УДК 517.925

А. Г. Черникова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИКА БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Для двучленных существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью устанавливаются необходимые и достаточные условия существования и асимптотические при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$) представления быстро меняющихся решений.

MSC: 34E99.
Ключевые слова: быстро меняющиеся функции, нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотика решений.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{3}$$

Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- некоторая односторонняя окрестность Y_0.

Из условий (2), (3) непосредственно вытекает, что

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \sim \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \ (y \in \Delta_{Y_0}) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty, \tag{4}$$

В силу второго из этих условий функция φ и ее производная первого порядка являются (см. монографию М. Марича [1], Гл.3, §3.4, Леммы 3.2, 3.3, С. 91-92) быстро меняющимися при $y \to Y_0$.

В [1] (Гл. 3, §3.4, P. 90-99) для случая, когда $\alpha_0 = 1$, $\omega = +\infty$, $Y_0 = 0$ и p — правильно меняющаяся функция при $t \to +\infty$, были получены асимптотические представления для всех решений уравнения (1), стремящихся к нулю при $t \to +\infty$. В работе В. М. Евтухова, В. М. Харькова [2] для общего случая был введен класс решений, который определяется через функцию φ, и исследован вопрос о существовании и асимптотике таких решений при $t \uparrow \omega$. Однако более естественным, в отличие от [2], представляется исследовать асимптотические свойства того же класса решений уравнения (1), который изучался ранее (см. например, работу [3]) в случае правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функции φ.

Получена 29.05.2015

Определение 1. *Решение y дифференциального уравнения* (1) *называется* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*– решением, где* $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$*, если оно определено на промежутке* $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ *и удовлетворяет следующим условиям*

$$y(t)\in\Delta_{Y_0} \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t)=Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=\begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)}=\lambda_0.$$

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$–решений при $\lambda_0=1$, а также асимптотических при $t\uparrow\omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка. При этом, кроме (3), потребуются некоторые дополнительные свойства функции φ, удолетворяющей условиям (2), (3).

Всюду в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0}=\begin{cases} [y_0,Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \quad \text{левая окрестность} \quad Y_0, \\ ]Y_0,y_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \quad \text{правая окрестность} \quad Y_0, \end{cases} \tag{5}$$

где $y_0\in\mathbb{R}$ такое, что $|y_0|<1$ при $Y_0=0$ и $y_0>1$ ($y_0<-1$) при $Y_0=+\infty$ (при $Y_0=-\infty$).

Прежде всего нетрудно показать (см., например, [4], Гл. 3, §10, лемма 10.1), что для функции φ

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi^2(y)}{\varphi'(y)\int\limits_Y^y\varphi(x)\,dx}=1, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left[\int\limits_Y^y\varphi(x)\,dx\right]^2}{\varphi(y)\int\limits_Y^y\left(\int\limits_Y^x\varphi(u)\,du\right)dx}=1,$$

где

$$Y=\begin{cases} y_0, & \text{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\varphi(y)=+\infty, \\ Y_0, & \text{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\varphi(y)=0. \end{cases}$$

В силу этих предельных соотношений и теоремы 3.10.8 из монографии N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels [5] (Гл. 3, п.3.10, стр. 178] функция φ и ее первая производная принадлежат при $Y_0=+\infty$ и выполнении условия $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi(y)=+\infty$ классу функций Γ, введенному Л. Ханом (см., например, [5], Гл. 3, п.3.10, стр.175).

Определение 2. *Класс* Γ *состоит из измеримых неубывающих и непрерывных справа функций* $f:[y_0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$*, для каждой из которых существует измеримая функция* $g:[y_0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$*, дополняющая для функции* f*, такая, что*

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{f\left(y+ug(y)\right)}{f(y)}=e^u \quad \textit{для любого} \quad u\in\mathbb{R}.$$

Для функций из класса Γ имеют место, в частности (см. [5], Гл. 3, п 3.10, стр. 174-178), следующие утверждения.

Лемма 1. 1. *Если $f \in \Gamma$ с дополняющей функцией g, то* $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{g(y)}{y} = 0$.

2. *Если $f \in \Gamma$ с дополняющей функцией g, то для любой функции $u : [y_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$\lim_{y\to+\infty} u(y) = u_0 \in [-\infty, +\infty[, \qquad \lim_{y\to+\infty} f(y + u(y)g(y)] = +\infty,$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f\left(y + u(y)g(y)\right)}{f(y)} = e^{u_0}.$$

3. *Для $f \in \Gamma$ дополняющая функция единственна с точностью до эквивалентных при $y \to +\infty$ функций, и в качестве одной из них может быть выбрана, например, функция* $\dfrac{\int\limits_{y_0}^{y} f(x)\,dx}{f(y)}$.

