ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.–2016.–Т.21, вип. 2(28).–С. 19–36

УДК 517.5

М. М. Бокало, О. Я. Сус
Львівський національний університет імені Івана Франка

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

Досліджено мішані задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральними операторами типу Вольтерра. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків таких задач у відповідних узагальнених просторах Соболєва. Також отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

MSC: 33C50, 33C52, 42B15, 42C10.

Ключові слова: інтегро-диференціальне рівняння, параболічне рівняння, змінні показники нелінійності, метод Гальоркіна, метод монотонності .

Вступ. Інтегро-диференціальні рівняння параболічного типу широко використовуються у математичному моделюванні складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці [18–23, 29]. Зокрема такі рівняння зустрічаються в задачах опису еволюції популяцій [20], в теорії ядерних реакцій при вивченні процесу уповільнення нейтронів [29], в дифузії заряджених частинок в плазмі та в інших різноманітних задачах. В даній роботі розглядаються нелінійні параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами типу операторів Вольтерра або, як їх ще називають, операторів пам'яті.

Сформулюємо досліджувану тут задачу. Нехай $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$; Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$; $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 — замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема $\Gamma_0 = \emptyset$ або $\Gamma_0 = \partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$; $T > 0$; $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) +$$
$$+ \int\limits_0^t h(x,t,s,u(x,s))\, ds = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,t) + f_0(x,t)\,, \quad (x,t) \in Q\,, \tag{1}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{2}$$

Надійшла 05.09.2016

і початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Тут $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$, $h : Q \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції, $\frac{\partial u}{\partial \nu_a}(x,t) := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i$, $(x,t) \in \Sigma_1$, – похідна по “конормалі”.

Типовим прикладом рівнянь вигляду (1), які ми вивчатимемо, є рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u +$$
$$+\int\limits_0^t \widehat{h}_0(x,t,s)\widehat{h}_1(u(x,s))\,ds = f(x,t)\,, \quad (x,t) \in Q\,, \tag{4}$$

де $\widehat{a}_i > 0$ $(i=\overline{0,n})$, $p_i > 1$ $(i=\overline{0,n})$, $\widehat{h}_0$ — вимірні обмежені функції, $\widehat{h}_1$ — ліпшицева функція. Відмітимо, що величини p_i $(i=\overline{0,n})$, які називають показниками нелінійності, є змінними.

Нелінійні диференціальні рівняння подібні до (4) з $\widehat{h}_0 \equiv 0$ (зі змінними показниками нелінійності) у наш час вивчаються дуже активно (див. [2–7,9,10,13,17]). Мішані задачі для цих рівнянь описують багато фізичних процесів (див. [13,16]), зокрема електромагнітні поля, електрореологічні рідини, процеси відновлення зображення, потік струму в змінних температурних полях. Розв’язки цих задач належать до відповідних узагальнених просторів Лебега і Соболєва. Вперше ці простори були введені у роботі [15], а їх властивості були вивчені у працях [8,11,14,15] та інших.

Рівняння вигляду (4) зі сталими показниками нелінійності та інтегральними операторами досліджувались у роботах [24, 25, 27, 28] та інших. Зокрема у [28] було досліджено мішану задачу для інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$u_t(t,x) - \triangle u(t,x) + \int\limits_0^t g(t-s,u(s,x))\,ds = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,+\infty)\times\Omega$$

$$u = 0 \quad \text{на } (0,+\infty)\times\partial\Omega, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

У праці [25] вивчається скійкість глобального розв’язку нелокального рівняння Вольтерра

$$u_t - \triangle u = (a - bu)u - \int\limits_0^t K(t-s)u(x,s)\,ds, \;\; x \in \Omega,\, t > 0.$$

В даній роботі, на відміну від відомих нам робіт, ми розглядаємо нелінійні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами, в яких невідома функція входить під знак інтеграла за часовою змінною, тобто, коли значення розв’язку в актуальний момент часу залежить і від значень розв’язку у попередні моменти часу. Основний результат даної роботи стосується однозначної розв'язності задачі (1) – (3) в узагальнених просторах Лебега і Соболєва.

Структура роботи така. У першому розділі введено основні позначення та допоміжні факти. Формулювання задачі і основного результату містить другий розділ. У третьому розділі обґрунтовано основний результат.

