

УДК 517.9

**М. В. Плахотник**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**НЕОБОРОТНИЙ АНАЛОГ СПРЯГАЮЧОГО ВІДОБРАЖЕННЯ  
ДЛЯ ПАРИ ТЕНТОПОДІБНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

Вивчається функціональне рівняння, яке визначає топологічну спряженість пари тентоподібних кусково лінійних відображень інтервалу в себе. Отримано всі неперервні розв'язки цього функціонального рівняння, зокрема доведено, що їх існує зліченна кількість.

MSC: 37E05.

*Ключові слова:* топологічна спряженість, тент-відображення, одновимірна динаміка.

**ВСТУП.** Вивчення динамічних систем з точністю до топологічної спряженості є природним і широко відомим прийомом в теорії динамічних систем, та бере свій початок ще в роботах Анрі Пуанкаре. Нагадаємо, що відображення  $f_1$  та  $f_2$ , які відображають інтервал  $[0; 1]$  в себе, називаються топологічно спряженими, якщо існує гомеоморфізм (тобто неперервне оборотне відображення)  $\tau : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , для якого діаграма

$$\begin{array}{ccc} [0; 1] & \xrightarrow{f_1} & [0; 1] \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ [0; 1] & \xrightarrow{f_2} & [0; 1] \end{array}$$

є комутативною, тобто  $\tau(f_1(x)) = f_2(\tau(x))$  для кожного  $x \in [0; 1]$ .

В підручниках з теорії динамічних систем (див., напр.: [3, с. 14]) згадується топологічна спряженість відображення  $f$ , заданого як

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1/2; \\ 2 - 2x, & x \geq 1/2, \end{cases} \quad (1)$$

та відображення  $\tilde{f}(x) = 4x(1-x)$ . Гомеоморфізм  $\tilde{h}$ , який задає топологічну спряженість  $f$  та  $\tilde{f}$ , має вигляд

$$\tilde{h}(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Наведений приклад природно надихає на розгляд питання про топологічну спряженість  $f$  вигляду (1) та відображень

$$f_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{v}, & 0 \leq x \leq v; \\ \frac{1-x}{1-v}, & v < x \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

для довільного  $v \in [0; 1] \setminus \{1/2\}$ .

Існування та єдиність гомеоморфізму  $h$ , який визначає топологічну спряженість  $f$  та  $f_v$ , є простою справою для студентів, які вивчають курс теорії динамічних систем. Робота [1] присвячена обмеженням  $h$  на множини раціональних

чисел з фіксованим знаменником, що є степенем двійки. Властивості диференційовності цього гомеоморфізму вивчалися також в [2]. Зокрема, в [2] доведено, що похідна відображення  $h$  дорівнює нулю майже скрізь, а також, що якщо похідна  $h'$  в деякій точці існує і скінченна, то вона дорівнює 0. Нетривіальність встановлених в [2] властивостей гомеоморфізму  $h$  пояснює природність задачі про знаходження негомеоморфних розв'язків функціонального рівняння

$$\eta(f(x)) = f_v(\eta(x)) \quad (3)$$

для невідомої неперервної функції  $\eta : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ .

Ми доведемо, що якщо відображення  $\eta$  монотонне, то воно є гомеоморфізмом, який визначає топологічну спряженість  $f$  та  $f_v$ . Іншими словами, розв'язок функціонального рівняння (3) не може бути неперервним, монотонним, але при цьому відобразити  $[0; 1]$  в його підмножину, котра не збігається з усім інтервалом  $[0; 1]$ .

Для гомеоморфізму  $h$ , який визначає топологічну спряженість відображень  $f$  та  $f_v$  та довільного неперервного розв'язку  $\eta$  функціонального рівняння (3), буде комутативною діаграма

$$\begin{array}{ccc} [0; 1] & \xrightarrow{f} & [0; 1] \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ [0; 1] & \xrightarrow{f_v} & [0; 1] \\ h^{-1} \downarrow & & \downarrow h^{-1} \\ [0; 1] & \xrightarrow{f} & [0; 1]. \end{array}$$

З комутативності цієї діаграми видно, що для знаходження відображення  $\eta$  необхідно і достатньо знайти неперервне відображення  $\xi$ , для якого комутуватиме діаграма

$$\begin{array}{ccc} [0; 1] & \xrightarrow{f} & [0; 1] \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ [0; 1] & \xrightarrow{f} & [0; 1], \end{array}$$

після чого відображення  $\eta$  буде задане рівністю

$$\eta = h(\xi).$$

Тому будемо шукати неперервне відображення  $\xi$  інтервалу  $[0, 1]$  в себе, котре є розв'язком функціонального рівняння

$$\xi(f(x)) = f(\xi(x)). \quad (4)$$

Основним результатом є теорема.

**Теорема 1.** *Нехай відображення  $\xi$  є неперервний розв'язок функціонального рівняння (4). Тоді  $\xi$  має один з двох виглядів:*

1. Для деякого  $k \in \mathbb{N}$

$$\xi(x) = \frac{1 - (-1)^{[kx]}}{2} + (-1)^{[kx]} \{kx\},$$

де  $\{\cdot\}$  – функція дробової частини, а  $[\cdot]$  – функція цілої частини, причому  $k \in \mathbb{N}$  може бути довільним.

2.  $\xi(x) = x_0$ , де  $x_0 = 0$ , або  $x_0 = 2/3$ .

