УДК 517.925.4

В. К. Круглов
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В работе рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка, которое обобщает дифференциальные уравнения, приводящие к полиномам Якоби, Лагерра и Эрмита. Доказана ортогональность полиномов, которые являются решениями рассматриваемого уравнения.
MSC: 34A35.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение, ортогональные полиномы.

Введение. Построим решение следующего линейного дифференциального уравнения

$$t^2\left(A_2t^n+B_2\right)u''+t\left(A_1t^n+B_1\right)u'-\{(\rho+m)\left[A_1+(\rho+m-1)A_2\right]t^n+ \\ +\rho\left[B_1+(\rho-1)B_2\right]\}u=0, \tag{1}$$

где A_i, B_i, ρ и m — комплексные параметры, $n \geqslant 0$ — целое число.

Это уравнение является обобщением известных дифференциальных уравнений [1, с. 80], приводящих к классическим ортогональным полиномам Якоби, Лагерра, Эрмита, именно, соответственно, к уравнениям

$$\left(1-t^2\right)u"+\left[(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2)t\right]u'+m\left(m+\alpha+\beta+1\right)u=0, \tag{2}$$

$$tu''+(1+\alpha-t)u'+mu=0, \tag{3}$$

$$u''-2tu'+2mu=0. \tag{4}$$

Действительно, уравнения (1) и (2) совпадают, если в уравнении (1) $n=1$, $\rho=0$, $A_2=-1$, $A_1=-(\alpha+\beta+2)$, $B_2=2$, $B_1=2\beta+2$, а в уравнении (2) сделать замену $\tau=1+t$. При $n=1$, $\rho=0$, $A_2=0$, $A_1=-1$, $B_1=1+\alpha$, $B_2=1$ из (1) получаем (3). При $n=2$, $\rho=0$, $A_2=0$, $A_1=-2$, $B_2=1$, $B_1=0$ из (1) получаем (4).

Основные результаты. Для уравнения (1) будем различать два случая:

А) все параметры отличны от нуля и произвольны.

Б) $A_2=0$, все остальные параметры отличны от нуля и произвольны.

Решение уравнения (1) в окрестности точки $t=0$ ищем в виде степенного ряда

$$u(t)=t^v\left(e_0+e_1t+...\right). \tag{5}$$

Случай А. Обозначим

$$\alpha_k=A_1+(2\rho+k+m-1)A_2,\ \beta_{n+k}=B_1+(2\rho+n+k-1)B_2. \tag{6}$$

Получена 24.12.2015

Подставляя (5) в (1) и обнуливая коэффициенты при степенях t, получим равенства

$$(v + k - \rho)\,[B_1 + (v + k + \rho - 1)\,B_2]\,e_k = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{7}$$

$$\begin{gathered}(v + n + k - \rho)\,[B_1 + (v + n + k + \rho - 1)\,B_2]\,e_{n+k} + \\ + (v + k - \rho - m)\,[A_1 + (v + k + \rho + m - 1)\,A_2]\,e_k = 0, \quad k = 0, 1, ...\end{gathered} \tag{8}$$

Покажем, что в качестве определяющего уравнения можно взять любое уравнение из (7).

Пусть в (7) $k = 0$ и $e_0 \neq 0$. Тогда $v_1 = \rho, \quad v_2 = -\frac{B_1}{B_2} - \rho + 1$. Рассмотрим вариант, когда $v_1 \neq v_2$, и все дальнейшие рассуждения проведем для $v_1 = \rho$. Предположим, что $B_1 + (2\rho + k - 1)\,B_2 \neq 0$ для любого k. Тогда из равенств (7) следует, что $e_1 = ... = e_{n-1} = 0$, и, следовательно, в равенствах (8) $e_{n+k} = 0$ для $k \neq 0\,(mod\,n)$, а для $k = pn$, $p = 0, 1, 2, ...$,

$$n\,(p+1)\,\beta_{(p+1)n} e_{(p+1)n} + (pn - m)\,\alpha_{pn} e_{pn} = 0. \tag{9}$$

Но тогда

$$e_{n(p+1)} = -\tfrac{(pn-m)\alpha_{pn}}{n(p+1)\beta_{(p+1)n}} e_{np} = (-1)^{p+1}\,\tfrac{(-m)(n-m)...(pn-m)\alpha_0\alpha_n...\alpha_{pn}}{n^{p+1}(p+1)!\beta_n\beta_{2n}...\beta_{(p+1)n}} e_0, \tag{10}$$

где α_k и β_k определены равенствами (6).