4. *Условия $f \in \Gamma$ и* $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\left[\int\limits_{y_0}^{y} f(x)\,dx\right]^2}{f(y)\int\limits_{y_0}^{y}\left(\int\limits_{y_0}^{x} f(u)\,du\right)dx} = 1$ *являются эквивалентными, т. е. из одного из них вытекает второе и наоборот.*

С использованием замен переменных класс Γ может быть легко расширен до класса $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ функций $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, где Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_{Y_0}- односторонняя окрестность Y_0, для которых

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0 = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty \end{cases}$$

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ принадлежит классу функций $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, если классу Γ принадлежит:*

1) при $Y_0 = +\infty$ и $Z_0 = 0$ функция $f_0(y) = \frac{1}{f(y)}$;

2) при $Y_0 = -\infty$ и $Z_0 = +\infty$ функция $f_0(y) = f(-y)$;

3) при $Y_0 = 0$, когда Δ_{Y_0}– правая окрестность нуля, и $Z_0 = +\infty$ функция $f_0(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$;

4) при $Y_0 = 0$, когда Δ_{Y_0}– правая окрестность нуля, и $Z_0 = 0$ функция $f_0(y) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$;

5) при $Y_0 = 0$, когда Δ_{Y_0}– левая окрестность нуля, и $Z_0 = +\infty$ функция $f_0(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right)$;

6) при $Y_0 = 0$, когда Δ_{Y_0}– левая окрестность нуля, и $Z_0 = 0$ функция $f_0(y) = \frac{1}{f\left(-\frac{1}{y}\right)}$;

7) при $Y_0 = +\infty$ и $Z_0 = +\infty$ функция $f_0(y) \equiv f(y)$.

С использованием этих двух определений и первых двух утверждений леммы 1 приходим к выводу, что для функции $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f(y + ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \text{для любого} \quad u \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

в котором функция g, дополняющая для f, в каждом из случаев 1)– 7) может быть выражена через функцию g_0, дополняющую для f_0, следующим (соответственно) образом:

1) $g(y) = -g_0(y)$; 2) $g(y) = -g_0(-y)$; 3) $g(y) = -y^2 g_0\left(\frac{1}{y}\right)$;

4) $g(y) = y^2 g_0\left(\frac{1}{y}\right)$; 5) $g(y) = y^2 g_0\left(-\frac{1}{y}\right)$;

6) $g(y) = -y^2 g_0\left(-\frac{1}{y}\right)$; 7) $g(y) = g_0(y)$.

Здесь в силу третьего утверждения леммы 1 каждая из функций $g_0 : [x_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ определяется однозначно с точностью до эквивалентных при $x \to +\infty$ функций, и в качестве одной из них может быть выбрана, например, функция $\frac{\int_{x_0}^{x} f_0(s)\, ds}{f_0(x)}$.

С использованием первых двух утверждений леммы 1 приходим также к выводу, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. 1. *Если $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией g, то* $\lim\limits_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{g(y)}{y} = 0.$

2. *Если $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией g, то для любой функции $u : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} u(y) = u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y + u(y)g(y)] = Z_0,$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f\,(y + u(y)g(y))}{f(y)} = e^{u_0}.$$

Если $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией g и, кроме того, является непрерывной и строго монотонной, то для нее существует непрерывная строго монотонная обратная функция $f^{-1} : \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$, где

$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} \text{либо} & [z_0, Z_0[, \\ \text{либо} &]Z_0, z_0], \end{cases} \quad z_0 = f(y_0), \quad Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y).$$

В силу теорем 3.10.4, 3.1.16 из монографии [5] (см. Гл. 3, п.3.10, стр. 176 и п.3.1, стр. 139) и определения 3 эта обратная функция обладает следующими свойствами.

Лемма 3. *Пусть $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией g и является непрерывной строго монотонной функцией на промежутке Δ_{Y_0}. Тогда обратная для* *нее функция* $f^{-1}(z)$ *является медленно меняющейся при* $z \to Z_0$ *и удовлетворяет предельному соотношению*

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{f^{-1}(\lambda z)-f(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln\lambda \quad \textit{при любом} \quad \lambda>0.$$

Более того, для любого $\Lambda>1$ *данное предельное соотношение выполняется равномерно по* $\lambda \in \left[\frac{1}{\Lambda},\Lambda\right]$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда функция $f:\Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$ является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условиям

$$f'(y)\neq 0 \quad \text{при} \quad y\in\Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0,\\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \tag{7}$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y)f''(y)}{f'^2(y)} = 1. \tag{8}$$