Для довільного  $n \geq 1$  позначатимемо  $n$ -ну ітерацію відображення  $f$  через  $f^n$ , тобто  $f^n(x) = f(f(\dots(f(x))\dots))$ . Це позначення будемо використовувати не лише для відображення  $f$ , але і для відображень, позначених іншими літерами.

### 1. Про монотонність розв'язку відображення $\eta$ рівняння (3)

До кінця цього розділу будемо вважати, що  $\eta$  – неперервний розв'язок функціонального рівняння (3).

**Лема 1.**  $\eta(0) = 0$ , або  $\eta(0) = \frac{1}{2-v}$ .

**Доведення.** Підставимо значення  $x = 0$  у функціональне рівняння (3), отримавши

$$\eta(f(0)) = f_v(\eta(0)).$$

Тому  $\eta(0)$  – нерухома точка відображення  $f_v$ . Враховуючи, що відображення  $f_v$  має дві гілки монотонності, визначені рівняннями  $f_v(x) = \frac{x}{v}$  та  $f_v = \frac{1-x}{1-v}$ , то нерухоми точки відображення  $f_v$  – це  $0$  та  $\frac{1}{2-v}$ .

**Лема 2.** Якщо  $\eta(0) = 0$ , то  $\eta(1) = 0$ , або  $\eta(1) = 1$ .

**Доведення.** Підстановка значення  $x = 1$  у функціональне рівняння (3) дає рівність  $\eta(f(1)) = f_v(\eta(1))$ . Тепер твердження леми випливає з того, що  $f(1) = 0$  та того, що відображення  $f_v$  дорівнює  $0$  лише в точках  $0$  та  $1$ .

**Наслідок 1.** Якщо  $\eta(1) = 1$ , то  $\eta$  є гомеоморфізмом.

**Лема 3.** Якщо  $\eta(0) = \frac{1}{2-v}$ , то  $\eta(1) = \frac{1}{2-v}$ , або  $\eta(1) = \frac{v}{2-v}$ .

**Доведення.** Твердження леми випливає з рівності  $f_v(\eta(1)) = \frac{1}{2-v}$ , яка отримується з функціонального рівняння (3) підстановкою  $x = 1$ .

**Наслідок 2.** Якщо  $\eta$  монотонне та  $\eta(0) = \frac{1}{2-v}$ , то  $\eta(1) = \frac{v}{2-v}$ .

**Лема 4.** Якщо  $\eta(0) = \frac{1}{2-v}$  та  $\eta(1) = \frac{v}{2-v}$ , то відображення  $\eta$  є немонотонним.

**Доведення.** З функціонального рівняння (3) для  $x = 1/2$  за умов леми маємо  $f_v(\eta(1/2)) = \frac{v}{2-v}$ .

Про відображення  $f_v$  знаємо, що його графік складається з двох гілок монотонності, причому  $x = \frac{v}{2-v}$  є нерухомою точкою відображення  $f_v$ . Тобто,  $\eta(1/2)$  є нерухомою точкою відображення  $f_v$ . Втім, умова  $\eta(1/2) = \frac{v}{2-v}$  суперечить монотонності відображення  $\eta$ , звідки маємо  $\eta(1/2) = \frac{v^2}{2-v}$ . Але отримана умова також суперечить монотонності відображення  $\eta$ , бо виходить, що  $\eta(1/2) < h(0)$  та  $\eta(1/2) < h(1)$ . Останнє завершує доведення леми.

**Лема 5.** Якщо  $\eta(0) = \frac{1}{2-v}$  та  $\eta(1) = 0$ , то відображення  $\eta$  є немонотонним.

**Доведення.** З рівняння (3) для  $x = 1/2$  та умови леми маємо

$$f_v(\eta(1/2)) = 0,$$

звідки  $\eta(1/2) \in \{0; 1\}$ . Це суперечить монотонності  $\eta$ .

З доведених лем випливає така теорема.

**Теорема 2.** Якщо неперервне відображення  $\eta$ , котре є розв'язком функціонального рівняння (3), монотонне, то образ відрізка  $[0; 1]$  при дії  $\eta$  є весь відрізок  $[0; 1]$ .

## 2. Найпростіші властивості розв'язку $\xi$ функціонального рівняння (4)

**Зауваження 1.** Наведемо деякі приклади розв'язків  $\xi(x)$  функціонального рівняння (4):

1.  $\xi(x) = x$  для всіх  $x \in [0; 1]$ ;
2.  $\xi$  – тотожно стале відображення, значення якого дорівнює одній з двох нерухомих точок відображення  $f$ ;
3.  $\xi$  – деяка ітерація відображення  $f$ .

**Теорема 3.** Якщо неперервний розв'язок  $\xi$  функціонального рівняння (4), є тотожно сталим на деякому відрізку  $M = [\alpha; \beta]$ , то він є тотожно сталим на всьому відрізку  $[0; 1]$ .

**Доведення.** Доведемо, що якщо відображення  $\xi$  стає на інтервалі  $M$ , то воно або стає на деякому інтервалі  $[\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}]$  довжиною  $2(\beta - \alpha)$ , або на деякому інтервалі  $[0; \gamma]$ .