Основні результати

1. Основні позначення і факти. Введемо деякі потрібні нам далі позначення і функційні простори. Нехай $G = \Omega$ або $G = Q$. Припустимо, що функція $r \in L_\infty(\Omega)$ така, що $r(x) \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Через $L_{r(\cdot)}(G)$ позначимо лінійний простір, який складається з вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де

$$\rho_{G,r}(v) := \int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\, dx, \text{ якщо } G = \Omega, \text{ і}$$

$$\rho_{G,r}(v) := \iint\limits_Q |v(x,t)|^{r(x)}\, dxdt, \text{ якщо } G = Q.$$

Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\}$ (див.: [11, p. 599]) і його називають *узагальненим простором Лебега*. Зауважимо, що якщо $r(x) = r_0 = \mathrm{const} \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$, то норма $||\cdot||_{L_{r(\cdot)}(G)}$ співпадає зі стандартною нормою $||\cdot||_{L_{r_0}(G)}$ простору Лебега $L_{r_0}(G)$. Згідно з [11, p. 599], якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ можна ототожнити з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де r' визначено рівністю $1/r(x) + 1/r'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Зауважимо, що множина $C(\overline{G})$ є щільною в $L_{r(\cdot)}(G)$ (див.: [11, p. 603]).

Нехай $p = (p_0, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ – вектор-функція, яка задовольняє таку умову:

($\mathcal{P}$) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ є вимірною і $p_i^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x) > 1$, $p_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x) < +\infty$.

Через $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ позначимо узагальнений простір Соболєва, що складається з функцій $v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega)$ таких, що $v_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(\Omega), \ldots, v_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(\Omega)$. Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} := ||v||_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||v_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ – розумітимемо замикання простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$ в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Покладемо $V_p(\Omega) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$. Легко переконатися, що $V_p(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $||v||_{V_p(\Omega)} := ||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} + ||v||_{L_2(\Omega)}$.

Під $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ розумітимемо простір функцій $w \in L_{p_0(\cdot)}(Q)$ таких, що $w_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(Q), \ldots, w_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(Q)$. Розглядатимемо цей простір з нормою $||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} := ||w||_{L_{p_0(\cdot)}(Q)} + \sum_{i=1}^n ||w_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}$. Визначимо простір $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ як замикання простору

$$\widetilde{C}^{1,0}(\overline{Q}) := \left\{w \in C(\overline{Q}) \;\middle|\; w_{x_i} \in C(\overline{Q}) \ (i = \overline{1,n}), \ \ w|_{\Sigma_0} = 0\right\}$$

в $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$. Очевидно, що для будь-якої функції $w \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \bigcap L_2(Q)$ маємо $w(\cdot, t) \in V_p(\Omega)$ для м.в. $t \in (0, T)$.

Покладемо

$$U_p(Q) := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C([0,T]; L_2(\Omega)).$$

Легко переконатися, що це банахів простір з нормою

$$||w||_{U_p(Q)} := ||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} + ||w||_{L_2(Q)} + \max_{t\in[0,T]} ||w(\cdot,t)||_{L_2(\Omega)}\,.$$

Очевидно, що для будь-якої функції $w \in U_p(Q)$ маємо $w(\cdot,t) \in V_p(\Omega)$ для м.в. $t \in [0,T]$.

І нарешті визначимо простори

$$F_{p'}(Q) := \big\{(f_0, f_1, \ldots, f_n) \;\mid\; f_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q) \;\; (i=\overline{0,n}),$$

$$f_i = 0 \quad \text{в деякому околі поверхні} \quad \Sigma_1 \text{ для кожного } i \in \{1,...,n\}\big\},$$

де $1/p_i(x) + 1/p_i'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$ $(i=\overline{0,n})$,

$$C^1_c(0,T) := \{\varphi \in C^1([0,T]) \;\mid\; \operatorname{supp}\varphi \subset (0,T)\}.$$

2. Постановка задачі та формулювання основного результату. Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1) – (3). Для їх означення спочатку введемо відповідні класи вихідних даних.

