

УДК 517.5

Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**НЕРАВЕНСТВО ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ
ДРОБНО–ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ
ПОЛИНОМОВ В L_0**

Исследование решений интегральных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами, а также задачи, связанные с рядами Фурье суммируемых функций привели к появлению дробно–логарифмических производных и интегралов. В данной статье рассматриваются дробно–логарифмические производные алгебраических и тригонометрических полиномов. Особое внимание уделяется случаю, когда в определении дробно–логарифмической производной степенной множитель равен единице. В работе установлены неравенства типа Бернштейна для чисто–логарифмических производных алгебраических и тригонометрических полиномов в пространстве L_0 . При этом тригонометрический случай получен при помощи алгебраического.

MSC: 33C50, 33C52, 42B15, 42C10.

Ключевые слова: мера полинома по Маллеру, дробно–логарифмическая производная, неравенство типа Бернштейна.

ВВЕДЕНИЕ. Возросший интерес к интегрированию дробного порядка привел ко всевозможным обобщениям понятия дробной производной и интеграла для различных классов функций и операторов. В определениях наряду со степенными множителями возникли и логарифмические.

Появлению дробно–логарифмических производных и интегралов способствовали исследования решений интегральных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами, а также задачи, связанные с рядами Фурье суммируемых функций. С подробной информацией по этой тематике можно познакомиться в монографии Самко, Килбаса и Маричева [1].

В данной статье рассматриваются дробно–логарифмические производные алгебраических и тригонометрических полиномов. Наше внимание привлек случай, когда в определении дробно–логарифмической производной степенной множитель равен единице. Доказаны неравенства типа Бернштейна в пространстве L_0 .

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Алгебраические полиномы. Пусть $P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ – алгебраический полином степени n с комплексными коэффициентами.

Определение 1. Дробно–логарифмической производной порядка $\beta \geq 0$ полинома $P_n(z)$ назовем полином

$$J^\beta P_n(z) = \sum_{k=1}^n c_k \ln^\beta(k+1) z^k; \quad J^1 P_n(z) \equiv J P_n(z).$$

Как обычно,

$$\|P_n\|_0 = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |P_n(e^{i\varphi})| d\varphi \right).$$

Величину $\|P_n\|_0$ (по Маллеру) часто называют мерой полинома $P_n(z)$.

Теорема 1. Для любого полинома $P_n(z)$ и его дробно-логарифмической производной первого порядка выполняется неравенство

$$\|JP_n\|_0 \leq A(n)\|P_n\|_0, \quad \text{где } A(n) \leq 2,9(1,4)^n \ln^{2/3} n. \quad (1)$$

Доказательство теоремы опирается на некоторые вспомогательные факты; приведем их.

Говорят, что полиномы

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k z^k, \quad Q_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k z^k \quad \text{и} \quad R_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k d_k z^k$$

образуют композицию (по Сеге), если для всех $k = 0, 1, \dots, n$ выполняется равенство $b_k = a_k d_k$ и обозначают: $Q_n(z) = P_n(z) \otimes R_n(z)$.

Соотношение между мерами $\|Q_n(z)\|_0$, $\|P_n(z)\|_0$ и $\|R_n(z)\|_0$ следует из одного замечательного неравенства Арестова [2]:

$$\|Q_n\|_0 \leq \|P_n\|_0 \|R_n\|_0. \quad (2)$$

Далее, для логарифмического множителя в определении производной полезным оказался интеграл

$$\int_0^1 (1-t^k) \frac{dt}{\ln(1/t)} = \ln(k+1), \quad (3)$$

который вытекает, например, из более общего интеграла (см. [3], стр. 788 при $\alpha = 1, \beta = k$).

