відносно циліндра припиняється. Ділянка графіку, для якої $y = y\left(\widetilde{T}_{6,9}\right) = 0,0952\text{м} = \text{const}$, позначена на рис. 3 цифрою 2.

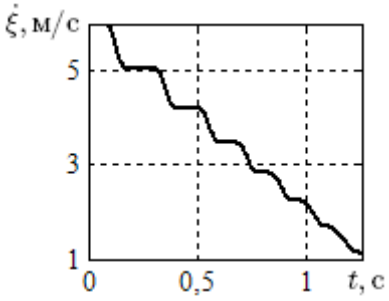

Рис. 4

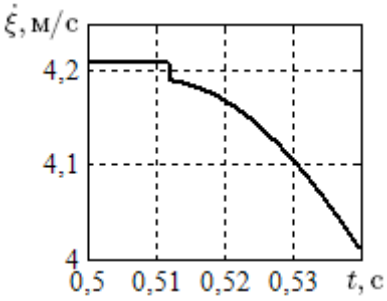

Рис. 5

На рис. 4 і 5 наведено графік залежності швидкості $\dot{\xi}$ від часу t на інтервалах $t \in [0; 1,25]$ с і $t \in [0,5; 0,54]$ с відповідно. Залежність на рис. 4 являє собою послідовність інтервалів, на яких швидкість $\dot{\xi}$ стала, що має місце при $\eta > 0$, і інтервалів, на яких вона зменшується, що характерно для ситуації $\eta = 0$. Останній інтервал часу, для якого швидкість $\dot{\xi}$ відмінна від нуля і стала, закінчується в момент часу $t_{6,1} = 0,9753$с, (див. таблицю 1), коли відбувається перехід від першої до другої стадії шостого циклу.

З графіку на рис. 5 видно, що залежність $\dot{\xi}$ від t є розривною. Розрив, який можна побачити на рис. 5, виникає через те, що в момент часу $t_{3,1} = 0,5120$с відбувається механічний удар абсолютно твердого циліндра з абсолютно твердою шорсткою площиною. Миттєва зміна швидкості $\dot{\xi}$ при ударі була описана за допомогою гіпотези Рауса, яка в нашому випадку зводиться до формули (26). Очевидно, розриви такого типу мають місце у кожен з моментів часу t_{k1}. Для того, щоб залежності швидкостей від часу були неперервними, необхідно при побудові механіко-математичних моделей вводити безінерційні пружні елементи в тих частинах системи, де відбувається удар абсолютно твердих тіл.

На рис. 6 наведено графік залежності нормальної складової N реакції в'язі (1) від часу t на інтервалі $t \in [0,8; 1,7]$ с.

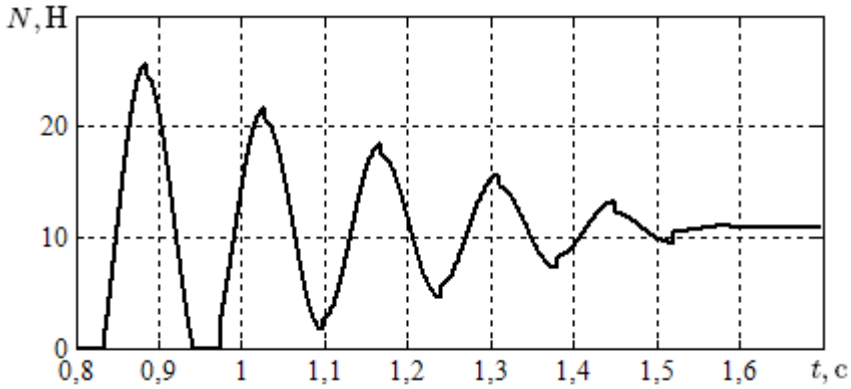

Рис. 6

Як можна бачити з рис. 6, залежність N від t є розривною. Наявність розривів пов'язана з тим, що, як видно з (9), нормальна складова реакції N залежить від сили кулонового тертя між циліндром і поршнем, яка є розривною. Отже, розриви мають місце в моменти часу $\tilde{T}_{ki}$, коли трапляється ситуація $\dot{y} = 0$ при наявності контакту циліндра із площиною $\eta = 0$. Інтервали часу, для яких $N = 0$, мають місце на першій стадії кожного циклу, тобто при $t \in [t_{k-1,2}; t_{k1}]$.

На рис. 7 наведено траєкторію руху точки O_1 циліндра у системі відліку $O\xi\eta$. Траєкторія руху точки O_1 циліндра, наведена на рис. 7, являє собою послідовність інтервалів, для яких $\eta > 0$, і інтервалів, для яких $\eta = 0$. При $\eta = 0$ отриманий вид траєкторії є результатом ковзання циліндра вздовж площини. Якщо $\eta > 0$, то траєкторія виникає внаслідок суперпозиції руху центра мас в системі $O\xi\eta$ і руху точки O_1 відносно центра мас. Цим пояснюється, наприклад, той факт, що на третьому циклі руху можна побачити два максимуми на графіку. Коли рух циліндра і поршня один відносно другого відсутній, то траєкторія руху точки O_1 при $\eta > 0$ являє собою параболу.