Для комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} [\alpha; \beta] & \xrightarrow{f} & f([\alpha; \beta]) \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ \xi([\alpha; \beta]) & \xrightarrow{f} & \xi(f([\alpha; \beta])) = f(\xi([\alpha; \beta])) \end{array}$$

розглянемо два випадки: містить, чи ні відрізок  $[\alpha; \beta]$  число 0,5. Якщо містить, то замінимо в комутативній діаграмі  $M$  на  $M_1 = [\alpha; 0,5]$ , або на  $M_2 = [0,5; \beta]$ . На кожному з них маємо

$$\xi(f(M_i)) = f(\xi(M_i)),$$

звідки відображення  $\xi$  виявляється сталим на множині  $f(M_i)$ .

Якщо  $M$  містить точку  $\frac{1}{2}$ , то відображення  $\xi$  буде сталим на відрізку  $f(M)$ , котрий матиме вигляд  $[\delta; 1]$  і, повторно застосувавши комутативну діаграму до нього, отримуємо відрізок вигляду  $[0; \gamma]$ , на якому відображення  $\xi$  буде сталим. Застосувавши за потреби декілька разів наведені міркування для  $[0; \gamma]$ , отримаємо, що відображення  $\xi$  буде сталим на всій множині  $[0; 1]$ .

Якщо початковий відрізок  $M$  не містить точку  $\frac{1}{2}$ , то множина  $f(M)$  буде відрізком, довжина якого в два рази більша за довжину  $M$ , причому відображення  $\xi$  буде сталим на ньому. Застосувавши наведені міркування скінченну кількість разів отримуємо, що відображення  $\xi$  стає на деякому відрізку, який містить точку 0, або точку  $\frac{1}{2}$ .

**Теорема 4.** Якщо на деякому  $x \in [a; b]$  проміжку графік відображення  $\xi \in$  відрізком прямої, на всьому проміжку  $[0; 1]$  графік відображення  $\xi \in$  ламаною, яка складається зі скінченної кількості ланок.

**Доведення.** Доведення цієї теореми цілком аналогічне до доведення теореми 3. Для доведення теореми 4 потрібно слово «стале» по всьому тексту доведення теореми 3 замінити на словосполучення «є відрізком прямої».

**3. Доведення того, що розв'язок  $\xi$  функціонального рівняння (4) кусково лінійний**

Для зручності подальших міркувань наведемо додаткові означення та позначення.

**Означення 1.** Позначимо  $A_n$ ,  $n \geq 1$  множини всіх тих точок інтервалу  $[0; 1]$  таких, що  $f^n(A_n) = 0$ .

**Лема 6.** Множина  $A_n$  описується такою рівністю:

$$A_n = \left\{ 0; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots; \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}; 1 \right\}.$$

Перед доведенням наведеної леми наведемо зауваження про те, яким можна означити відображення  $f(x)$ , якщо використовувати двійковий запис числа  $x \in [0; 1]$ .

**Зауваження 2.** Якщо двійковий запис числа  $x \in [0; 1]$  має вигляд

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots,$$

то двійковий запис числа  $f(x)$  має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 0, \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \dots \bar{\alpha}_n \dots, & \text{якщо } \alpha_1 = 1, \end{cases}$$

де  $\bar{\alpha}_i = 1 - \alpha_i$ .

**Доведення.** [Доведення леми 6]

Згідно з зауваженням 2, для кожного числа  $x \in [0; 1]$  умова  $f^n(x) = 0$  означає, що цифри його двійкового запису, починаючи з  $n + 1$ -ї довірнюють нулю, а перші  $n$  цифр є довільними. Зазначене доводить лему.

Враховуючи компактність інтервалу  $[0; 1]$ , з неперервності відображення  $\xi$  впливає його рівномірна неперервність. Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  з рівномірної неперервності відображення  $\xi$  впливає, що існує  $t$  таке, що з того, що у чисел  $a, b \in [0; 1]$  перші  $t$  двійкових цифр однакові, впливає умова

$$|\xi(a) - \xi(b)| < 2^{-n}. \quad (5)$$

Позначимо  $t_\xi(n)$  цю кількість однакових двійкових цифр.

**Лема 7.** Для кожного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо у чисел  $a, b \in [0; 1]$  перші  $t_\xi(n) + 1$  двійкові цифри однакові, то  $|\xi(a) - \xi(b)| < 2^{-n+1}$ .

**Доведення.** Нехай  $m = m_\xi(n)$  та двійкові розклади чисел  $a$  та  $b$  мають вигляд

$$a = 0, c_1 c_2 \dots c_{m+1} x_1 x_2 \dots$$

та

$$b = 0, c_1 c_2 \dots c_{m+1} y_1 y_2 \dots$$

Оскільки перші  $m$  цифр чисел  $a$  та  $b$  однакові, то виконується нерівність  $|\xi(a) - \xi(b)| < 2^n$ .

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що  $\xi(a) \geq \xi(b)$ . Припустимо, що  $\xi(a) - \xi(b) < 2^n$ , але  $\xi(a) - \xi(b) \geq 2^{n+1}$ . Це припущення, що  $\xi(a)$  та  $\xi(b)$  в двійковій системі мають один з поданих нижче виглядів:

Випадок 1:

$$\begin{aligned} \xi(a) &= 0, \underbrace{M \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1}}_n \mathbf{1} A, \\ \xi(b) &= 0, \underbrace{M \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0}}_n \mathbf{0} B, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $M, A, B, \mathbf{0}$  та  $\mathbf{1}$  – блоки з цифр, причому в блоках  $\mathbf{0}$  та  $\mathbf{1}$  кількість цифр однакова, блок  $\mathbf{0}$  складається лише з нулів, блок  $\mathbf{1}$  складається лише з одиниць і, крім того,  $0, A \geq 0, B$  та фігурна дужка, під якою написано  $n$ , означає, що  $n$  – кількість цифр у блоці, охопленому фігурною дужкою.

