

УДК 539.375

Т. В. Полищук

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тьгини

МЕЖФАЗНАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗОНА ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

Рассмотрена симметричная задача о расчете пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела двух изотропных сред. Кусочно-однородное изотропное тело с границей раздела сред в форме сторон угла составлено из различных упругих частей. Эти части соединены тонким упруго-пластическим слоем. Зона предразрушения моделируется линиями разрыва касательного смещения, расположенными на границе раздела сред. Точное решение соответствующей задачи теории упругости построено методом Винера–Хопфа. На основе этого решения определена длина зоны предразрушения. Исследовано напряженное состояние вблизи угловой точки.

MSC: 74B20, 74C05, 74G70.

Ключевые слова: пластическая зона предразрушения, угловая точка, граница раздела сред, линия разрыва, метод Винера–Хопфа.

ВВЕДЕНИЕ. За последние годы в литературе по механике разрушения был опубликован целый ряд работ, посвященных изучению пластических зон и других зон предразрушения вблизи концов трещин в анизотропных и кусочно-однородных телах [1, 8–12]. В то же время актуальными являются задачи о расчетах зон предразрушения в угловых точках таких тел. В частности, значительный интерес для механики разрушения клеевых соединений представляют результаты исследования напряженно-деформированного состояния материала в окрестностях особых точек кусочно-однородных тел, составленных из различных упругих частей, соединенных между собой тонким связующим упруго-пластическим слоем. В данной работе такое исследование проводится для угловой точки границы раздела сред.

Упомянутые исследования напряженно-деформированного состояния сводятся к рассмотрению соответствующих задач теории упругости для кусочно-однородных клиновидных тел. Информация о сингулярностях напряжений в угловых точках, получаемая на основе решений этих задач, может быть использована при разработке численных методов расчета напряженно-деформированного состояния кусочно-однородных тел сложной структуры с угловыми точками.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Постановка задачи. В условиях плоской деформации в рамках симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное изотропное тело с границей раздела сред в форме сторон угла, которое составлено из различных упругих частей, соединенных между собой тонким связующим слоем. Материал связующего слоя предполагается упруго-пластическим.

С ростом внешней нагрузки вблизи угловой точки границы раздела сред, представляющей собой остроконечный концентратор напряжений, появляется и развивается пластическая зона предразрушения в виде пары узких полос, исходящих из данной точки и расположенных на этой границе. Будем изучать лишь

начальную стадию развития пластической зоны предразрушения, считая внешней нагрузкой достаточно малой. Тогда размер зоны будет значительно меньше размеров тела.

Ставится задача определения длины пластической зоны предразрушения и исследования напряженного состояния вблизи угловой точки границы раздела сред. Поскольку связующий материал является упруго-пластическим, преимущественные деформации в зоне предразрушения развиваются по механизму сдвига. Поэтому полосу-зону будем моделировать линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно пределу текучести связующего материала на сдвиг τ_s .

Таким образом, с учетом малости пластической зоны предразрушения с целью определения ее длины приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрезы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе (рис. 1). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача К), порождаемое единственным на интервале $] - 1; 0[$ корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная C , входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

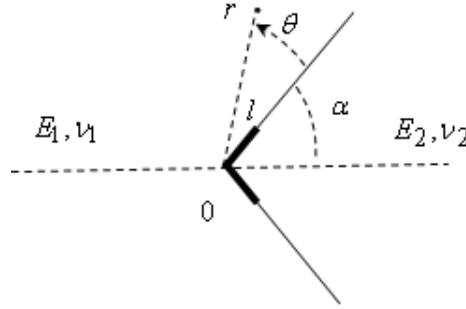


Рис. 1. Постановка задачи

Задача К решается методом разделения переменных. В частности, для напряжения $\tau_{r\theta}(r, 0)$ в этой задаче имеет место выражение