В процессе доказательства будут использованы также простые неравенства для отличных от нуля комплексных чисел:

$$|a^n - b^n| \leq |a - b| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^{n-k-1} |b|^k \quad (4)$$

и

$$|a^n - b^n| \leq |a - b| \frac{|a|^n - |b|^n}{|a| - |b|}. \quad (5)$$

Доказательство теоремы 1. Полиномы $P_n(z)$ и $JP_n(z)$ запишем в виде, как этого требует композиция:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k z^k, \quad JP_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k \ln(k+1) z^k.$$

Тогда $JP_n(z) = P_n(z) \otimes R_n(z)$, где $R_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \ln(k+1) z^k$ и, в силу соотношения (2), доказательство теоремы 1 сводится к оценке коэффициента $\|R_n\|_0$. Для этого запишем $R_n(z)$ с помощью интеграла (3):

$$R_n(z) = \int_0^1 [(1+z)^n - (1+tz)^n] \frac{dt}{\ln(1/t)}. \quad (6)$$

Дальнейшие рассуждения проведем в два приема: сначала при $|1+z| > 1$, а затем при $|1+z| < 1$. Так как мера $\|R_n\|_0$ определяется значениями полинома R_n на единичной окружности, оценки будем проводить, считая $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

Итак, пусть $|1+z| > 1$. На основании (5),

$$\begin{aligned} |(1+z)^n - (1+tz)^n| &\leq (1-t) \frac{|1+z|^n - |1+tz|^n}{|1+z| - |1+tz|} \leq \\ &\leq 2(1-t) \frac{|1+z|^n - |1+tz|^n}{|1+z|^2 - |1+tz|^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для любого $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} |1+tz|^2 &= |1+z|^2 t + (1-t)^2 \quad \text{и} \quad |1+z|^n - |1+tz|^n \leq |1+z|^n (1-t^{n/2}), \\ |1+z|^2 - |1+tz|^2 &= (1-t)(|1+z|^2 - 1 + t) > (1-t)(|1+z|^2 - 1). \end{aligned}$$

Следовательно, из (6) и (7) получаем:

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leq \frac{2}{|1+z|^2 - 1} |1+z|^n \int_0^1 (1-t^{n/2}) \frac{dt}{\ln(1/t)} = \\ &= \frac{2}{|1+z|^2 - 1} |1+z|^n \ln(n/2 + 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Если же $|1+z| < 1$, применим неравенство (4):

$$|(1+z)^n - (1+tz)^n| < (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} |1+z|^{n-k-1} |1+tz|^k.$$

Отсюда и из (6) имеем:

$$|R_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |1+z|^{n-k-1} \int_0^1 (1-t) |1+tz|^k \frac{dt}{\ln(1/t)}.$$

Далее учтем, что $(1-t)/\ln(1/t) \leq 1$ на $(0, 1)$, а для функции $|1+tz|^2$, как функции от t , справедливы оценки:

$$|1+tz|^2 = |1+z|^2 t + (1-t)^2 < 1-t+t^2 < 1-t/2, \quad t \in (0, 1/2)$$

и

$$|1+tz|^2 < t + (1-t)/2 = (1+t)/2, \quad t \in (1/2, 1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |1+z|^{n-k-1} \left(\int_0^{1/2} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{k/2} dt + \int_{1/2}^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^{k/2} dt \right) \leq \\ &\leq 4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|1+z|^{n-k-1}}{k/2 + 1} \leq 4 \frac{1 - |1+z|^n}{1 - |1+z|}. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь, используя неравенства (8) и (9), оценим $\|R_n\|_0$: $\|R_n\|_0 =$

$$= \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |R_n(e^{i\varphi})| d\varphi\right) \leq (4 \ln n)^{\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(2 \cos \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln\left|1 - 2 \cos \frac{\varphi}{2}\right| d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(1 + 2 \cos \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \ln\left(1 - 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi\right) \leq (4 \ln n)^{\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{2n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(2 \cos \varphi) d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|1 - 2 \cos \varphi| d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1 + 2 \cos \varphi) d\varphi\right).$$