В этом случае для каждой из указанных в определении 3 функций $f_0:[x_0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$, где x_0- некоторое положительное число, выполняются условия

$$f_0'(x)\neq 0 \ \text{ при } x\in[x_0,+\infty[, \ \lim_{x\to+\infty} f_0(x)=+\infty, \ \lim_{x\to+\infty}\frac{f_0(x)f_0''(x)}{f_0'^2(x)}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_0^2(x)}{f_0'(x)\int\limits_{x_0}^{x} f_0(u)\,du}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\int\limits_{x_0}^{x} f_0(u)\,du\right]^2}{f_0(x)\int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(v)\,dv\right)du}=1.$$

В силу этих условий, а также третьего и четвертого утверждений леммы 1 справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Если дважды непрерывно дифференцируемая фунция* $f:\Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$ *удовлетворяет условиям* (1.6), *то она и ее первая производная принадлежат классу* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ *с дополняющей функцией* $g:\Delta_{Y_0}\longrightarrow\mathbb{R}$, *которая определяется однозначно с точностью до эквивалентных при* $y\to Y_0$ *функций, в качестве которой может быть выбрана, например, одна из следующих функций*

$$\frac{\int\limits_{Y}^{y}\left(\int\limits_{Y}^{t} f(u)\,du\right)dt}{\int\limits_{Y}^{y} f(x)\,dx} \sim \frac{\int\limits_{Y}^{y} f(x)\,dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)} \quad \textit{при} \quad y\to Y_0,$$

где

$$Y = \begin{cases} y_0, & \textit{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y)=+\infty,\\ Y_0, & \textit{если} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y)=0. \end{cases}$$

Замечание 1. *Приведенные леммы 2 -4 относятся к случаю, когда функция* $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ *(т.е. принимает положительные значения). В случае функции* $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]-\infty,0[$ *будем говорить, что она принадлежит классу* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$*, если* $(-f) \in \Gamma_{Y_0}(-Z_0)$*. Тогда нетрудно проверить, что для нее леммы 2–4 также остаются справедливыми.*

Кроме всех вышеуказанных свойств дважды непрерывно дифференцируемых функций $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих условиям (7), (8), в дальнейшем потребуется еще одно вспомогательное утверждение об априорных асимптотических свойствах $P_\omega(Y_0, 1)$–решений дифференциального уравнения (1).

Лемма 5. *Для каждого* $P_\omega(Y_0, 1)$*– решения дифференциального уравнения (1) имеют место соотношения*

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{y'(t)}{y(t)} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \tag{9}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \textit{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases} \tag{10}$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из определения 1 и тождества

$$\frac{y''(t)y(t)}{y'^2(t)} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2} + 1.$$

Основные результаты. Введем необходимые для дальнейшего вспомогательные обозначения. Будем считать, что область определения функции φ в уравнении (1) определяется формулой (5). Далее, положим

$$\mu_0 = \operatorname{sign}\varphi'(y), \quad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases}$$

и введем следующие функции

$$J_1(t) = \int_{A_1}^{t} p^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau, \quad \Phi_1(y) = \int_{B_1}^{y} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(s)},$$

где

$$A_1 = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau < +\infty, \\ a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau = +\infty, \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} Y_0, & \text{если} \quad \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{если} \quad \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Учитывая определение 1, заметим, что числа ν_0, ν_1 и α_0 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$–решения, его первой и второй производных (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty, \tag{11}$$

и

$$\nu_1\alpha_0 < 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \quad \nu_1\alpha_0 > 0, \quad \text{усли} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty, \tag{12}$$

являются необходимыми для существования таких решений. Более того, при $\lambda_0 = \ 1$ в силу (1) и определения 1

$$\alpha_0\nu_0 > 0 \tag{13}$$

Теперь обратим внимание на некоторые свойства функции Φ_1. Она сохраняет знак на промежутке Δ_{y_0}, стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y \to Y_0$ и является возрастающей на Δ_{Y_0}, поскольку на этом промежутке $\Phi_1'(y) = |y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(y) > 0$. Поэтому для нее существует обратная функция $\Phi_1^{-1} : \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$, где в силу второго из условий (2) и монотонного возрастания Φ_1^{-1}

$$Z_0 = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \Phi_1(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases}$$
$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ ]Z_0, z_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases} \qquad z_0 = \Phi_1(y_0). \tag{14}$$

Далее, заметим, что

$$\left(\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)}\right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)} - \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)}\right].$$

Отсюда с учетом условий (3) и (4) получим соотношение

$$\left(\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)}\right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}\left[-\frac{1}{2} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от y_0 до y и учитывая правило выбора предела интегрирования B_1 в функции Φ_1, приходим к выводу, что

$$\Phi_1(y) = -\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \tag{15}$$

Отсюда с учетом знака φ' также следует, что

$$\operatorname{sign}\Phi_1(y) = -\mu_0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}. \tag{16}$$