Первое решение уравнения (1) для произвольного значения параметра m в окрестности точки $t = 0$ при $v = \rho$ определяется формулой

$$\begin{gathered}u_m\,(t) = e_0^{(m)} t^{\rho} \sum_{p=0}^{\infty} e_{n(p+1)} t^{n(p+1)} = \\ = e_0^{(m)} t^{\rho} F\left(-\tfrac{m}{n}, \tfrac{a+m}{n}; \tfrac{b}{n} + 1; -\tfrac{A_2}{B_2} t^n\right) = e_0^{(m)} t^{\rho} F_m\,(t)\,,\end{gathered} \tag{11}$$

$$a = \left(\frac{A_1}{A_2} + 2\rho - 1\right), \quad b = \left(\frac{B_1}{B_2} + 2\rho - 1\right), \tag{12}$$

$e_0^{(m)}$ – произвольная постоянная, а $F_m\,(t)$ – гипергеометрическая функция.

Пусть в (7) $e_s \neq 0$, $0 \leqslant s \leqslant n - 1$. Тогда

$$(v + s - \rho)\,[B_1 + (v + s + \rho - 1)\,B_2]\,e_s = 0,$$

отсюда $v_1 = \rho - s$ и все коэффициенты $e_{n+k} = 0$ для $k \neq s\,(mod\,n)$, т. к. для $v_1 = \rho - s$ коэффициенты $e_0 = ... = e_{s-1} = e_{s+1} = ... = e_{n-1} = 0$, а для $k = np + s$, $p = 0, 1, ...$, получим

$$n\,(p + 1)\,\beta_{(p+1)n} e_{n(p+1)+s} + (pn - m)\,\alpha_{np} e_{np+s} = 0.$$

Отсюда видно, что коэффициенты $e_{n(p+1)+s}$ находятся по тем же формулам (10), где вместо e_0 надо писать e_s, а решение уравнения (1) имеет вид

$$t^{\rho - s}\left(e_s t^s + e_{s+n} t^{n+s} + ... + e_{np+s} t^{np+s} + ...\right),$$

т. е. ничем не отличается от степенного ряда в (11). Поэтому здесь и в дальнейшем за определяющее уравнение берем уравнение (7) при $k = 0$.

Пусть число $\frac{b}{n}$ не равно никакому целому отрицательному числу. Тогда степенной ряд в (11) будет равномерно сходиться при $|t| < \sqrt[n]{\frac{B_2}{A_2}}$. Используя аналитическое продолжение, функция $F_m(t)$ аналитична во всей плоскости, разрезанной, например, вдоль действительной оси от $t = \sqrt[n]{\frac{B_2}{A_2}}$ до $+\infty$.

Зафиксируем в уравнении (1) все параметры, кроме m. Изменяя m, в результате получим семейство $\{u_m(t)\}$ первых решений уравнения (1), а значит, согласно (11), семейство $\{F_m(t)\}$ гипергеометрических функций. Покажем, что при определенных условиях любые две из них ортогональны.

Пусть $u_s(t) = e_0^{(s)} t^{\rho} F_s(t)$, $u_r(t) = e_0^{(r)} t^{\rho} F_r(t)$ – решения уравнения (1) при $m = s$ и $m = r$, $s \neq r$.

Запишем уравнение (1) в самосопряженном виде

$$\begin{gathered}\left[t^2 \left(A_2 t^n + B_2\right) \mu(t)\, u'\right]' - \{(\rho + m)\left[A_1 + (\rho + m - 1) A_2\right] t^n + \\ + \rho\left[B_1 + (\rho - 1) B_2\right]\} \mu(t)\, u(t) = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

где функция $\mu(t)$ находится из уравнения

$$\left[t^2 \left(A_2 t^n + B_2\right) \mu(t)\right]' = t\left(A_1 t^n + B_1\right) \mu(t), \tag{14}$$

и она равна

$$\mu(t) = t^d \left(A_2 t^n + B_2\right)^{\frac{a-b}{n} - 1}, \tag{15}$$

где $d = \frac{B_1}{B_2} - 2$, a и b определены в (12).