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = Cgr^{\lambda_1}, g = \lambda_1 g_1 \sin \lambda_1 \alpha - g_2 \sin(\lambda_1 + 2)\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} g_1 = & (1 - e)\lambda_1^2 \sin^2 2\alpha \cos(\lambda_1 + 2)\alpha - (1 - \varkappa_1 - 2e)\lambda_1 \sin 2\alpha \cos(\lambda_1 + 2)\alpha \times \\ & \times \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \sin[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] + [2 - (1 - \varkappa_2)e]\lambda_1 \sin 2\alpha \cos \lambda_1 \alpha \times \\ & \times \sin(\lambda_1 + 2)\alpha \cos(\lambda_1 + 2)\alpha - 2[1 - \varkappa_1 - (1 - \varkappa_2)e] \cos \lambda_1 \alpha \sin(\lambda_1 + 2)\alpha \times \\ & \times \cos(\lambda_1 + 2)\alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \sin[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] + (1 + \varkappa_1)\lambda_1 \sin 2\alpha \times \\ & \times \sin(\lambda_1 + 2)\alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \cos[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] + (1 + \varkappa_1)(1 - \varkappa_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos \lambda_1 \alpha \sin^2(\lambda_1 + 2)\alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \cos[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] - \\
& -(1 + \varkappa_2)\lambda_1 \sin 2\alpha \cos \lambda_1 \alpha \sin(\lambda_1 + 2)\alpha \cos(\lambda_1 + 2)\alpha + (1 - \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \times \\
& \times \cos \lambda_1 \alpha \sin(\lambda_1 + 2)\alpha \cos(\lambda_1 + 2)\alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \sin[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha]; \\
g_2 = & (1 - e)(1 - \varkappa_2 + \lambda_1)\lambda_1^2 \sin^2 2\alpha \cos \lambda_1 \alpha - (1 - \varkappa_1 - 2e)\lambda_1(1 - \varkappa_2 + \lambda_1) \times \\
& \times \sin 2\alpha \cos \lambda_1 \alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \sin[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] + [2 - (1 - \varkappa_2)e]\lambda_1 \times \\
& \times (1 - \varkappa_2 + \lambda_1) \sin 2\alpha \cos^2 \lambda_1 \alpha \sin(\lambda_1 + 2)\alpha - 2[1 - \varkappa_1 - (1 - \varkappa_2)e] \times \\
& \times (1 - \varkappa_2 + \lambda_1) \cos^2 \lambda_1 \alpha \sin(\lambda_1 + 2)\alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \sin[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\
& + (1 + \varkappa_1)\lambda_1^2 \sin 2\alpha \sin \lambda_1 \alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \cos[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\
& + (1 + \varkappa_1)(1 - \varkappa_2)\lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha \cos \lambda_1 \alpha \sin(\lambda_1 + 2)\alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \times \\
& \times \cos[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha] - (1 + \varkappa_2)\lambda_1^2 \sin 2\alpha \sin \lambda_1 \alpha \cos \lambda_1 \alpha \cos(\lambda_1 + 2)\alpha + \\
& + (1 - \varkappa_1)(1 + \varkappa_2)\lambda_1 \sin \lambda_1 \alpha \cos \lambda_1 \alpha \cos(\lambda_1 + 2)\alpha \cos \lambda_1(\pi - \alpha) \sin[\lambda_1(\pi - \alpha) - 2\alpha]; \\
e = & \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0; e_0 = \frac{E_1}{E_2}; \varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.
\end{aligned}$$

Здесь E_1, E_2 — модули Юнга; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; λ_1 — единственный на интервале $] - 1; 0[$ корень характеристического уравнения задачи К

$$\begin{aligned}
\Delta(-\lambda - 1) &= 0, \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2; \\
\delta_0(z) &= (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha]; \\
\delta_1(z) &= (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) \times \\
& \times [\varkappa_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] \times (\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha); \\
\delta_2(z) &= [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha).
\end{aligned}$$

Зависимость корня λ_1 от угла α качественно изображена на рис. 2.