В силу (15) и (4) также имеем

$$\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)} = \frac{|y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(y)}{\Phi_1(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{2\varphi(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0,$$

$$\frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{\Phi_1'^2(y)} = -\frac{1}{2}\frac{|y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{3}{2}}\varphi'(y)\left[\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)}+1\right]\Phi_1(y)}{|y|^{-1}\varphi^{-1}(y)} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Поэтому согласно лемме 4 $\Phi_1 \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией, в качестве которой может быть выбрана одна из эквивалентных функций

$$\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1''(y)} \sim \frac{\Phi_1(y)}{\Phi_1'(y)} \sim -\frac{2\varphi(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{17}$$

Так как

$$\lim_{z\to Z_0}\frac{z\left(\varphi(\Phi_1^{-1}(z))\right)'}{\varphi(\Phi_1(z))} = \lim_{z\to Z_0}\frac{z\varphi'(\Phi_1^{-1}(z)))|\Phi_1(z)|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(z))}{\varphi(\Phi_1^{-1}(z))} =$$

$$= \lim_{y\to Y_0}\frac{\Phi_1(y)\varphi'(y)|y|^{\frac{1}{2}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)} = -2,$$

то функция $\varphi(\Phi_1^{-1}(z))$ является правильно меняющейся функцией порядка -2 при $z \to Z_0$.

Кроме указанных выше обозначений введем также вспомогательные функции:

$$q_1(t) = \frac{\alpha_0\nu_1 J_2(t)}{p^{\frac{1}{2}}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)},$$

$$H_1(t) = \frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}, \quad J_2(t) = \int_{A_2}^{t} p(\tau)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(\tau))\right)\,d\tau,$$

где

$$A_2 = \begin{cases} t_0, & \text{если} \quad \int_{t_2}^{\omega} p(\tau)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(\tau))\right)\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_{t_2}^{\omega} p(\tau)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(\tau))\right)\,d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad t_2 \in [a,\omega].$$

Для уравнения (1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для существования у дифференциального уравнения* (1) $P_\omega(Y_0,1)$*–решений, необходимо чтобы наряду с* (13) *соблюдались условия*

$$\mu_0\nu_1 J_1(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a,\omega[, \tag{18}$$

$$\nu_1\lim_{t\uparrow\omega} J_1(t) = Z_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = 1. \tag{19}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y(t) = \Phi_1^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0-1)J_1(t)\right)\left[1+\frac{o(1)}{H_1(t)}\right], \tag{20}$$

$$y'(t) = \nu_1 p^{\frac{1}{2}}(t)\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))|^{\frac{1}{2}}[1+o(1)]. \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть соблюдаются условия* (13), (18), (19) *и существует конечный или равный* $\pm\infty$ *предел*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}. \tag{22}$$

Тогда: 1) если

$$\alpha_0\mu_0>0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega}[q_1(t)-1]|H_1(t)|^{\frac{1}{2}}=0, \tag{23}$$

то у дифференциального уравнения (1.1) *существует однопараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0,1)$*– решений с представлениями* (20), (21), *причем таких, производная которых удовлетворяет при* $t\uparrow\omega$ *асимптотическому соотношению*

$$y'(t)=\alpha_0 J_2(t)\left[1+o\left(|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}}\right)\right]; \tag{24}$$

2) если

$$\alpha_0\mu_0<0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}[q_1(t)-1]|H_1(t)|^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_2'(\tau)|H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}\right)^2=0 \tag{25}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_2'(\tau)|H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}}{|H_1(t)|^{\frac{1}{2}}}=0,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_2'(\tau)|H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}\right)\cdot\left.\frac{|y|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{3}{2}}}\right|_{y=\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}=0, \tag{26}$$

где t_0 *некоторое число из промежутка* $[a,\omega[$, *то уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно* $P_\omega(Y_0,1)$*– решение, допускающее при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y(t)=\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\left[1+\left(H_1(t)\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_2'(\tau)|H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}\right)^{-1}o(1)\right], \tag{27}$$

$$y'(t)=\alpha_0 J_2(t)\left[1+|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{J_2'(\tau)|H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}\right)^{-1}o(1)\right]. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,1)$– решение дифференциального уравнения (1). Тогда данное решение и его производные первого и второго порядков сохраняют знаки на некотором промежутке $[t_1,\omega[\subset[t_0,\omega[$, причем для этих знаков соблюдаются условия (11), (12) и имеет место неравенство (13). Кроме того, для этого решения согласно лемме 5 имеет место асимптотическое соотношение:

$$y''(t)=\frac{y''(t)}{y'(t)}\frac{y'(t)}{y(t)}y(t)\sim\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 y(t)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