Випадок 2:

$$\begin{aligned} \xi(a) &= 0, \underbrace{M}_n \mathbf{1} A, \\ \xi(b) &= 0, \underbrace{M}_n \mathbf{0} B, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $M, A$  та  $B$  – блоки з цифр, причому кількість цифр в блоці  $M$  дорівнює  $n$  та виконується нерівність  $0, A \geq 0, B$ .

Якщо у чисел  $a$  та  $b$  однаковими є перші  $m + 1$  двійкова цифра, то у чисел  $f(a)$  та  $f(b)$  однаковими є перші  $m$  двійкових цифр.

Для скорочення подальших міркувань позначимо через  $M'$  – блок  $M$  з відкинутою першою цифрою, а з рискою над назвою блоку цифр, наприклад,  $\overline{A}, \overline{M}'$  і т. д. позначатимемо блок, в якому кожен  $0$  замінено на  $1$  і кожен  $1$  – на  $0$ .

З рівності

$$\xi(f(x)) = f(\xi(x))$$

маємо, що для чисел  $f(\xi(a))$  та  $f(\xi(b))$  виконується нерівність (5).

Розглянемо перший випадок, тобто коли числа  $\xi(a)$  та  $\xi(b)$  мають вигляд (6).

Якщо перша цифра блоку  $M$  дорівнює нуль, то

$$\begin{aligned} f(\xi(a)) &= 0, \underbrace{M' \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1}}_{n-1} \mathbf{1} A, \\ f(\xi(b)) &= 0, \underbrace{M' \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0}}_{n-1} \mathbf{0} B. \end{aligned}$$

Ця умова суперечить умові (5), бо виходить, що

$$f(\xi(a)) - f(\xi(b)) = 2^{-n} + 2^{-n-1} \cdot (0, A - 0, B). \quad (8)$$

Якщо перша цифра блоку  $M$  дорівнює 1, то

$$f(\xi(a)) = 0, \underbrace{\overline{M'} 0 1 0}_n 0 \overline{A},$$

$$f(\xi(b)) = 0, \underbrace{\overline{M'} 1 0 1}_n 1 \overline{B}.$$

Ця умова означає, що

$$f(\xi(b)) - f(\xi(a)) = 2^{-n} + 2^{-n-1} \cdot (0, \overline{A} - 0, \overline{B}) \quad (9)$$

і також суперечить умові (5).

Розглянемо другий випадок, тобто коли числа  $\xi(a)$  та  $\xi(b)$  мають вигляд (7). Аналогічно до «першого випадку» розглянемо альтернативу, коли перша цифра блоку  $M$  дорівнює 0 або 1.

Якщо перша цифра блоку  $M$  дорівнює 0, то

$$f(\xi(a)) = 0, \underbrace{M'}_{n-1} 1 A,$$

$$f(\xi(b)) = 0, \underbrace{M'}_{n-1} 0 B,$$

звідки різниця  $f(\xi(a)) - f(\xi(b))$  має вигляд (8), що суперечить (5).

Якщо перша цифра блоку  $M$  дорівнює 1, то

$$f(\xi(a)) = 0, \underbrace{M}_n 1 A,$$

$$f(\xi(b)) = 0, \underbrace{M}_n 0 B,$$

і різниця  $f(\xi(b)) - f(\xi(a))$  має вигляд (9), і це також суперечить (5).

**Наслідок 3.** Нехай  $t, n \in \mathbb{N}$  та  $m = m_\xi(m)$ . Якщо у чисел  $a, b \in [0; 1]$  перші  $m + t$  двійкових цифри однакові, то  $|\xi(a) - \xi(b)| < 2^{-n+t}$ .

**Доведення.** Цей наслідок доводиться індукцією за  $t$  з допомогою міркувань, цілком аналогічних до тих, що використані в лемі вище.

Наслідок 3 допускає наступну геометричну інтерпретацію. Нехай число  $n$  фіксоване. Зауважимо, що умова співпадіння перших  $m$  цифр у чисел  $a$  та  $b$  означає, що ці числа знаходяться між двома сусідніми точками множини  $A_{m+1}$ . Зафіксуємо дві довільні сусідні точки множини  $A_m$ , котрі назовемо  $\alpha(t; m)$  та  $\alpha(t + 1; m)$ . З побудови числа  $m$  за числом  $n$  маємо, що графік відображення  $h(x)$  при

$$x \in [\alpha(t; m); \alpha(t + 1; m)] \quad (10)$$

лежить в прямокутнику зі сторонами, паралельним до осей координат, який має висоту (вимір за віссю ординат), що дорівнює  $2^{-n}$ .

Лема 7 означає, що якщо ми розділимо розглянутий прямокутник на чотири частини, провівши через середини його сторін відрізки, паралельні до координатних осей, то графік відображення  $h$  буде знаходитись точно в двох з отриманих квадратів.

Наслідок 3 означає, що якщо кожен з побудованих менших квадратів, в якому знаходиться графік відображення  $\xi$ , ми в той саме спосіб розіб'ємо на 4 частини, то графік відображення  $\xi$  буде знаходитися точно в двох з чотирьох побудованих ще менших квадратів, крім того, вказаний процес дроблення можна повторювати до нескінченності.