Нехай p — вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Позначимо через $\mathbb{AH}_p$ множину наборів дійснозначних функцій $(a_0, a_1, \ldots, a_n, h)$, які мають такі властивості:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $Q \times \mathbb{R}^{1+n} \ni (x,t,\rho,\xi) \mapsto a_i(x,t,\rho,\xi) \in \mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $a_i(x,t,0,0) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$ $(i=\overline{0,n})$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leqslant C_1\big(|\rho|^{2/p_i'(x)} + |\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big) + h_i(x,t),$$

де $C_1 = \text{const} > 0$, $h_i \in L_{{p'}_i(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і для всіх (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$
$$+ \big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \geqslant K_1|\rho_1 - \rho_2|^2\,, \qquad (5)$$

де $K_1 = \text{const} > 0$;

($\mathcal{A}_4$) для м.в. $(x,t)\in Q$ і для всіх $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\rho \geqslant K_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^{p_i(x)} + |\rho|^{p_0(x)}\Big) - g(x,t)\,,$$

де $K_2=\mathrm{const}>0$, $g\in L_1(Q)$ (очевидно, що $g\geqslant 0$);

($\mathcal{H}_1$) функція $Q\times(0,T)\times\mathbb{R}\ni(x,t,s,\rho)\mapsto h(x,t,s,\rho)\in\mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$ функція $h(x,t,s,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\rho\in\mathbb{R}$ функція $h(\cdot,\cdot,\cdot,\rho):Q\times(0,T)\to\mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $h(x,t,s,0)=0$ для м.в. $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$;

($\mathcal{H}_2$) для майже всіх $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$ і для будь-яких $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ маємо

$$|h(x,t,s,\rho_1)-h(x,t,s,\rho_2)|\leqslant M|\rho_1-\rho_2|, \tag{6}$$

де $M=\mathrm{const}>0$.

Тепер дамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Означення. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\ldots,a_n,h)\in\mathbb{AH}_p$, $(f_0,f_1,...,f_n)\in F_{p'}(Q)$, $u_0\in L_2(\Omega)$. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) називають функцію $u\in U_p(Q)$, яка задовольняє початкову умову (3) та інтегральну рівність*

$$\iint_Q \Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)v\varphi +$$

$$+v\varphi\int_0^t h(x,t,s,u(x,s))\,ds - uv\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint_Q \Big\{\sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i}\varphi + f_0 v\varphi\Big\}\,dxdt \tag{7}$$

для будь-яких $v\in V_p(\Omega)$ і $\varphi\in C_c^1(0,T)$.

Теорема. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\ldots,a_n,h)\in\mathbb{AH}_p$, $(f_0,f_1,...,f_n)\in F_{p'}(Q)$, $u_0\in L_2(\Omega)$. Припустимо, що*

$$K_1 - MT > 0. \tag{8}$$

Тоді задача (1)–(3) має єдиний узагальнений розв'язок і для нього правильна оцінка

$$\max_{t\in[0,T]}\int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx + \iint_Q \Big\{\sum_{i=1}^{n}\big|u_{x_i}(x,t)\big|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)} + |u(x,t)|^2\Big\}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big[\iint_Q \Big\{\sum_{j=1}^{n}\big|f_j(x,t)\big|^{p_j'(x)} + g(x,t)\Big\}dxdt + \int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx\Big], \tag{9}$$

де $C_2>0$ – стала, яка залежить тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

3. Обґрунтування основного результату. Для будь-якої функції $w\in L_1(Q)$ такої, що $w_{x_1},\dots,w_{x_n}\in L_1(Q)$, введемо позначення

$$\partial_0 w:=w,\ \partial_i w:=w_{x_i}\ (i=\overline{1,n}),$$
$$a_j(w)(x,t):=a_j(x,t,w(x,t),\,\nabla w(x,t)),\quad (x,t)\in Q,\quad j=\overline{0,n},$$
$$h(w)(x,t,s):=h(x,t,s,w(x,s)).$$

При доведенні теореми важливу роль відіграватиме таке твердження (див.:: [26, лема 2])

Лема 1. *Нехай* $w\in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap L_2(Q)$ *та* $g_i\in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ *такі, що правильна інтегральна тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n g_i\partial_i v\varphi - wv\varphi'\Big\}\,dxdt=0,\ \ v\in V_p(\Omega),\ \varphi\in C_c^1(0,T). \tag{10}$$

Тоді $w\in C([0,T];L_2(\Omega))$ *і для всіх* $\theta\in C^1([0,T])$, $v\in V_p(\Omega)$ *і* $t_1,t_2\in[0,T]$ $(t_1<t_2)$ *правильні рівності*

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega w(x,t_2)v(x)\,dx-\theta(t_1)\int\limits_\Omega w(x,t_1)v(x)\,dx+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n g_i\partial_i v\theta - wv\theta'\Big\}\,dxdt=0, \tag{11}$$

$$\frac12\theta(t_2)\int\limits_\Omega |w(x,t_2)|^2\,dx-\frac12\theta(t_1)\int\limits_\Omega |w(x,t_1)|^2\,dx-$$
$$-\frac12\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |w|^2\theta'\,dxdt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n g_i\partial_i w\Big\}\theta\,dxdt=0\,. \tag{12}$$