Так как $u_s(t)$ и $u_r(t)$ решения уравнения (13), то запишем это уравнение для функции $u_s(t)$ и полученное равенство умножим на $u_r(t)$. Заменив затем r на s и s на r, вычтем полученные равенства. В результате получим

$$\begin{gathered}\left[t^2 \left(A_2 t^n + B_2\right) \mu(t)\, W(u_s, u_r)\right]' + (r - s) \times \\ \times \left[A_1 + (2\rho + r + s - 1) A_2\right] t^n \mu(t)\, u_s(t)\, u_r(t) = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

где $W(u_s, u_r)$ – определитель Вронского. Очевидно, что это равенство можно сократить на ненулевой множитель $e_0^{(s)} e_0^{(r)}$. Поэтому

$$W(u_s, u_r) = \begin{vmatrix} t^{\rho} F_s(t) & t^{\rho} F_r(t) \\ \left[t^{\rho} F_s(t)\right]' & \left[t^{\rho} F_r(t)\right]' \end{vmatrix} = t^{2\rho} \begin{vmatrix} F_s(t) & F_r(t) \\ F_s'(t) & F_r'(t) \end{vmatrix} =$$

$$= t^{2\rho + n - 1} \left(\alpha + \beta t^n + \ldots\right),$$

где $\alpha = \frac{(s-r)(s+r+a)}{b+n} \neq 0$ при $s \neq r$.

Если квадратную скобку из (16) разложить по степеням t, то слагаемое с наименьшей степенью t имеет следующий вид:

$$t^{b+n} \left(A_2 t^n + B_2\right)\left(\alpha + \beta t^n + \ldots\right).$$

Пусть $\delta_k = \varepsilon_k \sqrt[n]{-\frac{B_2}{A_2}}$ – корни уравнения $A_2 t^n + B_2 = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; ε_k – корни n-й степени из единицы. Зафиксируем какой-либо корень δ_k.

Пусть

$$Re\,(b + n) > 0 \quad \text{и} \quad Re\,(a - b) > 0. \tag{17}$$

Тогда при интегрировании равенства (16) по прямолинейному отрезку $(0, \delta_k)$ и учитывая условия (17), получим

$$t^2 \left(A_2 t^n + B_2\right) \mu(t)\, W\left(u_s, u_r\right)\Big|_0^{\delta_k} = 0,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^{\delta_k} t^{d+n} \left(A_2 t^n + B_2\right)^{\frac{a-b}{n}-1} u_s(t)\, u_r(t)\, dt =$$
$$= \int\limits_0^{\delta_k} t^{b+n-1} \left(A_2 t^n + B_2\right)^{\frac{a-b}{n}-1} F_s(t)\, F_r(t)\, dt = 0.$$

Таким образом, любые две гипергеометрические функции $F_s(t)$ и $F_r(t)$, определяемые формулой (11) при $m = s$ и $m = r$, $s \neq r$, ортогональны на прямолинейном отрезке $(0, \delta_k)$ с весом

$$t^{b+n-1} \left(A_2 t^n + B_2\right)^{\frac{a-b}{n}-1}. \tag{18}$$

Выделим в семействе $\{F_m(t)\}$ множество полиномов. Это произойдет при $m = np$, $p = 0, 1, \ldots$. Тогда

$$F_{np}(t) = F\left(-p, \frac{a}{n} + p;\ \frac{b}{n} + 1; -\frac{A_2}{B_2} t^n\right) = 1 + \frac{p\left(\frac{a}{n} + p\right)}{\frac{b}{n} + 1} \frac{A_2}{B_2} t^n + \ldots +$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)\left(\frac{a}{n}+p\right)\ldots\left(\frac{a}{n}+p+k-1\right)}{k!\left(\frac{b}{n}+1\right)\ldots\left(\frac{b}{n}+k\right)} \left(\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{B}_2} t^n\right)^k + \ldots +$$
$$+ \frac{\left(\frac{a}{n}+p\right)\ldots\left(\frac{a}{n}+2p-1\right)}{\left(\frac{b}{n}+1\right)\ldots\left(\frac{b}{n}+p\right)} \left(\frac{A_2}{B_2} t^n\right)^p = \Omega_p(t^n). \tag{19}$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\delta_k} t^{b+n-1} \left(A_2 t^n + B_2\right)^{\frac{a-b}{n}-1} \Omega_r(t^n)\, \Omega_s(t^n)\, dt = 0,\ r \neq s.$$

Вычислим теперь этот интеграл при $r = s$:

$$\int\limits_0^{\delta_k} t^{b+n-1} \left(A_2 t^n + B_2\right)^{\frac{a-b}{n}-1} \Omega_s^2(t^n)\, dt = d_s^2,\ s = 0, 1, \ldots\ . \tag{20}$$