В силу этого соотношения из (1) следует, что

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2=\alpha_0 p(t)\frac{\varphi(y)}{y}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом неравенства (13) имеем

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2=p(t)\frac{\varphi(y)}{|y|}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Из этого соотношения с учетом знаков y и y' находим

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\nu_0\nu_1 p^{\frac{1}{2}}(t)\left(\frac{\varphi(y)}{|y|}\right)^{\frac{1}{2}}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

или

$$\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y(t))}=\nu_1 p^{\frac{1}{2}}(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{29}$$

Интегрируя соотношение (29) на промежутке от t_1 до t получим

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)}\frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(s)}=\nu_1\int\limits_{t_1}^{t}p^{\frac{1}{2}}(\tau)[1+o(1)]\,d\tau\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Поскольку согласно определению $P_\omega(Y_0,1)$–решения $y(t)\longrightarrow Y_0$ при $t\uparrow\omega$, то отсюда следует, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_0)}^{Y_0}\frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(s)}\quad\text{и}\quad\int\limits_{t_0}^{\omega}p^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. Ввиду этого факта и правила выбора пределов интегрирования A_1 и B_1 в введенных в начале данного параграфа функциях J_1 и Φ_1, установленное выше соотношение может быть записано в виде

$$\Phi_1(y(t))=\nu_1 J_1(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{30}$$

Отсюда с учетом условий (14) и (16) следует, что справедливо неравенство (18) и первое из условий (19). Кроме того, из (29) и (30) имеем

$$\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y(t))\Phi_1(y(t))}=\frac{p^{\frac{1}{2}}(t)}{J_1(t)}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega$$

и поэтому в силу (15)

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}\frac{y(t)\varphi'(y(t))}{\varphi(y(t)}=-\frac{2\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{31}$$

откуда ввиду вторых из предельных соотношений (4) и (9) вытекает справедливость второго из условий (19).

Из (30) следует, что

$$y(t)=\Phi_1^{-1}\left(\nu_1 J_1(t)[1+o(1)]]\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{32}$$

Так как выполняется первое из условий (19), функция $\Phi_1^{-1}(z)$ является медленно меняющейся, а $\varphi\left(\Phi_1^{-1}(z)\right)$ — правильно меняющейся порядка -2 при $z\to Z_0$, то согласно теореме о равномерной сходимости для медленно меняющихся функций (см., например, [1], стр.3))

$$\Phi_1^{-1}\left(\nu_1 J_1(t)[1+o(1)]\right)\sim\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)[1+o(1)])\right)\sim\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Ввиду этих асимптотических соотношений и (32) из (29) и (1) следует, что имеют место соответственно представления (21) и

$$y''(t)=\alpha_0 p(t)\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

В результате интегрирования последнего из них на промежутке от t_2 до t, где $t_2\in[t_1,\omega[$ выбрано таким, чтобы $\nu_1 J_1(t)\in\Delta_{Z_0}$ при $t\in[t_2,\omega[$, получим с учетом определения $P_\omega(Y_0,1)$–решения соотношение вида

$$y'(t)=\alpha_0 J_2(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$\frac{\alpha_0 J_2(t)}{\nu_1 p^{\frac12}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))|^{\frac12}\varphi^{\frac12}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}=[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

т. е. выполняется третье из условий (19).

Справедливость представления (20) непосредственно вытекает из (32) и леммы 3, если учесть, что $\Phi_1\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g(y)=-\frac{2\varphi(y)}{\varphi'(y)}$.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего, учитывая существование предела (22) и условия (2)-(4), которым удовлетворяет функция φ, устанавливаем, что этим пределом может быть только ноль, т. е.

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}=0. \tag{33}$$

Учитывая (14), (16), (18) и первое из условий (19) подберем число $t_2\in[a,\omega]$ так, чтобы $\nu_1 J_1(t)\in\Delta_{Z_0}$ при $t\in[t_2,\omega[$. При таком выборе t_2 на промежутке $[t_2,\omega[$ определена функция J_2, введенная перед формулировками теорем.