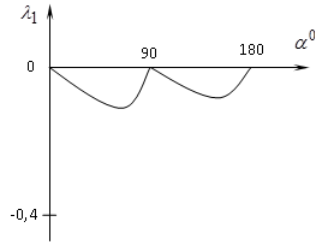


Рис. 2. Зависимость корня λ_1 от угла α

Таблица 1. Приближенные значения λ_1 в зависимости от e_0 и α^0

$e_0 \backslash \alpha^0$	2	3	5	10
15	-0,036	-0,068	-0,122	-0,215
30	-0,075	-0,132	-0,232	-0,310
45	-0,112	-0,180	-0,258	-0,332
60	-0,112	-0,184	-0,248	-0,308
75	-0,086	-0,127	-0,167	-0,203
105	-0,025	-0,037	-0,049	-0,059
120	-0,054	-0,081	-0,104	-0,124
135	-0,089	-0,130	-0,168	-0,202
150	-0,117	-0,173	-0,228	-0,278
165	-0,104	-0,168	-0,241	-0,318

В табл. 1 приведены некоторые значения корня $\lambda_1(\nu_1, \nu_2 = 0, 3)$.

Как показывают результаты расчетов, $g(\alpha) < 0$ при $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$, $g(0) = g(\pi/2) = g(\pi) = 0$; $g = 0$, если $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$.

Граничные условия рассматриваемой задачи о разрезах (рис. 1) имеют следующий вид:

$$\theta = \pi - \alpha, \tau_{r\theta} = 0; u_\theta = 0; \theta = -\alpha; \tau_{r\theta} = 0; u_\theta = 0; \quad (1)$$

$$\theta = 0, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = \tau_1;$$

$$\theta = 0, r > l, \langle u_r \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty, \tau_{r\theta} = Cgr^{\lambda_1} + o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3)$$

Здесь $-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$; $\langle a \rangle$ - скачок a ; $\tau_1 = \tau_s$, если $C < 0$; $\tau_1 = -\tau_s$, если $C > 0$.

Решение сформулированной задачи теории упругости (рис. 1) представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого условия (2) имеем

$$\theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = \tau_1 - Cgr^{\lambda_1}, \quad (4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения точного решения первой задачи будем использовать метод Винера—Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [4, 6, 7].

Решение уравнения Винера—Хопфа. Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука,

условиям (1) и учитывая второе условие (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера—Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda_1+1} = Actgp\pi G(p) \Phi^-(p); \quad (5)$$

$$A = \frac{(1 + \varkappa_1)[1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e]}{2[\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1\varkappa_2)e + \varkappa_2e^2]}; \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)};$$

$$G_1(p) = [\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1\varkappa_2)e + \varkappa_2e^2][a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi;$$

$$G_2(p) = [1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e][b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi;$$

$$a_0(p) = (1 + \varkappa_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha);$$

$$a_1(p) = (1 + \varkappa_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha];$$

$$b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha];$$

$$b_1(p) = (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times$$

$$\times [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha);$$

$$b_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \quad \tau_2 = -Cgl^{\lambda_1};$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Bigg|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho.$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — достаточно малые положительные числа.

Функция $G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) представляет собой действительную положительную четную функцию t , стремящуюся к единице при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю и имеет место факторизация

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Функцию $pctgp\pi$ можно факторизовать так:

$$p, ctgp\pi = K^+(p) K^-(p), \quad K^+(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)} \quad (7)$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция). С помощью факторизаций (6), (7) уравнение (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + \frac{\tau_1}{(p+1)K^+(p)G^+(p)} + \frac{\tau_2}{(p+\lambda_1+1)K^+(p)G^+(p)} = \\ = \frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Справедливы представления

$$\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(p)G^+(p)} = \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} \right] + \frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)}; \quad (9)$$

$$\frac{\tau_2}{(p+\lambda_1+1)K^+(p)G^+(p)} = \frac{\tau_2}{p+\lambda_1+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} \right] +$$

$$+ \frac{\tau_2}{(p+\lambda_1+1)K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0).$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} \right] + \quad (10)$$

$$+ \frac{\tau_2}{p+\lambda_1+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} \right] =$$

$$= \frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)} - \frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{\tau_2}{(p+\lambda_1+1)K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0).$$

Функция в левой части (10) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция в правой части (10) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p .