Полученные интегралы выразим посредством функции Лобачевского и воспользуемся ее табличными значениями (см. [4]): $L(x) = -\int_0^x \ln \cos x dx$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \ln(2 \cos \varphi) d\varphi = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{\pi} L(\pi/3) \approx 0,323,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln|1 - 2 \cos \varphi| d\varphi = \frac{4}{\pi} \left(L\left(\frac{\pi}{12}\right) + L\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right) - 2 \ln 2 \approx -0,777,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \ln(1 + 2 \cos \varphi) d\varphi = \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{4}{\pi} L\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0,646.$$

Окончательно, $\|R_n\|_0 \leq 2,9(1,4)^n \ln^{2/3} n$.

Теорема 1 доказана.

Замечание. Возникает вопрос относительно окончательности теоремы 1. Нам не удалось построить пример полинома, для которого в неравенстве (1) достигается знак равенства. Приведем лишь рассуждения о необходимости наибольшего по порядку множителя $(1,4)^n$ в (1).

Сначала заметим, что для производной нулевого порядка $J^0 P_n(z)$ (по определению, $J^0 P_n(z) = P_n(z) - P_n(0)$) на основании теоремы 1 из работы [5] с последующим применением неравенства Бернштейна следует неравенство

$$\|J^0 P_n\|_0 \leq B(n) \|P_n\|_0, \quad \text{где } B(n) = \frac{1}{n} \prod_{k=n/6}^{5n/6} 2 \sin \frac{\pi k}{n} \approx (1,4)^n$$

и постоянная $B(n)$ – точная.

Обратим также внимание на то, что множитель $(1,4)^n$ появляется в аналогичных неравенствах для дробных интегралов (см. [6]). Возможно, его наличие связано с порядком множителя в определении дробной производной и в случае, когда его рост меньше степенного (например, как у нас – логарифмический) как раз и возникает $(1,4)^n$.

Любопытно, что для «дробно-показательных» производных

$$\sum_{k=0}^n C_n^k q^k z^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k q^{-k} z^k, \quad q > 1$$

точными постоянными в неравенствах типа Бернштейна будут q^n и 1.

2. Тригонометрические полиномы. Пусть $T_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\varphi}$ — тригонометрический полином с комплексными коэффициентами.

Определение 2. Дробно-логарифмической производной порядка $\beta \geq 0$ полинома $T_n(z)$ назовем полином

$$J^\beta T_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^n c_k \ln^\beta(|k| + 1) e^{ik\varphi}; \quad J^1 T_n \equiv J T_n.$$

По определению,

$$\|T_n\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |T_n(\varphi)| d\varphi\right).$$

Как и для алгебраических полиномов, нас интересует неравенство типа Бернштейна и мы покажем, что справедлива

Теорема 2. Для любого тригонометрического полинома $T_n(\varphi)$ и его дробно-логарифмической производной первого порядка справедливо неравенство

$$\|J T_n\|_0 \leq C(n) \|T_n\|_0, \quad \text{где } C(n) \leq 2A(1, n) C_{2n}^{n-1}.$$

При доказательстве теоремы 2 нам понадобится теорема Энестрема-Какейя и частный случай формулы Йенсена.

Теорема (Энестрем-Какейя). [7] Если $P_n(z)$ — алгебраический полином с невозрастающими коэффициентами $c_0 \geq c_1 \geq \dots \geq c_n > 0$, то все нули P_n лежат вне открытого единичного круга.

В частном случае формулы Йенсена (см., напр., [8], отд. III, задача 175) для полиномов

$$\|P_n\|_0 = |c_n| \prod_{k=1}^n \max(1, |z_k|), \quad \text{где } z_1, \dots, z_n \text{ — нули полинома } P_n(z). \quad (10)$$

Доказательство теоремы 2. Благодаря представлению

$$T_n(\varphi) = e^{-in\varphi} P_{2n}(e^{i\varphi}),$$

где $P_{2n}(z)$ — алгебраический полином степени $2n$, идеей доказательства теоремы 2 является сведение к алгебраическим полиномам и применение теоремы 1.