Доведення теореми. Спочатку доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3). Припустимо протилежне і нехай u_1 та u_2 – різні узагальнені розв'язки даної задачі. Розглянемо різницю між тотожностями, отриманими з (7) при підстановці замість u спочатку u_1, а потім – u_2. Із здобутої тотожності на підставі леми 1 при $w=u_1-u_2$, $\theta\equiv 1$, $t_1=0$, $t_2=T$, матимемо (див. (12)) рівність

$$\frac12\int\limits_\Omega |w(x,T)|^2\,dx+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_1)-a_i(u_2))(\partial_i u_1-\partial_i u_2)+$$
$$+(u_1-u_2)\int\limits_0^t\Big(h(u_1)(x,t,s)-h(u_2)(x,t,s)\Big)ds\Big\}\,dxdt=0. \tag{13}$$

Розглянемо члени лівої частини рівності (13). З умови $(\mathcal{A}_3)$ маємо нерівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2) \Big\} \, dxdt \geqslant K_1 \iint\limits_Q |u_1 - u_2|^2 \, dxdt. \tag{14}$$

На підставі умови $(\mathcal{H}_2)$ (див. (6)) отримаємо

$$|h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)| \leqslant M |u_1(x,s) - u_2(x,s)| \tag{15}$$

для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (0,T)$.

Використавши нерівність Коші—Буняковського та оцінку (15), матимемо

$$\Big| \iint\limits_Q \Big\{ \big(u_1(x,t) - u_2(x,t)\big) \int\limits_0^t \big(h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)\big) ds \Big\} dxdt \Big| \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_0^T |w(x,t)| dt \Big) \Big(\int\limits_0^T |w(x,s)| ds \Big) dx = M \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_0^T |w(x,t)| dt \Big)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant MT \iint\limits_Q |w(x,t)|^2 dxdt \, . \tag{16}$$

На підставі оцінок (14) та (16) з (13) отримаємо

$$\big(K_1 - MT\big) \iint\limits_Q |w(x,t)|^2 \, dxdt \leqslant 0 \, .$$

Звідси, врахувавши нерівність (6), отримаємо рівність $\iint\limits_Q |w(x,t)|^2 \, dxdt = 0$, тобто, рівність $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ для м.в. $(x,t) \in Q$. Це суперечить нашому припущенню, що і доводить єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)−(3).

Тепер доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1)−(3), використавши метод Фаедо—Гальоркіна. Отож, нехай $\{w_j \in V_p(\Omega) \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ — лінійно незалежна сім'я функцій, яка є повною в просторі $V_p(\Omega)$. Очевидно, що ця сім'я функцій є повною і в $L_2(\Omega)$. Покладемо $V_{p,m}(\Omega) = \Big\{ \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k w_k \Big| \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \Big\}$, $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, що замикання простору $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} V_{p,m}(\Omega)$ за нормою $V_p(\Omega)$ співпадає з простором $V_p(\Omega)$.

Оскільки сім'я функцій $\big\{w_j \mid j \in \mathbb{N}\big\}$ є повною в $L_2(\Omega)$, то можна вибрати послідовність функцій $\{u_{0,m}\}_{m=1}^\infty$ таку, що $u_{0,m} \in V_{p,m}(\Omega)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і

$$||u_0 - u_{0,m}||_{L_2(\Omega)} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \, . \tag{17}$$

Тепер перейдемо безпосередньо до використання методу Фаедо—Гальоркіна. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ гальоркінське наближення u_m шукаємо у вигляді

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_{m,k}(t) w_k(x) \, , \quad (x,t) \in \overline{Q} \, ,$$

де $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ – абсолютно неперервні функції, які є розв'язками задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_{\Omega_t} u_{m,t} w_j \, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_m) - f_i)\partial_i w_j + \tag{18}$$

$$+ w_j \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dx = 0\,, \quad j = \overline{1,m}\,,\, t \in\, [0,T]\,,$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0,m}\,, \tag{19}$$

де $\Omega_t := \{(x,t) |\, x \in \Omega\}$, $t \in\, [0,T]$.