Вблизи конца разреза в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел реализуется асимптотика, представляющая собой решение однородной статической задачи теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости, содержащей на прямолинейной границе раздела сред полубесконечную линию разрыва касательного смещения, порождаемое корнем $-1/2$ ее характеристического уравнения. В частности, имеют место асимптотики

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l + 0, \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{\mathfrak{E}_{1+e+1+\mathfrak{E}_2e}}{2(1+\mathfrak{E}_2e)} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}; \quad (11)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l - 0, \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{\mathfrak{E}_{1+e}}{1+\mathfrak{E}_1} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}.$$

Здесь k_{II} — коэффициент интенсивности напряжений в конце разреза, подлежащий определению.

Исходя из (11), по теореме абелева типа получаем

$$p \rightarrow \infty, \quad \Phi^+(p) \sim \frac{\mathfrak{E}_{1+e+1+\mathfrak{E}_2e}}{2(1+\mathfrak{E}_2e)} \frac{k_{II}}{\sqrt{-2pl}}, \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{\mathfrak{E}_{1+e}}{1+\mathfrak{E}_1} \frac{k_{II}}{\sqrt{2pl}}. \quad (12)$$

Из (6), (7), (12) следует, что функции в левой и правой частях (10) стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$ соответственно. В силу теоремы Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p .

Таким образом, решение уравнения (5) имеет вид

$$\Phi^+(p) = K^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] + \quad (13)$$

$$+ \frac{\tau_2}{p+\lambda_1+1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0);$$

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{AK^-(p)} \left[\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{(p+\lambda_1+1)K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Определение длины пластической зоны предразрушения. С помощью (13) находим асимптотику

$$p \rightarrow \infty, \Phi^-(p) \sim \frac{1}{A\sqrt{p}} \left[\frac{\tau_1}{K^{+(-1)G^{+(-1)}}} + \frac{\tau_2}{K^{+(-\lambda_1-1)G^{+(-\lambda_1-1)}}} \right]. \quad (14)$$

Согласно (12), (14) получаем формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце разреза

$$k_{II} = \frac{2\sqrt{2}(1+\alpha_2 e)}{1+\alpha_1+(1+\alpha_2)e} \sqrt{l} \left[\frac{g\Gamma(\lambda_1+3/2)}{\Gamma(\lambda_1+2)G^{+(-\lambda_1-1)}} Cl^{\lambda_1} - \frac{\sqrt{\pi}}{2G^{+(-1)}} \tau_1 \right]. \quad (15)$$

Длина пластической зоны предразрушения определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линии разрыва касательного смещения, т. е. из условия равенства нулю коэффициента k_{II} .

Приравнивая к нулю правую часть (15), получаем следующую формулу, служащую для определения длины $2l$ пластической зоны предразрушения:

$$l = L \left(\frac{|Cl|}{\tau_s} \right)^{-1/\lambda_1}, \quad L = \left[\frac{2|g|(\lambda_1+3/2)G^{+(-1)}}{\sqrt{\pi}(\lambda_1+2)G^{+(-\lambda_1-1)}} \right]^{-1/\lambda_1}. \quad (16)$$

В табл. 2 приведены некоторые значения функции L ($\nu_1 = \nu_2 = 0, 3$).

Таблица 2. Приближенные значения функции L

α^0 e_0	2	3	5	10
15	1,573	2,273	3,527	5,637
30	4,546	6,299	9,102	13,451
45	5,361	6,881	9,086	11,708
60	1,982	2,296	2,680	3,241
75	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
105	$9 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	0,018
120	0,661	1,347	3,331	11,674
135	2,352	3,767	6,929	17,402
150	1,667	2,312	3,390	6,945
165	0,380	0,496	0,689	1,026

С ростом модуля параметра нагружения C длина пластической зоны предразрушения возрастает по степенному закону. Чем больше предел текучести связующего материала на сдвиг τ_s , тем меньше длина пластической зоны предразрушения.