**Означення 2.** Нехай  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m = m_\xi(n)$  та  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2^{m-1}$  – деяке ціле число. Назвемо **лініями сітки** такі відрізки:

1. Відрізки, паралельні до осі абсцис при  $x \in [\alpha(t; m); \alpha(t+1; m)]$ , котрі (можливо, не строго) обмежують графік відображення  $\xi$  і відстань між якими дорівнює  $2^{-n}$ ;

2. Горизонтальні відрізки, які з'єднують кінці ліній сітки, побудованих в п. 1.

3. Кожен з відрізків, які будуються при описаній вище геометричній інтерпретації лема 7 та наслідку 3.

Точки перетину ліній сітки називатимемо **вузлами сітки**. Прямокутники, утворені побудованими у п. 3, відрізками та відрізками, побудованими на попередньому кроці, назвемо **квадратами сітки**. При цьому нові лінії сітки (та, відповідно, квадрати сітки) будуються лише в тому разі, коли відкритий стартовий квадрат сітки містить принаймні одну точку графіку відображення  $\xi$ .

**Зауваження 3.** Зауважимо, що лінії сітки, визначені в п. 1 означення 2, визначені не однозначно — однозначно визначена лише горизонтальна відстань між цими лініями. Все інше визначене однозначно.

**Зауваження 4.** Якщо після чергового кроку розбиття сітки, визначеного п. 3 означення 2, відповідно до наслідку 3 графік відображення виходить за два сусідні по горизонталі прямокутники, то воно проходить через вузол сітки, утворений перетином нових ліній сітки.

**Доведення.** (Пояснення до зауваження) Розглянемо приклад, де на малюнку зображено інтервал  $[\alpha(t; m); \alpha(t+1; m)]$  та графік відображення  $\xi$  на цьому інтервалі.

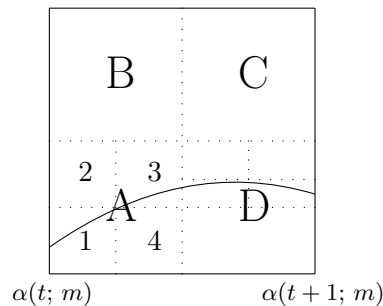


Рис. 1. Пояснення для доведення

Верхню та нижню межу на квадраті, що зображено на малюнку, розуміємо як обмеження, гарантовані означенням рівномірної неперервності функції  $\xi$ .



Квадрат ділиться на 4 квадрати, позначені літерами  $A, B, C, D$ . Графік відображення знаходиться в квадратах сітки  $A$  та  $D$ . Квадрат  $A$  поділено на чотири частини, які позначено цифрами від 1 до 4. Добре видно, що графік відображення знаходиться в утворених квадратах 1 та 3. Згідно з лемою 2 та наслідком 3 це означає, що, по-перше, цей графік проходить через точку перетину відрізків, котрі поділили квадрат  $A$  на менші квадрати 1, 2, 3, 4, а по-друге, графік відображення  $\xi$  не має точок в квадратах 2 та 4.

**Лема 8.** *Якщо відображення  $\xi$  не є тотожно сталим, то на кожному з проміжків  $J$  вигляду (10) графік відображення  $\xi$  проходить через деякий вузол сітки.*

**Доведення.** За теоремою 3 відображення  $\xi$  не є тотожно сталим на відрізку, вигляду (10), де ми розглядаємо це відображення. Тому можемо розглянути  $a = \min_{x \in J} \xi(x)$  та  $b = \max_{x \in J} \xi(x)$ , причому  $a \neq b$ .

Оскільки висота кожного квадрату зменшується і щоразу ділиться на 2, то на якомусь кроці знайдеться квадрат, висота якого буде меншою за  $b - a$ . Відповідно до зауваження 4 це означатиме, що не пізніше, ніж через цю кількість кроків графік відображення  $\xi$  пройде через вузол сітки.

**Наслідок 4.** *Якщо відображення  $\xi$  не є тотожно сталим, то на кожному з проміжків  $J$  вигляду (10) є принаймні два вузли сітки, через які проходить графік відображення, причому ці вузли мають різні ординати.*

**Доведення.** Доведення цього наслідку цілком повторює доведення леми 8.

**Лема 9.** *Якщо на деякому проміжку  $J$  вигляду (10) графік не тотожно сталого відображення  $\xi$  проходить через два вузли сітки, що мають різну ординату, то графік відображення  $\xi$  є ламаною на всьому проміжку  $[0; 1]$ , причому ця ламана має скінченну кількість ланок.*

**Доведення.** Нехай  $a, b$ , ( $a < b$ ) – точки проміжку  $J$ , в яких графік відображення  $\xi$  проходить через вузли сітки.

Тоді за наслідком 3 графік відображення  $\xi$  пройде також через точку  $(c; \xi(c))$ , яка є серединою відрізка з кінцями в точках  $(a; \xi(a))$  та  $(b; \xi(b))$ .

Застосувавши наслідок 3 до відрізків  $(a; c)$  та  $(c; b)$  і продовживши наведені міркування нескінченно багато разів для відрізків, котрі будемо отримувати, отримаємо щільну множину точок графіку відображення, котрі належать прямій, що проходить через точки  $(a; \xi(a))$  та  $(b; \xi(b))$ .

З неперервності відображення  $\xi$  отримаємо, що його графік при  $x \in [a; b]$  буде відрізком.

Звідси з теореми 4 маємо твердження леми.