Доведемо існування та єдиність розв'язку задачі (18), (19). Оскільки функції $w_1, \ldots, w_m$ — лінійно незалежні, то матриця $\Big(a^m_{k,j} := \int\limits_\Omega w_k w_j \, dx\Big)^m_{k,j=1}$ — додатно визначена. Отже систему звичайних диференціальних рівнянь (18) можна записати в нормальній формі. За теоремою Каратеодорі (див.: [1]) отримаємо існування та єдиність глобального розв'язку $c_{1,m}, \ldots., c_{m,m}$ задачі (18), (19). Цей розв'язок визначений на проміжку $[0, T_m\rangle$, де $T_m \leqslant T$. Тут кутова дужка "$\rangle$" означає або круглу ")", або квадратну "]" дужку. Далі ми отримаємо оцінки, з яких, зокрема, випливатиме, що $[0,T_m\rangle = [0,T]$.

Для кожного $j \in \{1, ..., m\}$ і майже кожного $t \in (0,T)$ домножимо рівність з номером j системи (18) на $c_{m,j}(t)$ і підсумуємо отримані рівності. У результаті для м.в. $t \in (0,T)$ здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_t} u_{m,t} u_m \, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_m) - f_i)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dx = 0. \tag{20}$$

Проінтегруємо рівність (20) за t від 0 до $\tau \in (0, T_m\rangle$, використавши формулу інтегрування частинами. У результаті отримаємо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_m(x,\tau)|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2 \, dx +$$

$$+ [\delta + (1-\delta)] \int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i(u_m)\partial_i u_m \Big\}\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega \Big\{ u_m \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dxdt = \int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i \partial_i u_m \Big\}\, dxdt, \tag{21}$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне число.

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (21). На підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_3)$ маємо таку оцінку

$$\int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i(u_m)\partial_i u_m \Big\}\, dxdt \geqslant K_1 \int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2 \, dxdt, \tag{22}$$

а з умови $(\mathcal{A}_4)$ здобуваємо

$$\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m \Big\}\, dxdt \geqslant K_2 \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} \Big\}\, dxdt - \int_0^\tau\int_\Omega g(x,t)\, dxdt. \tag{23}$$

З умов $(\mathcal{H}_1)$ і $(\mathcal{H}_2)$ легко випливає нерівність

$$|h(u_m)(x,t,s)| \leqslant M|u_m(x,s)| \tag{24}$$

для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (0,T)$.

Врахувавши оцінку (24) та використавши нерівність Коші—Буняковського, матимемо

$$\Big|\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{u_m(x,t)\int_0^t h(u_m)(x,t,s)ds\Big\}dxdt\Big| \leqslant \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{|u_m(x,t)|\cdot\int_0^t |h(u_m)(x,t,s)|ds\Big\}dxdt \leqslant$$
$$\leqslant M\int_\Omega \Big\{\Big(\int_0^\tau |u_m(x,t)|dt\Big)\Big(\int_0^\tau |u_m(x,s)|ds\Big)\Big\}dx \leqslant MT\int_0^\tau\int_\Omega |u_m(x,t)|^2 dxdt\,. \tag{25}$$

Далі використовуватимемо нерівність Юнга:

$$ab \leqslant \varepsilon|a|^q + \varepsilon^{-\frac{1}{q-1}}|b|^{q'}, \quad a,b\in\mathbb{R},\ q>1,\ \varepsilon>0, \tag{26}$$

де $q' = q/(q-1)$.

Виберемо довільним чином значення $\varepsilon \in (0,1)$. Використовуючи нерівність (26), отримаємо

$$\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i(x,t)\partial_i u_m(x,t) \Big\}\, dxdt \leq$$
$$\leqslant \varepsilon \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} \Big\}\, dxdt +$$
$$+ \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- - 1}} |f_i(x,t)|^{p_i'(x)} \Big\}\, dxdt. \tag{27}$$

З (21) на підставі (22), (23), (25) та (27) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\tau)|^2\,dx+\delta K_1\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt+$$
$$+(1-\delta)K_2\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt\leqslant MT\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2dxdt+$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\Big\}+$$
$$+(1-\delta)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}g(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x)|^2\,dx, \tag{28}$$

де $\tau\in(0,T_m\rangle$.

З (28) безпосередньо отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\tau)|^2\,dx+(\delta K_1-MT)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt+$$
$$+[(1-\delta)K_2-\varepsilon]\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}\,dxdt+$$
$$+(1-\delta)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}g(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x)|^2\,dx,\quad\tau\in(0,T_m\rangle. \tag{29}$$

Виберемо і зафіксуємо значення $\delta\in(0,1)$ таке, що $\delta K_1-MT>0$ (це можна зробити на підставі (8)), а потім – значення $\varepsilon\in(0,1)$ таке, що $(1-\delta)K_2-\varepsilon>0$ і підставимо їх в (29). У результаті здобудемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\tau)|^2\,dx+C_3\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt+C_4\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_5\Big[\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}+g(x,t)\Big\}\,dxdt+\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big], \tag{30}$$

де $\tau\in(0,T_m\rangle$ – довільне, а C_3,C_4,C_5 – додатні сталі, яка залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- ($i=\overline{0,n}$) (але не залежать від m).