Например, если модуль Юнга первого материала вдвое больше модуля Юнга второго материала, а коэффициенты Пуассона равны 0,3, длина пластической зоны предразрушения будет наибольшей, когда угол α приблизительно равен 37° .

Анализ поведения напряжений вблизи угловой точки. Используя (13), можно получить выражения для меллиновских трансформант напряжений. В

результате применения к этим выражениям формулы обращения Меллина могут быть определены напряжения. В частности, получаем

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(p, \theta) M(p)}{(p+1)(p+\lambda_1+1)D(p)} r^{-p-1} dp; \quad (17)$$

$$M(p) = \frac{[m_1(p+\lambda_1+1)+m_2(p+1)](1-p)G^+(p)l^{p+1}}{(1/2-p)},$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2G^+(-1)} \tau_1, m_2 = -\frac{g(\lambda_1+3/2)}{(\lambda_1+2)G^+(-\lambda_1-1)} Cl^{\lambda_1};$$

$$D(p) = d_0(p) + d_1(p) e,$$

$$d_0(p) = (1 + \varkappa_1) [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha),$$

$$d_1(p) = (1 + \varkappa_2) (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha].$$

Здесь $F(p, \theta)$ — известная целая функция p ; γ — произвольная прямая, параллельная мнимой оси и лежащая в полосе $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < 0$.

В полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 0$ подынтегральная функция в (17) имеет две особенности — простые полюсы в точках $p = -\lambda_1 - 1$ и $p = -\lambda_2 - 1$, где λ_2 — единственный на интервале $] -1; 0[$ корень уравнения $D(-\lambda - 1) = 0$.

Зависимость корня λ_2 от угла α качественно изображена на рис. 3 (пунктиром изображен график функции $\lambda_1(\alpha)$). В табл. 3 приведены некоторые значения корня λ_2 ($\nu_1 = \nu_2 = 0, 3$).

Используя эту информацию об особых точках подынтегральной функции в (17), применяя к интегралу (17) теорему о вычетах и складывая решения задач 1 и К, находим главный член разложения напряжения σ_{θ} в асимптотический ряд при $r \rightarrow 0$ в рассматриваемой задаче теории упругости с граничными условиями (1)–(3) (рис. 1).

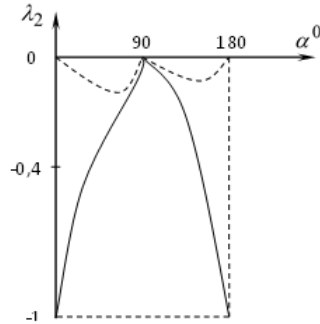


Рис. 3. Зависимость λ_2 от угла α

Имеет место следующая формула:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = r^{\lambda_2} S(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_2}) \quad (r \rightarrow 0); \quad (18)$$

Таблица 3. Приближенные значения λ_2

$e_0 \backslash \alpha^0$	2	3	5	10
15	-0,738	-0,702	-0,652	-0,602
30	-0,640	-0,611	-0,577	-0,541
45	-0,547	-0,527	-0,506	-0,484
60	-0,430	-0,419	-0,408	-0,398
75	-0,262	-0,258	-0,255	-0,252
105	-0,274	-0,277	-0,280	-0,283
120	-0,467	-0,476	-0,484	-0,492
135	-0,613	-0,628	-0,641	-0,653
150	-0,731	-0,749	-0,767	-0,782
165	-0,835	-0,855	-0,873	-0,889

$$C_1 = \frac{\Gamma(\lambda_2+2)G^+(-\lambda_2-1)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)s\Gamma(\lambda_2+3/2)} \left[\frac{\lambda_2 g \Gamma(\lambda_1+3/2)}{\Gamma(\lambda_1+2)G^+(-\lambda_1-1)} C l^{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{\sqrt{\pi}(\lambda_1-\lambda_2)}{2G^+(-1)} \tau_1 l^{-\lambda_2} \right];$$