**4. Властивості кусково-лінійного розв'язку  $\xi$  функціонального рівняння (4).**

До кінця цього розділу позначимо через  $k$  кутовий коефіцієнт найлівішого проміжку графіку  $\xi$ , тобто  $k = \xi'(0)$ .

**Лема 10.**  $\xi(0) \in \{0; \frac{2}{3}\}$ .

**Доведення.** Підставимо  $x = 0$  у функціональне рівняння (3) та отримаємо  $f(\xi(0)) = \xi(0)$ , тобто  $\xi(0)$  – нерухома точка відображення  $f$ . Втім відображення  $f$  має лише дві нерухоми точки – точку 0 та точку  $\frac{2}{3}$ , яка є розв'язком рівняння  $x = 2 - 2x$ .

**Лема 11.**  $\xi(0) = 0$ .

**Доведення.** Нехай  $(x_1; kx_1)$  – перша точка зламу графіку функції  $\xi$ . Тоді з комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} [0; x_1] & \xrightarrow{f} & [0; 2x_1] \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ [0; 1] & \xrightarrow{f} & [0; 1] \end{array}$$

отримуємо рівність  $\xi(2x) = -2\xi(x) + 2 = -2kx + 2$ , звідки  $2kx = -2kx + 2$ .

**Лема 12.**  $k \geq 1$ .

**Доведення.** Нехай для  $x \in [0; x_1]$  функція  $\xi$  задається рівністю  $\xi(x) = kx$ , причому  $(x_1; kx_1)$  – точка зламу графіку  $\xi$ .

Припустимо, що  $k < 1$ .

Оскільки  $k < 1$ , то для кожного  $x \in [0; 1/2]$  виконується нерівність  $kx < 1/2$  і для кожного  $x \in [0; 1/2]$  з комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & 2x \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ kx & \xrightarrow{f} & 2kx = \xi(2x) \end{array}$$

маємо, що для кожного  $x \in [0; 2x_1]$  виконується рівність  $\xi(x) = kx$ .

Це означає, що  $\xi(x) = kx$  для кожного  $x \in [0; 1]$ , тобто  $x_1 = 1$ . Але в такому разі має комутувати діаграма

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{f} & 0 \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ k & \xrightarrow{f} & ?, \end{array}$$

тобто виконувати рівність  $f(k) = 0$ , яка суперечить умові  $k < 1$ .

**Лема 13.** На проміжку  $x \in [0; \frac{1}{k}]$  виконується рівність  $\xi(x) = kx$ .

**Доведення.** Нехай  $x_1$  – абсциса першої, додатної точки зламу графіку  $\xi$ . Тоді для  $x_2 = \min\{1/2; x_1\}$  та довільного  $x \in [0; x_2]$  розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & 2x \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ kx & \xrightarrow{f} & ?, \end{array}$$

з якої за додаткової умови  $kx < \frac{1}{2}$  випливає рівність

$$2kx = \xi(2x). \quad (11)$$

Зробивши в рівності (11) заміну  $t = 2x$ , отримаємо рівність  $kt = \xi(t)$ , котра справджується при кожному  $t < \frac{1}{k}$ , звідки маємо, що на проміжку  $[0; \frac{1}{k}]$  функція  $\xi$  не має точок зламу, тобто  $x_1 \geq \frac{1}{k}$ . Втім, при  $t = \frac{1}{k}$  виконується рівність  $\xi(t) = 1$ , звідки  $x_1 \leq \frac{1}{k}$ , що доводить лему.

З лем 12 та 13 випливає такий наслідок.

**Наслідок 5.** Якщо  $k = 1$ , то  $\xi(x) = x$  для всіх  $x \in [0; 1]$ .

**Лема 14.** Для  $x \in [\frac{1}{k}; \frac{2}{k}] \cap [0; 1]$  виконується рівність  $\xi(x) = 2 - kx$ .

**Доведення.** Розглянемо для  $x \in [\frac{1}{2k}; \frac{1}{k}]$  комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & 2x \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ kx & \xrightarrow{f} & 2 - 2kx. \end{array}$$

Звідси на проміжку  $x \in [\frac{1}{k}; \frac{2}{k}]$  виконується рівність  $\xi(x) = 2 - kx$ .

**Лема 15.** На кожному проміжку вигляду  $[\frac{2t}{k}; \frac{2t+1}{k}]$  відображення  $\xi$  має кутовий коефіцієнт  $k$ , а на кожному проміжку вигляду  $[\frac{2t+1}{k}; \frac{2t+2}{k}]$  відображення  $\xi$  має кутовий коефіцієнт  $-k$ .

**Доведення.** Припустимо, що для всіх  $t \leq t_0$  лему доведено, причому  $\frac{2t+2}{k} \leq \frac{1}{2}$ . Доведемо, що в такому разі твердження леми буде справедливим і для всіх  $t \leq 2t_0$ . Застосувавши міркування, що представимо нижче,  $n$  разів (де  $n$  – деяке натуральне число) отримаємо, що твердження леми буде справедливим також для всіх  $t \leq 2^n t_0$ .