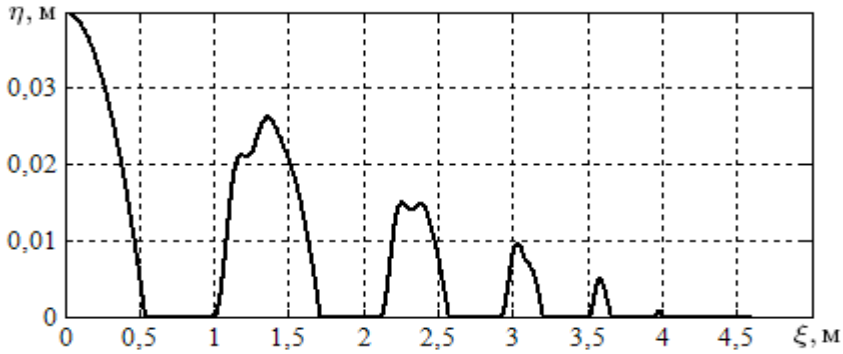

Рис. 7

Висновки. Побудовані і розв'язані рівняння динаміки редукованої до першого порядку ланцюгової віброударної системи з кулоновим тертям, яка пропонується в якості моделі явищ, що відбуваються під час косого удару твердого тіла та абсолютно твердої шорсткої площини. Розв'язки рівнянь динаміки мають розриви по швидкості у моменти часу, коли відбувається удар абсолютно твердого тіла з абсолютно твердою шорсткою площиною. Розривів по координаті в моменти, коли відбувається удар, немає. Коли швидкість обертається в нуль, або змінює знак, розривів по координаті і швидкості немає, а є лише розриви по силі реакції. Такі результати узгоджуються з положеннями теоретичної механіки, а, отже, свідчать про те, що система диференціальних рівнянь зі змінною структурою була розв'язана правильно.

За час, поки виконується умова $\eta > 0$, коливання циліндра і поршня один відносно другого можуть або зникнути під дією сил кулонового тертя, або затухати не остаточно. Це залежить від параметрів конкретної системи, що вивчається, та інтервалу часу, протягом якого виконується умова $\eta > 0$. Коливання можуть викликати перевантаження в системі при механічному ударі. Отже, можливість повного або часткового затухання коливань під дією сил кулонового тертя варто враховувати при проектуванні механізмів, динаміка яких може бути змодельована за допомогою віброударних систем.

1. **Кожевников С. Н.** Динамика нестационарных процессов в машинах [Текст] / С. Н. Кожевников. — К. : Наукова думка, 1986. — 288 с.

2. **Ларин В. Б.** Проблемы динамики прокатных станов [Текст] / В. Б. Ларин, Е. Я. Антонюк, И. А. Бобух, В. В. Веренев, С. А. Ясинский // Прикладная механика. — 1997. — Т. 33 (43), № 3. — С. 3–27.

3. **Вибрации** в технике [Текст] : В 6 т. Т. 2 : Колебания нелинейных механических систем / под ред. И. И. Блехмана. — М. : Машиностроение, 1979. — 351 с.

4. **Stewart D. E.** Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact [Text] / D. E. Stewart // SIAM Review. — 2000. — Vol. 42, № 1. — pp. 3–39.

5. **Ларин В. Б.** Понижение порядка нелинейной модели прокатного стана [Текст] / В. Б. Ларин, С. А. Ясинский // Автоматика. — 1992. — № 5. — С. 17–25.

6. **Ларин В. Б.** Понижение порядка динамической модели прокатного стана [Текст] / В. Б. Ларин, А. М. Педченко, А. И. Ткачук, С. А. Ясинский // Автоматика. — 1992. — № 2. — С. 67–75.

7. **Алиев Ф. А.** О блочной диагонализации грамианов и редукции линейных управляемых систем [Текст] / Ф. А. Алиев, В. Б. Ларин, С. А. Ясинский // Теория и системы управления. — 1995. — № 4. — С. 16–25.

8. **Zabuga A. G.** Specificity of Numerical Integration of Second-order Differential Equations for Systems with Coulomb Friction [Text] / A. G. Zabuga // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — №1 (115). — pp. 173–182.

9. **Демидович Б. П.** Основы вычислительной математики [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1966. — 664 с.

10. **Пановко Я. Г.** Введение в теорию механического удара [Текст] / Я. Г. Пановко. — М. : Наука, 1977. — 224 с.

11. **Забуга А. Г.** К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием [Текст] / А. Г. Забуга, Е. Я. Антонюк, И. А. Бобух, Е. В. Соколов // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2013. — Т. 18, вип. 2(18). — С. 105–121.