$$s = (1 + \varkappa_1) \{ [\cos 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha][2\alpha \cos 2(\lambda_2 + 1)\alpha + \sin 2\alpha] - 2(\pi - \alpha) \sin 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) [\sin 2(\lambda_2 + 1)\alpha + (\lambda_2 + 1) \sin 2\alpha] \}$$

$$+ (1 + \varkappa_2) \{ [2(\pi - \alpha) \cos 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha][\cos 2(\lambda_2 + 1)\alpha - \cos 2\alpha] - 2\alpha \sin 2(\lambda_2 + 1)\alpha [\sin 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda_2 + 1) \sin 2\alpha] \} e;$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} [-S_1(\lambda_2 + 2) \sin \lambda_2 \theta + S_2 \sin(\lambda_2 + 2)\theta + S_3(\lambda_2 + 2) \cos \lambda_2 \theta - S_4 \cos(\lambda_2 + 2)\theta];$$

$$S_1 = 2c_1 - [c_2 c_3 + (1 + \varkappa_2)c_4 c_5]e;$$

$$S_2 = 2(1 + \lambda_2 + \varkappa_2)c_1 - [\lambda_2 c_2 c_3 - (\lambda_2 + 2)(1 + \varkappa_2)c_4 c_6]e;$$

$$S_3 = 2c_6 c_7 - [c_6 c_3 + (1 + \varkappa_1)c_4 c_8]e;$$

$$S_4 = 2(1 + \lambda_2 + \varkappa_1)c_5 c_7 - [\lambda_2 c_5 c_3 + (\lambda_2 + 2)(1 + \varkappa_1)c_4 c_8]e;$$

$$c_1 = [\cos 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha][\sin 2(\lambda_2 + 1)\alpha + (\lambda_2 + 1) \sin 2\alpha];$$

$$c_2 = \cos 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha;$$

$$c_3 = (2\lambda_2 + 3 + \varkappa_2) \sin 2\alpha + (1 - \varkappa_2) \sin 2(\lambda_2 + 1)\alpha;$$

$$c_4 = \cos 2(\lambda_2 + 1)\alpha - \cos 2\alpha;$$

$$c_5 = \sin 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha;$$

$$c_6 = \sin 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha;$$

$$c_7 = \sin 2(\lambda_2 + 1)\alpha + (\lambda_2 + 1) \sin 2\alpha;$$

$$c_8 = \cos 2(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha; 0 \leq \theta \leq \pi - \alpha.$$

Аналогичные формулы имеют место для $\sigma_\theta(r, \theta)$ при $-\alpha \leq \theta \leq 0$, а также для $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ и $\sigma_r(r, \theta)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Угловая точка O является особой точкой рассматриваемой краевой задачи теории упругости. Она представляет собой остроконечный концентратор напряжений. При приближении точки плоскости к точке O напряжения стремятся к бесконечности.

Это стремление напряжений к бесконечности соответствует экспериментальному результату [5], из которого следует, что часть пластической зоны предразрушения, находящаяся вблизи точки O , является областью деструкции материала, уровень напряжений в которой чрезвычайно высок. Даная область отличается максимально высоким уровнем пластических деформаций, наличием в ней пор и микротрещин.

Особенность напряжений в точке O степенная. Показатель степени сингулярности напряжений зависит от угла, отношения модулей Юнга и от коэффициентов Пуассона. Этот показатель представляет собой единственный на интервале $] - 1; 0[$ корень определенного трансцендентного уравнения.

С ростом угла α от нуля до 90^0 интенсивность напряжений в области деструкции материала ослабевает, а с ростом его от 90^0 до 180^0 — усиливается. Если угол α стремится к нулю или к 180^0 , показатель степени сингулярности напряжений стремится к -1 . Если угол α стремится к 90^0 , показатель степени сингулярности напряжений стремится к нулю. Если угол α острый, то с ростом отношения модулей Юнга E_1/E_2 интенсивность напряжений в области деструкции материала ослабевает, а если тупой — усиливается.