Теперь применяя к уравнению (1) преобразование

$$y(t) = \Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\big(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\big)}{\varphi'\big(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\big)} y_1(t), \qquad y'(t) = \alpha_0 J_2(t)[1 + y_2(t)], \tag{34}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = E(t)\left[-1 + q_1(t) + h_1(t)y_1 + q_1(t)y_2\right], \\ y_2' = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)}\left[-1 - y_2 + G(t, y_1)\right], \end{cases} \tag{35}$$

где

$$E(t) = \frac{\nu_1 p^{\frac{1}{2}}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)},$$

$$h_1(t) = \left.\frac{\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)^2}\right|_{z=\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))},$$

$$G(t, y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)} y_1\right)}{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}.$$

Выбрав, с учетом (14) и последнего из условий (4) число $t_1 \in [t_2, \omega[$ таким, чтобы

$$\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)} y_1 \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{и} \quad |y_1| \leqslant \frac{1}{2},$$

рассмотрим данную систему уравнений на множестве

$$[t_1, \omega[\times \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}} = \left\{(y_1, y_2):\ |y_1| \leqslant \frac{1}{2},\ |y_2| \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

На этом множестве правые части системы уравнений (35) непрерывны и функция G имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменной y_1.

Разлагая при фиксированном $t \in [t_1, \omega[$ функцию G по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа до членов второго порядка, получим

$$G(t, y_1) = 1 + y_1 + R(t, y_1), \tag{36}$$

где

$$R(t, y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right) \varphi''\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}\xi_1\right)}{\varphi'^2\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)} y_1^2,$$

$|\xi_1| < |y_1|$.

В силу первого из условий (19), (14), второго из условий (4) и условия (3) следует, что

$$\varphi''\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}\xi_1\right) =$$

$$= \frac{\varphi'^2\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}\xi_1\right)}{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}\xi_1\right)}[1 + r_1(t, y_1)],$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t, y_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Согласно лемме 4 функции φ, $\varphi' \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняюшей функцией $g(y) = \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$. Поэтому с учетом (6) и (14) последнее асимптотическое соотношение может быть записано в виде

$$\varphi''\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}\xi_1\right) = \frac{\varphi'^2\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)} e^{\xi}[1 + r(t, y_1)],$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega} r(t, y_1) = 0 \quad \text{для любого} \quad y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{37}$$

Отсюда следует, что

$$R(t, y_1) = e^{\xi}[1 + r(t, y_1)]y_1^2$$

где $|\xi| < |y_1|$ и r удовлетворяет условию (37).

Ввиду этого представления для любого $\varepsilon > 0$ существуют $t_0 \in [t_1, \omega[$ и $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$ такие, что

$$|R(t, y_1)| \leqslant (1 + \varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad |y_1| \leqslant \delta. \tag{38}$$

В дальнейшем будем считать, что число $\varepsilon > 0$ выбрано каким-либо образом.

Учитывая (36) перепишем систему уравнений (35) в виде

$$\begin{cases} y_1' = E(t)\left[-1 + q_1(t) + h_1(t)y_1 + q_1(t)y_2\right], \\ y_2' = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)}\left[y_1 - y_2 + R(t, y_1)\right] \end{cases} \tag{39}$$

и далее исследуем ее на множестве

$$[t_0, \omega[\times\mathbb{R}^2_\delta, \quad \text{где} \quad \mathbb{R}^2_\delta = \{(y_1, y_2) : \ |y_1| \leqslant \delta, \, |y_2| \leqslant \delta\}.$$

Для отношения множителей, которые стоят перед квадратными скобками уравнений данной системы, с использованием условия (2.3), третьего из условий (2.9) и второгоиз условий (1.3) имеем

$$\frac{E(t)J_2(t)}{J_2'(t)} = \frac{\nu_1 p^{\frac{1}{2}}(t)|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))|^{\frac{1}{2}}\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)J_2(t)}{\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))J_2'(t)\right)} =$$

$$= \frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\varphi'\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)}{\varphi\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)} \cdot \frac{\alpha_0 \nu_1 J_2(t)}{p^{\frac{1}{2}}(t)\nu_1|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_1(t))\right)} =$$

$$= H_1(t)q_1(t) \sim H_1(t) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{40}$$

Чтобы асимптотически «уравнять» эти коэффициенты применим к системе (39) дополнительное преобразование

$$y_1(t) = v_1(t), \quad y_2(t) = |H_1(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t). \tag{41}$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = E(t)|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}} \left[(q_1(t)-1)|H_1(t)|^{\frac{1}{2}} + h_1(t)|H_1(t)|^{\frac{1}{2}} v_1 + q_1(t)v_2\right], \\[2ex] v_2'(t) = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)}|H_1(t)|^{\frac{1}{2}} \left[v_1 + \left(|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\nu_0\mu_0 H_1'(t)J_2(t)}{J_2'(t)|H_1(t)|^{\frac{3}{2}}}\right)v_2 + R(t,v_1)\right]. \end{cases}$$