З (17) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x)|^2\,dx\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{\Omega}|u_0(x)|^2\,dx. \tag{31}$$

Отже, послідовність $\Big\{\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою, а тому на підставі нерівності (30) можна зробити висновок, що існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функцію $t\mapsto\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dx$ на $[0,T_m\rangle$, а отже існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функції $c_{m,1},\dots,c_{m,m}$ на $[0,T_m\rangle$. Звідси випливає, що $[0,T_m\rangle=[0,T]$. Враховуючи це, з (30) отримаємо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}+|u_m(x,t)|^2\Big\}\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_6\Big[\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}+g(x,t)\Big\}\,dxdt+\int\limits_\Omega|u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big]\,, \qquad (32)$$

де $C_6>0$ – стала, яка залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

На підставі (31) і (32) здобуваємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_\Omega|u_m(x,t)|^2\,dx\leqslant C_7\,, \qquad (33)$$

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}+|u_m(x,t)|^2\Big\}\,dxdt\leqslant C_7\,, \qquad (34)$$

де $C_7>0$ – стала, що не залежить від m.

З умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, нерівності (24) та оцінки (34) і (34) отримаємо

$$\iint\limits_Q|a_i(u_m)(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\leqslant C_8\,,\quad i=\overline{0,n}\,, \qquad (35)$$

$$\iint\limits_Q\Big|\int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\,ds\Big|^2\,dxdt\leqslant C_9, \qquad (36)$$

де C_8 та C_9 — додатні сталі, що не залежать від m.

Оскільки простори $L_2(Q)$, $L_{p_i(\cdot)}(Q)$, $L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ рефлексивні (див.: [11, ст. 600]), то з оцінок (33)–(36) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}$ (позначатимемо її так само, як і саму послідовність) та функцій $u_*\in L_2(\Omega)$, $u\in\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap L_2(Q)$, $\chi_i\in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ і $\zeta\in L_2(Q)$ таких, що

$$u_m(\cdot,T)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u_*(\cdot)\quad\text{слабко в}\quad L_2(\Omega), \qquad (37)$$

$$u_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u\quad\text{слабко в}\quad L_2(Q)\quad\text{і слабко в}\quad\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q), \qquad (38)$$

$$a_i(u_m)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\chi_i\ \ \text{слабко в}\ \ L_{p_i'(\cdot)}(Q)\quad(i=\overline{0,n}), \qquad (39)$$

$$\int\limits_0^t h(u_m)\,ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q). \tag{40}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Виберемо довільним чином і зафіксуємо числа $j,m\in\mathbb{N}$ такі, що $m\geqslant j$. Рівність системи (18) під номером j помножимо на довільну функцію $\theta\in C^1([0,T])$ і проінтегруємо здобуту рівність по $t\in[0,T]$. У результаті після нескладних перетворень, використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\theta(T)\int\limits_\Omega u_m(x,T)w_j(x)\,dx-\theta(0)\int\limits_\Omega u_{0,m}(x)w_j(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_Q u_m w_j\theta'\,dxdt+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n(a_i(u_m)-f_i)\partial_i w_j+w_j\int\limits_0^t h(u_m)\,ds\Big\}\theta\,dxdt=0\,. \tag{41}$$

Спрямувавши m до ∞ в (41) і взявши до уваги (17), (37), (38), (39) та (40), отримаємо

$$\theta(T)\int\limits_Q u_*(x)w_j(x)\,dx-\theta(0)\int\limits_Q u_0(x)w_j(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_Q uw_j\theta'\,dxdt+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n(\chi_i-f_i)\partial_i w_j+\zeta w_j\Big\}\theta\,dxdt=0\,. \tag{42}$$

Оскільки j – довільне число, а система функцій $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ повна в просторі $V_p(\Omega)$, то з (42) маємо, що для всіх $v\in V_p(\Omega)$ і $\theta\in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int\limits_\Omega u_*(x)v(x)\,dx-\theta(0)\int\limits_\Omega u_0(x)v(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_Q uv\theta'\,dxdt+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n(\chi_i-f_i)\partial_i v+\zeta v\Big\}\theta\,dxdt=0\,. \tag{43}$$