Плахтиенко Н. П., *Забуга А. Г.*

Нелинейная модель фрикционно-ударного взаимодействия твердого тела с твердой шероховатой плоскостью

Резюме

Исследована динамика редуцированной до первого порядка цепной виброударной системы с кулоновым трением, которая предлагается в качестве модели явлений, происходящих при косом ударе твердого тела об абсолютно твердую шероховатую плоскость. Многократные удары с трением были исследованы при помощи гипотезы Рауса. Было предложено рассматривать каждый удар, как такой, что состоит из двух последовательных стадий. Первая стадия представляет собой движение цепной виброударной системы без наличия контакта с твердой шероховатой плоскостью. Вторая стадия представляет собой скольжение с кулоновым трением цепной виброударной системы по твердой шероховатой плоскости. Показано, что возможность полного затухания колебаний в цепной виброударной системе зависит от интервала времени между двумя последовательными ударами.

Ключевые слова: фрикционно-ударное взаимодействие, виброударная система, переменная структура, гипотеза Рауса, косой удар, кулоново трение, вязкое трение, принцип Даламбера.

Plakhtienko M. P., *Zabuga A. G.*

Nonlinear model of frictional impact of rigid body with rigid rough plane

Summary

Dynamics of reduced to the first order chain vibratory impact system with Coulomb friction is investigated. This system is suggested as a model of phenomena that occur under oblique impact of rigid body with perfectly rigid rough plane. Multiple impacts with friction were investigated by using of Routh approach. It was considered that every impact consists of two

consecutive stages. First stage is motion without contact between chain vibratory impact system and rough rigid plane. Second stage is slipping motion with Coulomb friction of chain vibratory impact system on rough rigid plane. It was shown that possibility of complete damping of oscillations in chain vibratory impact system depends on time between two consecutive impacts.
Key words: frictional impact, vibratory impact system, variable structure, Routh approach, oblique impact, Coulomb friction, viscous friction, d'Alembert principle.

References

1. Kozhevnikov, S. N. (1986). *Dinamika nestatsionarnyh processov v mashinah. [Nonstationary Processes Dynamics in Machines].* Moscow: Nauka [in Russian].
2. Larin, V. B., Antonyuk, E. Ya., Bobukh, I. A., Verenev, V. V. & Yasinskij, S. A. (1997). Problemy dinamiki prokatnyh stanov. [Problems of Dynamics of Rolling Mills]. *Prikladnaya Mekhanika – International Applied Mechanics*, Vol. 33 (43), No. 3, 3–27 [in Russian].
3. Blekhman, I. I. (1979). *Vibracii v tehnike. [Vibrations in Technology].* Moscow: Mashinostroenie [in Russian].
4. Stewart, D. E. (2000). Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact. *SIAM Review*, Vol. 42, 1, 3-39.
5. Larin, V. B. & Yasinskij, S. A. (1992). Ponizhenie poryadka nelinejnoi modeli prokatnogo stana. [Reduction of Order of Nonlinear Model of Rolling Mill]. *Avtomatika – Automatics*, No. 5, 17–25 [in Russian].
6. Larin, V. B., Pedchenko, A. M., Tkachuk, A. I. & Yasinskij, S. A. (1992). Ponizhenie poryadka dinamicheskoi modeli prokatnogo stana. [Reduction of Order of Dynamical Model of Rolling Mill]. *Avtomatika – Automatics*, No. 2, 67–75 [in Russian].
7. Aliev, F. A., Larin, V. B. & Yasinskij, S. A. (1995). O blochnoi digonalizacii gramianov i redukcii linejnyh upravlyaemyh sistem. [About Block Diagonalization of Gramm Matrices and Reduction of Linear Controllable Systems]. *Teoriya i sistemy upravleniya – Theory and Systems of Controlling*, No. 4, 16–25 [in Russian].
8. Demidovich, B. P. & Maron, I. A. (1966). *Osnovy vychislitelnoi matematiki. [Fundamentals of Computational Mathematiks].* Moscow: Nauka [in Russian].
9. Zabuga, A. G. (2014). Specificity of Numerical Integration of Second-order Differential Equations for Systems with Coulomb Friction. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 115, 1, 173-182.
10. Panovko, Ya. G. (1977). *Vvedenie v teoriyu mehanicheskogo udara. [Introduction to Impact Mechanics].* Moscow: Nauka [in Russian].
11. Zabuga, A. G., Antonyuk, E. Ya., Bobukh, I. A., & Sokolov, E. V. (2013). K voprosu o dinamike soudareniya v slozhnyh sistemah s frikcionnym vzaimodeistviem. [About impact dynamics of perfectly rigid bodies in complex systems with friction interaction]. *Visnyk Odeskoho Natsionalnoho Universytetu. Matematyka i Mekhanika – Bulletin of the Odessa National University. Mathematics and Mechanics*, Vol. 18, No. 2, 105–121 [in Russian].