Воспользуемся известным соотношением [1, с. 42] для трех последовательных ортогональных многочленов $P_{n-1}(t)$, $P_n(t)$ и $P_{n+1}(t)$

$$t P_n(t) = R_n P_{n+1}(t) + Q_n P_n(t) + T_n P_{n-1}(t),$$

где R_n, Q_n, T_n – известные постоянные. Запишем это равенство для многочленов $\Omega_p(t^n)$, именно

$$t^n \Omega_s(t^n) = R_s \Omega_{s+1}(t^n) + Q_s \Omega_s(t^n) + T_s \Omega_{s-1}(t^n). \tag{21}$$

Положим $\Omega_{-1}(t^n) \equiv 0$. Подставляя в (21) равенства (19), достаточно просто получаем

$$R_s = \frac{B_2}{A_2}\frac{\left(\frac{a}{n}+s\right)\left(\frac{b}{n}+s+1\right)}{\left(\frac{a}{n}+2s\right)\left(\frac{a}{n}+2s+1\right)},\ T_s = \frac{B_2}{A_2}\frac{s\left(s-1+\frac{a-b}{n}\right)}{\left(\frac{a}{n}+2s-1\right)\left(\frac{a}{n}+2s\right)},$$

$$Q_s = \frac{B_2}{A_2}\left[\frac{s\left(\frac{b}{n}+s\right)}{\frac{a}{n}+2s-1} - \frac{(s+1)\left(\frac{b}{n}+s+1\right)}{\frac{a}{n}+2s+1}\right].$$

Для числа d_s^2 справедливо рекуррентное соотношение [1, с. 42, форм. (11)] $T_s d_{s-1}^2 = R_{s-1} d_s^2$.

Отсюда

$$d_s^2 = \frac{T_1 T_2 ... T_s}{R_0 R_1 ... R_{s-1}} d_0^2, \tag{22}$$

где

$$d_0^2 = \int\limits_0^{\delta_k} t^{b+n-1}\left(A_2 t^n + B_2\right)^{\frac{a-b}{n}-1} dt.$$

Из (17) следует, что этот интеграл существует, а подынтегральная функция в точке $t = 0$ имеет интегрируемую особенность.

Замена $A_2 t^n = A_2\tau - B_2$ позволяет этот интеграл выразить через гамма-функцию, а именно:

$$d_0^2 = \left(-\frac{B_2}{A_2}\right)^{\frac{b}{n}+1} B_2^{\frac{a-b}{n}-1}\frac{\Gamma\left(\frac{a-b}{n}\right)\Gamma\left(\frac{b}{n}+1\right)}{n\Gamma\left(\frac{a}{n}+1\right)},$$

а

$$\frac{T_1 T_2 ... T_s}{R_0 R_1 ... R_{s-1}} = \frac{s!\frac{a-b}{n}\left(\frac{a-b}{n}+1\right)...\left(\frac{a-b}{n}+s-1\right)}{\left(\frac{b}{n}+1\right)...\left(\frac{b}{n}+s\right)\left(\frac{a}{n}+1\right)...\left(\frac{a}{n}+s-1\right)\left(\frac{a}{n}+2s\right)}.$$

Случай Б. Пусть в уравнении (1) $A_2 = 0$. Тогда равенства (6) преобразуются следующим образом: $\alpha_k = A_1,\ \beta_{n+k} = B_1 + (2\rho + n + k - 1) B_2$. Определяющее уравнение сохраняется, и потому $v_1 = \rho$, а

$$e_{n(p+1)} = \frac{(-1)^{p+1}(-m)(n-m)...(pn-m)A_1^{p+1}}{n^{p+1}(p+1)!\beta_n\beta_{2n}...\beta_{(p+1)n}} e_0. \tag{23}$$

Решение уравнения

$$B_2 t^2 u^n + t\left(A_1 t^n + B_1\right)u' - \left\{(\rho+m)A_1 t^n + \rho\left[B_1 + (\rho-1)B_2\right]\right\}u = 0 \tag{24}$$

определяется функцией

$$u_m(t) = e_0^{(m)} t^\rho \tilde{F}\left(-\frac{m}{n}; \frac{b}{n}+1; -\frac{A_1}{nB_2}t^n\right), \tag{25}$$

где $\tilde{F}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Если $m = np,\ p = 0, 1, ...,$ то

$$u_{np} = e_0^{(m)} t^\rho \left[1 + \sum_{n=1}^{p} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!\left(\frac{b}{n}+1\right)\dots\left(\frac{b}{n}+k\right)} \left(\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{B}_2 n}\right)^k t^{kn} \right] = e_0^{(m)} t^\rho Y_p(t^n).$$