Зауважимо, що оскільки $C_c^1(0,T)\subset C^1([0,T])$, то з (43) отримаємо тотожність

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n(\chi_i-f_i)\partial_i v\varphi+\zeta v\varphi-uv\varphi'\Big\}dxdt=0,\quad v\in V_p(\Omega),\varphi\in C_c^1(0,T). \tag{44}$$

На підставі леми 1 з (44) маємо, що

$$u\in C([0,T];L_2(\Omega)) \tag{45}$$

і для всіх $v\in V_p(\Omega)$, $\theta\in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int\limits_\Omega u(x,T)v(x)\,dx-\theta(0)\int\limits_\Omega u(x,0)v(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_Q uv\theta'\,dxdt+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n(\chi_i-f_i)\partial_i v+\zeta v\Big\}\theta\,dxdt=0\,. \tag{46}$$

Порівнюючи (43) і (46), отримаємо рівності

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{для м. в.} \quad x\in\Omega\,, \quad u(x,T)=u_*(x) \quad \text{для м. в.} \quad x\in\Omega. \tag{47}$$

Отож, ми встановили, що функція u належить простору $U_p(Q)$ (див. (38) і (45)), задовольняє початкову умову (3) (див. першу з рівностей (47)) та інтегральну тотожність (44). З тотожності (44) випливає тотожність (7), якщо для будь-яких $v\in V_p(\Omega)$ і майже всіх $t\in(0,T)$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\chi_i\partial_i v+\zeta v\Big\}\,dx=\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}a_i(u)\partial_i v+\Big(\int\limits_0^t h(u)\,ds\Big)v\Big\}\,dx\,. \tag{48}$$

Отож, якщо тотожність (48) правильна, то u – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).

Для доведення тотожності (48) використаємо метод монотонності (див.: [12]). Нехай w – довільна функція з простору $\in\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap L_2(Q)$. Для кожного $m\in\mathbb{N}$ визначимо

$$\begin{aligned}W_m:=\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m)-a_i(w))(\partial_i u_m-\partial_i w)+\\ +(u_m-w)\Big(\int\limits_0^t h(u_m)\,ds-\int\limits_0^t h(w)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt.\end{aligned} \tag{49}$$

Використавши умову $(\mathcal{A}_3)$, для довільного $m\in\mathbb{N}$ отримаємо таку оцінку

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m)-a_i(w))(\partial_i u_m-\partial_i w)\Big\}\,dxdt\geqslant K_1\iint\limits_Q|u_m-w|^2\,dxdt. \tag{50}$$

Провівши міркування, аналогічні до тих, які привели нас до (16), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}\Big|\iint\limits_Q\Big\{(u_m(x,t)-w(x,t))\Big(\int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\,ds-\int\limits_0^t h(w)(x,t,s)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt\Big|\leqslant\\ \leqslant MT\iint\limits_Q|u_m-w|^2\,dxdt,\quad m\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{51}$$

Отже, врахувавши (8), здобудемо

$$W_m\geq\big(K_1-MT\big)\iint\limits_Q|u_m-w|^2\,dxdt\geqslant 0,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{52}$$

Запишемо (49) у вигляді

$$W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)\,ds \Big\}\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$

$$+ w \int\limits_0^t h(u_m)\,ds + (u_m - w)\int\limits_0^t h(w)\,ds \Big\}\, dxdt, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{53}$$

Візьмемо $\tau = T$ в (21). Отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)ds \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\}\, dxdt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_m(x,T)|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2\, dx, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{54}$$

З (53) на підставі (54) отримаємо

$$0 \leqslant W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\}\, dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_m(x,T)|^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2\, dx - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$

$$+ w \int\limits_0^t h(u_m)\, ds + (u_m - w)\int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\}\, dxdt, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{55}$$

На підставі (37) та другої з рівностей (47) маємо

$$\liminf_{m\to\infty} ||u_m(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)} \geqslant ||u(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)}\,. \tag{56}$$

Зважаючи на (17), (38) – (40), (56), з (55) здобуваємо

$$0 \leqslant \limsup_{m\to\infty} W_m \leqslant \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u(x,T)|^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\, dx - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[\chi_i \partial_i w + a_i(w)(\partial_i u - \partial_i w)\big] +$$

$$+ w\zeta + (u - w)\int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\} dxdt\,. \tag{57}$$