Зафіксуємо довільне  $t < t_0$  таке, що  $\frac{2t+2}{k} \leq \frac{1}{2}$ . Для множини  $M_1 = [\frac{2t}{k}; \frac{2t}{k} + \frac{1}{2k}]$  та  $x \in M_1$  розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & 2x \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ \xi(x) & \xrightarrow{f} & ? \end{array} \quad (12)$$

Оскільки на множині  $M_1$  відображення  $\xi$  зростає від 0 до  $\frac{1}{2}$ , то  $\xi(x) = kx - 2t$  при  $x \in M_1$  та комутативна діаграма може бути переписана у вигляді  $\xi(2x) = 2\xi(x)$ . Замінивши  $2x = s$ , маємо, що при  $s \in [\frac{4t}{k}; \frac{4t}{k} + \frac{1}{k}]$  виконується рівність

$$\xi(s) = ks - 4t. \quad (13)$$

Для множини  $M_2 = [\frac{2t}{k} + \frac{1}{2k}; \frac{2t+1}{k}]$  та  $x \in M_2$  розглянемо комутативну діаграму (12). Оскільки на множині  $M_2$  відображення  $\xi$  зростає від  $\frac{1}{2}$  до 1, то  $\xi(x) = kx - 2t$  при  $x \in M_2$  та комутативна діаграма може бути переписана у

вигляді  $\xi(2x) = 2 - 2\xi(x)$ . Замінивши  $2x = s$ , маємо, що при  $s \in [\frac{4t+1}{k}; \frac{4t+2}{k}]$  виконується рівність

$$\xi(s) = 2 - ks + 4t. \quad (14)$$

Для множини  $M_3 = [\frac{2t+1}{k}; \frac{2t+1}{k} + \frac{1}{2k}]$  та  $x \in M_3$  розглянемо комутативну діаграму (12). Оскільки на множині  $M_3$  відображення  $\xi$  спадає від 1 до  $\frac{1}{2}$ , то  $\xi(x) = -kx + 2t + 2$  при  $x \in M_3$  та комутативна діаграма може бути переписана у вигляді  $\xi(2x) = 2 - 2\xi(x)$ . Замінивши  $2x = s$ , маємо, що при  $s \in [\frac{4t+2}{k}; \frac{4t+3}{k}]$  виконується рівність

$$\xi(s) = ks - 4t - 2. \quad (15)$$

Для множини  $M_4 = [\frac{2t+1}{k} + \frac{1}{2k}; \frac{2t+2}{k}]$  та  $x \in M_4$  розглянемо комутативну діаграму (12).

Оскільки на множині  $M_4$  відображення  $\xi$  спадає від  $\frac{1}{2}$  до 0, то  $\xi(x) = -kx + 2t + 2$  при  $x \in M_4$  та комутативна діаграма може бути переписана у вигляді  $\xi(2x) = 2\xi(x)$ . Замінивши  $2x = s$ , маємо, що при  $s \in [\frac{4t+3}{k}; \frac{4t+4}{k}]$  виконується рівність

$$\xi(s) = -ks + 4t + 4. \quad (16)$$

Рівності (13)–(16) дозволяють реалізувати міркування, описані на початку доведення, і це доводить лему.

**Наслідок 6.** 1.  $k \in \mathbb{N}$ , причому або  $k = 1$ , або число  $k$  парне.

2. Нулі відображення  $\xi$  мають вигляд  $\frac{2t}{k}$ , де  $t \in \mathbb{N}$ .

**Доведення.** 1. Якщо  $k > 1$ , то з лем 2 та 15 випливає, що на проміжку  $[0; 1]$  відображення має цілу кількість проміжків, на кожному з яких набуває по одному значенню з інтервалу  $[0; 1]$ , причому область визначення кожного з цих проміжків є інтервалом довжиною  $\frac{1}{k}$ .

Це означає, що частка  $1 : \frac{1}{k}$  є цілим числом.

Другий пункт наслідку отримується з леми 15 прямою перевіркою.

**Лема 16.** Відображення  $\xi$ , визначене при натуральних  $k$  умовою леми 15, задовольняє функціональне рівняння (4).

**Доведення.** Для  $x \in [0; \frac{1}{2}]$  твердження леми випливає з доведення леми 15. Тому досить розглянути рівняння (4) при  $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ .

Для  $t \geq \frac{k}{2}$  та кожної з множин  $M_1 = [\frac{2t}{k}; \frac{2t}{k} + \frac{1}{2k}]$ ,  $M_2 = [\frac{2t}{k} + \frac{1}{2k}; \frac{2t+1}{k}]$ ,  $M_3 = [\frac{2t+1}{k}; \frac{2t+1}{k} + \frac{1}{2k}]$  та  $M_4 = [\frac{2t+1}{k} + \frac{1}{2k}; \frac{2t+2}{k}]$  по чергово розглянемо діаграми

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & -2x + 2 \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ [0; 1] & \xrightarrow{f} & [0; 1] \end{array} \quad (17)$$

при  $x \in M_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  та покажемо, що в разі виконання умов леми ці діаграми дійсно будуть комутувати.

При  $x \in M_1$  відображення  $\xi$  має вигляд  $\xi(x) = kx - 2t$ . Оскільки  $\xi(x) \in [0; 1/2]$ , то комутування діаграми рівносильне рівності  $2\xi(x) = \xi(-2x + 2)$ . Втім

при  $x \in M_1$  виконується включення  $2 - 2x \in \widetilde{M}_1 = [\frac{2k-4t-1}{k}; \frac{2k-4t}{k}]$ . При  $x \in \widetilde{M}_1$  відображення  $\xi$  пробігає всі значення від 1 до 0, спадаючи з кутовим коефіцієнтом  $-k$ , тобто при  $x \in \widetilde{M}_1$  має місце формула  $\xi(x) = -kx + 2k - 4t$ .