Обозначив через $\beta(t)$ отношение множителей, которые стоят перед квадратными скобками в уравнениях этой системы, с использованием (40) находим, что

$$\beta(t) = \frac{E(t)J_2(t)}{J_2'(t)|H_1(t)|} \sim \operatorname{sign} H_1(t) = \nu_0\mu_0 \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{42}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что здесь

$$\frac{H_1'(t)J_2(t)}{J_2'(t)|H_1(t)|^{\frac{3}{2}}} = q_1(t)\left[\mu_0|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}} + h_1(t)H^{\frac{1}{2}}(t)\right].$$

При этом в силу первого и третьего из условий (19), второго из условий (4), а также условий (14), (34) будем иметь

$$\begin{gathered} \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_1(t)|H_1(t)|^{\frac{1}{2}} = 0, \\ \lim_{t\uparrow\omega}\left(|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\nu_0\mu_0 H_1'(t)J_2(t)}{J_2'(t)|H_1(t)|^{\frac{3}{2}}}\right) = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Значит, коэффициенты при v_1 и v_2, стоящие в квадратных скобках полученной системы дифференциальных уравнений имеют конечные пределы при $t \uparrow \omega$.

Учитывая вышеизложенное и тот факт, что согласно третьему из условий (19) $\operatorname{sign} J_2(t) = \alpha_0\nu_1$, приведем данную систему с помощью преобразования

$$x(t) = \alpha_0\nu_1 \int_{t_0}^{t} \frac{J_2'(\tau)|H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,d\tau}{J_2(\tau)}, \quad v_1(t) = z_1(x), \quad v_2(t) = z_2(x) \tag{44}$$

к системе с почти постоянными коэффициентами, допускающей применения результатов из работ В. М. Евтухова, А. М. Самойленко [6] и В. М. Евтухова [7].

Поскольку $x'(t) > 0$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $x(t) \longrightarrow +\infty$ при $t \uparrow \omega$, то в результате этого преобразования получим заданную на множестве $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^2_\delta$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = f_1(x) + c_{11}(x)z_1 + c_{12}(x)z_2, \\ z_2' = c_{21}(x)z_1 + c_{22}(x)z_2 + Z(x,z_1), \end{cases} \tag{45}$$

в которой

$$f_1(x(t)) = \alpha_0\nu_1\beta(t)[q_1(t)-1]|H_1(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{11}(x(t)) = \alpha_0\nu_1\beta(t)h_1(t)|H_1(t)|^{\frac{1}{2}},$$

$$c_{12}(x(t)) = \alpha_0\nu_1\beta(t)q_1(t), \quad c_{21}(x) = \alpha_0\nu_1, \quad c_{22}(t) =$$

$$= \alpha_0\nu_1\left(|H_1(t)|^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\nu_0\mu_0 H_1'(t)J_2(t)}{J_2'(t)|H_1(t)|^{\frac{3}{2}}}\right), \quad Z(x(t), z_1) = \alpha_0\nu_1 R(t, v_1).$$

Здесь в силу (38)

$$|Z(x, z_1)| \leqslant \alpha_0\nu_1(1+\varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad x \in [0, +\infty[\quad \text{и} \quad |z_1| \leqslant \delta$$

и в силу (42), (43) и (13)

$$\lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = \nu_1\mu_0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{21} = \alpha_0\nu_1, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = 0.$$

Характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов при линейной части этой системы имеет вид

$$\lambda^2 - \alpha_0\mu_0 = 0.$$

В случае, когда выполняются условия (23) это уравнение имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm 1$ и

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.$$

Тогда согласно теореме 2.2 из работы [6] система уравнений (45) имеет однопараметрическое семейство решений $(z_1, z_2) : [x_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_* \geqslant 0)$, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$. Каждому из них в силу замен (44), (41), (34) и последнего из условий (19) соответствует решение $y : [t_*, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_* \in [a, \omega[)$ дифференциального уравнения (1), допускающее асимптотические представления (20), (24). Следовательно, справедливо первое утверждение теоремы.

Допустим теперь, что соблюдаются условия (25), (26). В этом случае характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и соблюдаются условия

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x c_{22}(x) = 0$$

и

$$\left|x^2 Z\left(x, \frac{z_1}{x}\right)\right| \leqslant \alpha_0\nu_1(1+\varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad x \in]0, +\infty[\quad \text{и} \quad |z_1| \leqslant \delta.$$

Поэтому для системы дифференциальных уравнений (45) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [7]. Согласно этой теореме система (45) имеет хотя бы одно решение $(z_1, z_2) : [x_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_* \geqslant 0)$, удовлетворяющее асимптотическим соотношениям

$$z_i(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) \ (i = 1, 2) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Этому решению в силу замен (44), (41), (34) и последнего из условий (19) соответствует решение $y : [t_*, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_* \in [a, \omega[)$ дифференциального уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (27), (28).