Составим композицию алгебраическим полиномам, которые соответствуют тригонометрическим полиномам $T_n(\varphi)$ и $JT_n(\varphi)$. Пусть

$$T_n(\varphi) = e^{-in\varphi} P_{2n}(e^{i\varphi}), \quad \text{где } P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k z^k.$$

Тогда $T_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k e^{i(k-n)\varphi}$ и

$$\begin{aligned} JT_n(\varphi) &= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k \ln(|k-n|+1) e^{i(k-n)\varphi} = \\ &= e^{-in\varphi} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k \ln(|k-n|+1) e^{ik\varphi} = e^{-in\varphi} Q_{2n}(e^{i\varphi}), \end{aligned}$$

где $Q_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k \ln(|k-n|+1) z^k$.

Полиномы $Q_{2n}(z)$, $P_{2n}(z)$ и

$$R_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \ln(|k-n|+1) z^k \quad (11)$$

образуют композицию, т.е. $Q_{2n}(z) = P_{2n}(z) \otimes R_{2n}(z)$ и, согласно (2), имеет место неравенство $\|Q_{2n}\|_0 \leq \|P_{2n}\|_0 \|R_{2n}\|_0$. Если заметить, что

$$\|Q_{2n}\|_0 = \|JT_n\|_0, \quad \text{а} \quad \|P_{2n}\|_0 = \|T_n\|_0,$$

то приходим к неравенству $\|JT_n\|_0 \leq \|R_{2n}\|_0 \|T_n\|_0$, где $\|R_{2n}\|_0 = C(n)$ – искомая постоянная.

Займемся оценкой $\|R_{2n}\|_0$. В силу равенства (11),

$$\begin{aligned} R_{2n}(e^{i\varphi}) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1) e^{ik\varphi} + \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k \ln(k-n+1) e^{ik\varphi} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1) (e^{ik\varphi} + e^{i(2n-k)\varphi}) \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} e^{-in\varphi} R_{2n}(e^{i\varphi}) &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1) \cos(n-k)\varphi = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1) e^{i(n-k)\varphi} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|R_{2n}(e^{i\varphi})| \leq 2 \left| \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1) e^{i(n-k)\varphi} \right|$$

и

$$\|R_{2n}\|_0 \leq 2 \left\| \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \ln(n-k+1) z^{n-k} \right\|_0. \quad (12)$$

Неравенство (12) можно записать как

$$\|R_{2n}\|_0 \leq 2 \|JV_n\|_0,$$

где $V_n(z) = \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n-k} z^k$ — алгебраический полином и, по теореме 1,

$$\|R_{2n}\|_0 \leq 2A(n) \|V_n\|_0. \quad (13)$$

Остается найти меру $\|V_n\|_0$. Для полинома $z^{-n}V_n(z)$ выполняются условия теоремы Энестрема-Какейя и тогда, по формуле (10), $\|L_n\|_0 = C_{2n}^{n-1}$. Отсюда и из (13) получаем: $\|R_{2n}\|_0 \leq 2A(1, n)C_{2n}^{n-1}$.

Теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В работе установлены неравенства типа Бернштейна для чисто-логарифмических производных алгебраических и тригонометрических полиномов в пространстве L_0 . Тригонометрический случай получен при помощи алгебраического.