Интенсивность напряжений в области деструкции материала сильнее, чем вблизи угловой точки при отсутствии пластической зоны предразрушения.

На основе точного решения задачи теории упругости для кусочно-однородного тела клиновидной конфигурации с разрезами выведена формула, выражающая длину межфазной пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела изотропных сред через коэффициент интенсивности напряжений в этой точке. Показано, что угловая точка при наличии разрезов представляет собой концентратор напряжений со степенной особенностью. Установлен характер изменения уровня концентрации напряжений вблизи угловой точки в зависимости от угла и упругих постоянных.

1. **Бакиров В. Ф.** Модель Леонова—Панасюка—Дагдейла для трещины на границе соединения материалов / В. Ф. Бакиров, Р. В. Гольдштейн // Прикл. математика и механика. — 2004. — Т. 68, № 1. — С. 170–179.
2. **Каминский А. А.** Влияние области деструкции материала вблизи вершины межфазной трещины на условия ее страгивания / А. А. Каминский, М. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Доповіди НАН України. — 2014. — № 5. — С. 50–57.
3. **Каминский А. А.** О модели пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Т. В. Полищук // Доповіди НАН України. — 2009. — № 3. — С. 78–84.
4. **Каминский А. А.** Трещина вблизи угловой точки границы раздела сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Г. А. Хазин, Т. В. Полищук // Теоретическая и прикладная механика. — 2009. — № 46. — С. 57–61.
5. **Каминский А. А.** Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении / А. А. Каминский, Г. И. Усикова, Е. А. Дмитриева // Прикладная механика: международный журнал. — 1994. — Т. 30, № 11. — С. 69–75.
6. **Нобл Б.** Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.

7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
8. Kaminsky A. A. On the Direction of Development of a Thin Fracture Process Zone at the Tip of an Interfacial Crack between Dissimilar Media / A. A. Kaminsky, M. V. Dudik, L. A. Kipnis // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 136–144.
9. Kaminsky A. A. On the Initial Kinking of an Interface Crack between Elastic Media / A. A. Kaminsky, M. V. Dudik, L. A. Kipnis // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 10. – P. 1090–1099.
10. Kaminsky A. A. Initial Development of the Prefracture Zone near the Tip of a Crack Reaching the Interface between Dissimilar Media / A. A. Kaminsky, M. V. Dudik, L. A. Kipnis // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 2. – P. 176–182.
11. Kaminsky A. A. On the Model of Process Zone in an Elastic Body at the Crack Locating on the Non-Smooth Interface / A. A. Kaminsky, L. A. Kipnis, V. A. Kolmakova // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 10. – P. 1089–1098.
12. Loboda V. V. Determining Prefracture Zones at a Crack Tip between Two Elastic Orthotropic Bodies / V. V. Loboda, A. E. Sheveleva // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 5. – P. 566–572.

Поліщук Т. В.

МІЖФАЗНА ПЛАСТИЧНА ЗОНА ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Резюме

Розглянуто симетричну задачу про розрахунок пластичної зони передруйнування у кутовій точці межі розділу двох ізотропних середовищ. Кусково-однорідне ізотропне тіло з межею розділу середовищ у формі сторін кута складене з різних пружних частин. Ці частини з'єднані тонким пружнопластичним шаром. Зона передруйнування моделюється лініями розриву дотичного переміщення, які розташовані на межі розділу середовищ. Точний розв'язок відповідної задачі теорії пружності побудовано методом Вінера–Хопфа. На основі цього розв'язку визначено довжину зони передруйнування. Досліджено напружений стан біля кутової точки.

Ключові слова: пластична зона передруйнування, кутова точка, межа поділу середовищ, лінія розриву, метод Вінера–Хопфа.

Polishchuk T. V.

INTERFACIAL PREFRACTURE ZONE AT THE CORNER POINT OF THE MEDIA-SEPERATING BOUNDARY

Summary

The symmetric problem on the calculation of a plastic prefracture zone at the corner point of the interface of two isotropic media is considered. The piece-homogeneous isotropic body with the media-separating boundary in the form of the sides of angle is composed of different elastic parts. These parts are connected by the thin elastoplastic layer. The prefracture zone is modeled by lines of rupture of tangential displacement located on the interface. An exact solution of the corresponding problem of the theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method. The length of the prefracture zone is determined on the base of this solution. The stress near the corner point is investigated.