Теорема полностью доказана.

Заключение. В настоящей работе впервые для уравнения вида (1) с быстроменяющейся при $y \to Y_0$, где Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, нелинейностью φ установлены условия существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$–решений в особом случае $\lambda_0 = 1$, а также асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leqslant +\infty)$ для таких решений и их производных первого порядка. Раньше для класса $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$–решений достаточно полно был исследован вопрос о их наличии и асимптотике в случае правильно меняющейся при $y \to Y_0$ нелинейности φ.

1. **Marić V.** Regular Variation and Differential Equations / Marić V. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. – 128p. – (Lecture Notes in Mathematics 1726).
2. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, В. М. Харьков // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1311–1323.
3. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями/ В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 5. – С. 628–650.
4. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дисс. д. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 «Дифференциальные уравнения» / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 295 с.
5. **Bingham N. H.** Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. – Cambridge university press. Cambridge, 1987. – 494p.
6. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. Мат. Ж. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.
7. **Евтухов В. М.** Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 441–452.

Чернікова А. Г.

Асимптотика швидко змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з швидко змінними нелінійностями

Резюме

Для двочлених істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку з швидко змінною нелінійністю встановлюються необхідні й достатні умови існування та асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leqslant +\infty)$ зображення швидко змінних розв'язків.

Ключові слова: швидко змінні функції, нелінійні диференціальні рівняння, асимптотика розв'язків.

Chernikova A. G.

Asymptotic of rapid varying solutions of differential equations of the second order with rapid varying nonlinearities

Summary

The question of the asymptotic behavior of the differential equations' solution by $t \uparrow \omega$ $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y)$, where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\varphi : \Delta_{y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ is a twice continuously differentiable function belonging to the advanced Khan's class $\gamma_{y_0}(z_0)$, where y_0 is either zero or $\pm\infty$, Δ_{y_0} — some one-sided neighborhood y_0 and $z_0 = \lim_{y \to y_0} \varphi(y)$ is investigated. Here, unlike most well known works on the subject, the function φ is the regularly varying one by $y \to Y_0$. Necessary and sufficient conditions are established for the given equation in this case, for the existence of $P_\omega(Y_0, 0)$-solutions and asymptotic representations of these solutions and their derivatives of the first order by $t \uparrow \omega$. Such solutions are slowly varying functions when $t \uparrow \omega$.
Key words: rapid varying functions, non-linear differential equationa, asymptotic of solutions.

References

1. Maric, V. (2000). Regular Variation and Differential Equations. *Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Vol. 1726*, 128.
2. Evtuhov, V. M., & Khar'kov, V. M. (2007). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy sushestvenno nelineynih differencial'nih uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic presentation of the solutions for the essentially nonlinear equations of the second order]. *Differencial'nie uravneniya – Differential equations, Vol. 43, 9*, 1311–1323 [in Russian].
3. Evtuhov, V. M., & Samoylenko, A. M. (2011). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnih obiknovennih differencial'nih uravneniy s pravil'no menyayushimisya nenileynostyami [Asymptotic presentations of the solutions for the nonautonomous ordinary differential equations with correctly changing nonlinearity]. *Differencial'nie uravneniya - Differential equations, Vol. 47, 5*, 628–650 [in Russian].
4. Evtuhov, V. M. (1998). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnih obiknovennih differencial'nih uravneniy [Asymptotic presentations of the solutions for the nonautonomous ordinary differential equations]. *Dissertacia d. fiz.-mat. nauk: spec. 01.01.02 "Differencial'nie uravneniya" – Dissertation of d. phys.-math. sci.: spec. 01.01.02 "Differential equations"*, 295 [in Russian].
5. Bingham, N. H, Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1987). *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.* Cambridge: Cambridge university press.
6. Evtuhov, V. M., & Samoylenko, A. M. (2010). Usloviya sushestvovaniya ischezayushih v osoboy tochke resheniy u veshestvennih neavtonomnih system kvazilineynih differencial'nih uravneniy [Existence's conditions of solutions which disappear in the special point of the real nonautonomous systems of the quasilinear differentia equations]. *Ukr. Mat. Zh. – Ukr. Math. J., Vol. 62, 1*, 52–80.
7. Evtuhov, V. M. (2003). Ob ischezayushih na beskonechnosti resheniyah neavtonomnih system kvazilineynih differencial'nih uravneniy [About solutions of the nonautonomous systems of the quasilinear differential equations which disappear in the infinity]. *Differencial'nie uravneniya – Differential equations, Vol. 39, 4*, 441–452 [in Russian].