Покажем, что полиномы $Y_p(t)$ ортогональны на луче $(0, \infty)$ с некоторым весом $\omega(t)$, а именно

$$\int_0^\infty \omega(t)\, Y_p(t)\, Y_s(t)\, dt = 0, \quad p \neq s, \quad p, s = 0, 1, ... \tag{26}$$

Определим функцию $\mu(t)$, приводящую уравнение (24) к самосопряженному виду, получим аналог равенства (16)

$$\left[B_2 t^2 \mu(t)\, W(u_{np}, u_{ns})\right]' + (p-s)\, A_1 t^n \mu(t)\, u_{np} u_{ns} = 0.$$

Легко установить, что

$$W(u_{np}, u_{ns}) = t^{2\rho+n-1}(\alpha + \beta t^n + ...),$$

где $\alpha = \frac{(p-s)A_1}{nB_2\left(\frac{b}{n}+1\right)} \neq 0$, а выражение в круглых скобках — это полином степени $t^{(p+s)n}$. Функцию $\mu(t)$, приводящую уравнение (24) к самосопряженному виду, находим из уравнения

$$\left[B_2 t^2 \mu(t)\right]' = t\,(A_1 t^n + B_1)\,\mu(t)$$

и она равна

$$\mu(t) = t^{\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}-2} \exp\left(\frac{A_1}{nB_2} t^n\right). \tag{27}$$

Тогда

$$\left[B_1 t^{b+n} \exp\left(\tfrac{A_1 t^n}{nB_2}\right)(\alpha + \beta t^n + ...)\right]' +$$
$$+ (p-s)\, t^{\frac{B_1}{B_2}+n-2} \exp\left(\tfrac{A_1 t^n}{nB_2}\right) u_{np} u_{ns} = 0.$$

Пусть $Re\,(b+n) > 0,\ Re\frac{A_1}{B_2} < 0$. Интегрируя последнее равенство по лучу $(0, \infty)$, получим

$$\int_0^\infty t^{\frac{B_1}{B_2}+n-2} \exp\left(\tfrac{A_1 t^n}{nB_2}\right) u_{np} u_{ns} dt =$$
$$= \int_0^\infty t^{b+n-1} \exp\left(\tfrac{A_1 t^n}{nB_2}\right) Y_p(t^n)\, Y_s(t^n)\, dt = 0, \quad p \neq s.$$

Таким образом, полиномы $Y_p(t^n)$ и $Y_s(t^n)$ ортогональны на луче $(0, \infty)$ с весом

$$t^{b+n-1} \exp\left(\frac{A_1 t^n}{nB_2}\right).$$

Для ортогональных полиномов $Y_p(t^n)$ легко проверяются равенства (21), где

$$R_p(t) = \frac{B_2 n}{A_1}\left(\frac{b}{n} + p + 1\right), \quad Q_p = -\frac{nB_2}{A_1}\left(\frac{b}{n} + 2p + 1\right), \quad T_p = \frac{npB_2}{A_1}.$$

Число d_p^2 найдем по формуле (22)

$$d_p^2 = \frac{T_1 T_2 ... T_p}{R_0, R_1, ... R_{p-1}} d_0^2,$$

где

$$d_0^2 = \int\limits_0^{\infty} t^{b+n-1} \exp\left(\frac{A_1 t^n}{n B_2}\right) dt = \left(-\frac{A_1}{B_2}\right)^{-\frac{b}{n}-1} n^{\frac{b}{n}} \Gamma\left(b+n\right).$$

Заключение. Доказана ортогональность полиномов, которые являются решениями дифференциального уравнения второго порядка, которое обобщает дифференциальные уравнения, приводящие к полиномам Якоби, Лагерра и Эрмита.

1. **Никифоров А. Ф.** Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М.: Наука, 1984. – 343 с.

Круглов В. Є.

Одне узагальнення класичних ортогональних многочленів

Резюме

У роботі розглянуто диференціальне рівняння другого порядку, яке узагальнює диференціальні рівняння, що приводять до поліномів Якобі, Лагерра й Ерміта. Доведена ортогональність поліномів, які утворюють розв'язки розглянутого рівняння.
Ключові слова: диференціальне рівняння, ортогональні поліноми.

Kruglov V. Ye.

One generalization of the classical orthogonal polynomials

Summary

The differential equation of the second order, generalizing the differential equations leaded to Jacobi, Laguerre and Hermite polynomials, is considered in the paper. The orthogonality of the polynomials, which are the solutions of the equation, is proved.
Key words: differential equation, orthogonal polynomials.

References

1. **Nikiforov, A. F., Uvarov, V. B.** 1984, *Special functions of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 343 p.