Таким чином, комутування діаграми (17) рівносильне тривіальній рівності  $2(kx - 2t) = -k(-2x + 2) + 2k - 4t$ .

При  $x \in M_2$  відображення  $\xi$  має вигляд  $\xi(x) = kx - 2t$ . Оскільки  $\xi(x) \in [1/2; 1]$ , то комутування діаграми (17) рівносильне рівності  $2 - 2\xi(x) = \xi(-2x + 2)$ . Втім при  $x \in M_2$  виконується включення  $2 - 2x \in \widetilde{M}_2 = [\frac{2k-4t-2}{k}; \frac{2k-4t-1}{k}]$ . При  $x \in \widetilde{M}_2$  відображення  $\xi$  пробігає всі значення від 0 до 1, зростаючи з кутовим коефіцієнтом  $k$ , тобто при  $x \in \widetilde{M}_2$  має місце формула  $\xi(x) = kx - 2k + 4t + 2$ .

Таким чином, комутування діаграми (17) рівносильне тривіальній рівності  $2 - 2(kx - 2t) = k(-2x + 2) - 2k + 4t + 2$ . При  $x \in M_3$  відображення  $\xi$  має вигляд  $\xi(x) = -kx + 2t + 2$ . Оскільки  $\xi(x) \in [1/2; 1]$ , то комутування діаграми (17) рівносильне рівності  $2 - 2\xi(x) = \xi(-2x + 2)$ . Втім, при  $x \in M_3$  виконується включення  $2 - 2x \in \widetilde{M}_3 = [\frac{2k-4t-3}{k}; \frac{2k-4t-2}{k}]$ . При  $x \in \widetilde{M}_3$  відображення  $\xi$  пробігає всі значення від 1 до 0, спадаючи з кутовим коефіцієнтом  $-k$ , тобто при  $x \in \widetilde{M}_3$  має місце формула  $\xi(x) = -kx + 2k - 4t - 2$ . Таким чином, комутування діаграми (17) рівносильне тривіальній рівності  $2 - 2(-kx + 2t + 2) = -k(-2x + 2) + 2k - 4t - 2$ .

При  $x \in M_4$  відображення  $\xi$  має вигляд  $\xi(x) = -kx + 2t + 2$ . Оскільки  $\xi(x) \in [0; 1/2]$ , то комутування діаграми (17) рівносильне рівності  $2\xi(x) = \xi(-2x + 2)$ . Втім при  $x \in M_4$  виконується включення  $2 - 2x \in \widetilde{M}_4 = [\frac{2k-4t-4}{k}; \frac{2k-4t-3}{k}]$ . При  $x \in \widetilde{M}_4$  відображення  $\xi$  зростає від 0 до 1 з кутовим коефіцієнтом  $k$ , тобто при  $x \in \widetilde{M}_4$  має місце формула  $\xi(x) = kx - 2k + 4t + 4$ . Таким чином, комутування діаграми (17) рівносильне тривіальній рівності  $2(-kx + 2t + 2) = k(2 - 2x) - 2k + 4t + 4$ .

Теорема 1, наведена як основний результат роботи, є природним узагальненням доведених лем.

1. **Плахотник М.** Топологічна спряженість кусково-лінійних унімодальних відображень / М. Плахотник, В. Федоренко // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ, 2014. – Т. 11, №5. – С. 115–127.
2. **Skufca J.D.** A concept of homeomorphic defect for defining mostly conjugate dynamical systems / Joseph D. Skufca, Erik M. Bolt // Chaos. – 2008. – № 03118. – Р. 1–18.
3. Шарковский А.Н. Введение в теорию функциональных уравнений / А. Н. Шарковский, С. Ф. Коляда, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко. – Киев: Наукова думка, 1989. – 216 с.

*Плахотник М. В.*

НЕОБРАТИМЫЙ АНАЛОГ СОПРЯГАЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПАРЫ ТЕНТОПОДОБНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*Резюме*

Изучается функциональное уравнение, определяющее топологическую сопряженность пары тентоподобных кусочно линейных отображений интервала в себя. Получены все непрерывные решения этого функционального уравнения, в частности доказано, что количество этих решений счетно.

*Ключевые слова:* топологическая сопряженность, тент-отображение, одномерная динамика.

*Plakhotnyk M.*

NONINVERTIBLE ANALOGUE FOR THE CONJUGATE MAPPING FOR THE PAIR OF TENT-LIKE MAPPINGS

*Summary*

The functional equation which appear in the definition of the topological conjugacy of the tent-like piecewise linear mappings of an interval into itself. All the solutions of this functional equations are obtained and the countable number of these solutions is proved.

*Key words: topological conjugacy, tent-maps, one-dimensional dynamics.*

## REFERENCES

1. **Plakhotnyk, M. & Fedorenko, V.** 2014, Topologichna spryazhenist kuskovo-liniynih unimodalnih vidobrazhen [Topological conjugation of piecewise linear unimodal mappings], *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine*, 11, no. 5., pp. 115–127.
2. **Skufca, J. D. & Bolt, E. M.** 2008, A concept of homeomorphic defect for defining mostly conjugate dynamical systems, *Chaos*, no. 03118, pp. 1–18.
3. **Sharkovskiy, A. N., Kolyada, S. F., Sivak, A. G. & Fedorenko, V. V.** 1989, *Vvedenie v teoriyu funktsionalnykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional equations], Kyiv: Naukova dumka, 216 p.