Key words: plastic prefracture zone, corner point, interface of media, displacement rupture line, Wiener-Hopf method.

REFERENCES

1. **Bakirov, V. F. & Goldshteyn, R. V.** 2004, Model Leonova-Panasyuka-Dagdeyla dlya treschiny na granitse soedineniya materialov [Leonov-Panasyuk-Dugdale model for a crack at the border compound materials], *Prikl. matematika i mehanika*, vol. 68, no. 1, pp. 170–179.
2. **Kaminskiy, A. A., Dudik, M. V. & Kipnis, L. A.** 2014, Vliyanie oblasti destruktzii materiala vblizi vershiny mezhfaznoy treschiny na usloviya ee stragivaniya [The impact area of the degradation of the material near the top of interfacial cracks on the conditions of its breakaway], *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 5, pp. 50–57.
3. **Kaminskiy, A. A., Kipnis, L. A. & Polischuk, T. V.** 2009, O modeli plasticheskoy zonyi predrazrusheniya v uglovoy tochke granitsyi razdela sred [On a model of the plastic zone at the corner predestruction media interface], *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 3, pp. 78–84.
4. **Kaminskiy, A. A., Kipnis, L. A., Hazin, G. A. & Polischuk, T. V.** 2009, Treschina vblizi uglovoy toчки granitsyi razdela sred [A crack near the corner points of the boundary between two mediums], *Teoreticheskaya i prikladnaya mehanika*, no. 46, pp. 57–61.
5. **Kaminskiy, A. A., Usikova, G. I. & Dmitrieva, E. A.** 1994, Eksperimentalnoe issledovanie raspredeleniya plasticheskikh deformatsiy v okrestnosti vershiny treschiny pri staticheskom nagruzhenii [Experimental study of the distribution of plastic deformation in the vicinity of the crack tip under static loading], *Prikladnaya mehanika: mezhdunarodnyiy zhurnal*, vol. 30, no. 11, pp. 69–75.
6. **Nobl, B.** 1962, *Primenenie metoda Vinera-Hopfa dlya resheniya differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Application of the Wiener-Hopf method for solving differential equations in partial derivatives], Moskva: Izd-vo inostr. lit., 279 p.
7. **Uflyand, Ya. S.** 1967, *Integralnyie preobrazovaniya v zadachah teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of the theory of elasticity], Leningrad: Nauka, 402 p.
8. **Kaminskiy, A. A., Dudik, M. V. & Kipnis, L. A.** 2006, On the Direction of Development of a Thin Fracture Process Zone at the Tip of an Interfacial Crack between Dissimilar Media, *Int. Appl. Mech.*, vol. 42, № 2, pp. 136–144.
9. **Kaminskiy, A. A., Dudik, M. V. & Kipnis, L. A.** 2007, On the Initial Kinking of an Interface Crack between Elastic Media, *Int. Appl. Mech.*, vol. 43, № 10, pp. 1090–1099.
10. **Kaminskiy, A. A., Dudik, M. V. & Kipnis, L. A.** 2004, Initial Development of the Prefracture Zone near the Tip of a Crack Reaching the Interface between Dissimilar Media, *Int. Appl. Mech.*, vol. 40, № 2, pp. 176–182.
11. **Kaminskiy, A. A., Kipnis L. A. & Kolmakova, V. A.** 2008, On the Model of Process Zone in an Elastic Body at the Crack Locating on the Non-Smooth Interfacea, *Int. Appl. Mech.*, vol. 44, № 10, pp. 1089–1098.
12. **Loboda, V. V. & Sheveleva, A. E.** 2003, Determining Prefracture Zones at a Crack Tip between Two Elastic Orthotropic Bodies, *Int. Appl. Mech.*, vol. 39, № 5, pp. 566–572.