ССЫЛКИ

1. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1981. — Т. 45. — С. 3–22.
3. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц, Т. П. — М.: Физматлит, 2001. — 810 с.
4. **Грандштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм и произведений / И. С. Грандштейн, И. М. Рыжик. — М.: ГИТТЛ, 1963. — 1100 с.
5. **Стороженко Э. А.** К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной / Э. А. Стороженко // Матем. сборник. — 1996. — Т. 187, № 5. — С. 111–120.
6. **Стороженко Э. А.** Неравенство для дробных интегралов комплексных полиномов в L_0 / Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко // Матем. зам. — 2014. — Т. 96, № 4. — С. 633–636.
7. **Borwein P.** Polynomials and polynomial inequalities / P. Borwein, T. Erdelyi. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1995. — 482 с.
8. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сеге. Т. I — М.: Наука, 1978. — 391 с.

Стороженко Е. О., Коваленко Л. Г.

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ДРОБОВО-ЛОГАРИФМІЧНИХ ПОХІДНИХ ПОЛІНОМІВ В L_0

Резюме

Дослідження розв'язків інтегральних рівнянь з степенево-логіфімічними ядрами, а також задачі, пов'язані з рядами Фур'є для сумованих функцій, привели до появи дробово-логіфімічних похідних та інтегралів. В цій статті розглядаються дробово-логіфімічні похідні алгебраїчних та тригонометричних поліномів. Особлива увага приділяється випадку, коли в означенні дробово-логіфімічної похідної степеневий множник дорівнює одиниці. В роботі встановлені нерівності типу Бернштейна для чисто-логіфімічних похідних алгебраїчних та тригонометричних поліномів у просторі L_0 . Тригонометричний випадок отримано за допомогою алгебраїчного.

Ключові слова: міра поліному за Малером, дробово-логіфімічна похідна, нерівність типу Бернштейна.

Storozhenko E. A., Kovalenko L. G.

A BERNSTEIN TYPE INEQUALITY FOR FRACTIONAL LOGARITHMIC DERIVATIVES OF POLYNOMIALS IN L_0

Summary

The study of integral equations with power-laws-logarithmically kernels, as well as problems related to the Fourier series of integrable functions led to fractional-logarithmic derivatives and integrals. In this paper fractional algebraic and logarithmic derivatives of trigonometric polynomials are discussed. Special attention was given to the case when power-degree multiplier in definition of fractional-logarithmic derivative is equal to 1. We establish Bernstein type inequalities for pure logarithmic derivatives of algebraic and trigonometric polynomials in space L_0 . A trigonometric case obtained from the algebraic case.

Key words: Mahler's measure of a polynomial, a fractional logarithmic derivative, a Bernstein type inequality.

REFERENCES

1. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1987). *Integrals i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ih prilozheniya* [Fractional integrals and derivatives with some applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.
2. Arestov, V. V. (1981). Ob integralnykh neravenstvakh dlya trigonometricheskikh polinomov i ikh proizvodnykh [About integral inequalities for trigonometrical polynomials and theirs derivatives]. *Izv. AN USSR. Ser. matem.*, Vol. 45, P. 3–22.
3. Fikhtengolz, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II. Moscow: Fizmatlit, 810 p.
4. Gradshtein, I. S., Ryzhyk, I. M. (1963). *Tablitsy sntegralov, sum i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums and derivatives]. Moscow: GITTL, 1100 p.
5. Storozhenko, E. A. (1996). K odnoi zadache Malera o nulyakh polinoma i ego proizvodnoy [For one Mahler's prooblem about zeros of polinomial and its derivative]. *Matem. sbornik*, Vol. 187, №5, P. 111–120.

-
6. Storozhenko, E. A., Kovakenko, L. G. (2014). Neravenstvo dlya drobnykh integralov kompleksnykh polinomov v L_0 [An inequality for fractional order integrals of complex-valued polynomials in L_0]. *Matem. zapiski*, Vol. 96, №4. – P. 633–636.
 7. Borwein, P., Erdelyi, T. (1995). *Polynomials and polynomial inequalities* New York: Springer-Verlag, 482 p.
 8. Polia, G., Sege, G. (1978). *Zadachi i teoremy iz analiza [Problems and theorems from calculus]*, Vol I. Moscow: Nauka, 391 p.