Із (44), використовуючи лему 1 при $\theta \equiv 1$ і першу з рівностей (47), отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \chi_i \partial_i u + \zeta u \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u(x,T)|^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\, dx\,. \qquad (58)$$

Отже, з (57) і (58) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(w))(\partial_i u - \partial_i w) + \Big(\zeta - \int\limits_0^t h(w)\, ds\Big)(u-w)\Big\} dxdt \geqslant 0\,. \qquad (59)$$

Приймемо $w = u - \lambda v\varphi$ в (59), де $v \in V_p(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\lambda > 0$ – довільні, і поділимо отриману нерівність на λ. У результаті матимемо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(u-\lambda v\varphi))\partial_i v\varphi + \big(\zeta - \int\limits_0^t h(u-\lambda v\varphi)\, ds\big) v\varphi \Big\}\, dxdt \geqslant 0\,. \qquad (60)$$

Перейдемо в (60) до границі при $\lambda \to 0+$, використавши умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ і теорему Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла (див.: [30, ст. 648]). У результаті отримаємо рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(u))\partial_i v + \big(\zeta - \int\limits_0^t h(u)\, ds\big) v \Big\} \varphi\, dxdt = 0$$

для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$. Звідси легко випливає тотожність (48).

Покажемо, що виконується оцінка (9). На підставі леми 1 з інтегральної тотожності (7), враховуючи (3), отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u(x,\tau)|^2\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\, dx + \\ + [\delta + (1-\delta)] \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u) \partial_i u \Big\}\, dxdt + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ u \int\limits_0^t h(u)\, ds \Big\}\, dxdt = \\ = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt, \quad \tau \in [0,T]. \qquad (61)$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне число. Далі, міркуючи цілком аналогічно, як при переході від (21) до (32), здобудемо (9). Теорема повністю доведена.

Висновки. В даній роботі досліджено мішані задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами типу Вольтерра. Наскільки нам відомо, раніше такі задачі не розглядалися. Тут доведено однозначну розв'язність таких задач в узагальнених просторах Лебега і Соболєва. При доведенні існування узагальнених розв'язків досліджуваних задач використано методи Гальоркіна і монотонності. Також отримано відповідні оцінки узагальнених розв'язків задач, які тут розглянуті.

Бокало М. М., Сус О. Я.
Смешанные задачи для нелинейных параболических уравнений с переменными показателями нелинейности и интегральными операторами типа Вольтерра

Резюме

Исследованы смешанные задачи для нелинейных параболических уравнений с переменными показателями нелинейности и интегральными операторами типа Вольтерра. Доказано существование и единственность обобщенных решений таких задач в соответствующих обобщенных пространствах Соболева. Также установлены оценки обобщенных решений рассматриваемых задач.
Ключевые слова: интегро-диференциальное уравнение, параболические уравнения, переменные показатели нелинейности, метод Галеркина, метод монотонности.

Bokalo M. M., Sus O. Y.
Initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with the variable exponents of nonlinearity and integral operators type Volterra

Summary

Initial-boundary value problems for nonlinear Volterra integro-differential equations with the variable exponents of nonlinearity are investigated. Weak solutions which belong to the generalized Sobolev and Lebesgue spaces are considered. Under certain conditions on data-in the uniqueness and existence of the solutions are proved. Also estimates of the solutions are obtained.
Key words: integro-differential equation, parabolic equation, variable exponents of nonlinearity, Galerkin's method, monotone method.

References

1. Alexiewicz, A. and Orlicz, W. (1955) 'On a theorem of C. Caratheodory', *Annales Polonici Mathematici*, 1, pp. 414–417.
2. Alkhutov, Y., Antontsev, S. and Zhikov, V. (2009) 'Parabolic equations with variable order of nonlinearity', *Collection of works of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 6, pp. 23–50.
3. Antontsev, S. and Shmarev, S. (2008) 'Extinction of solutions of parabolic equations with variable anisotropic nonlinearities', *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 261, pp. 11–21.
4. Bokalo, M. and Domanska, O. (2007) 'On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces', *Matematychni Studii*, 28(1), pp. 77–91.

5. Bokalo, M. and Pauchok, I. (2006) 'On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity', *Matematychni Studii*, 24(1), pp. 25–48.
6. Buhrii, O. and Lavrenyuk, S. (2001) 'On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration', *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(7), pp. 1027–1042.
7. Buhrii, O. and Mashiyev, R. (2009) 'Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity', *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 70(6), pp. 2335–2331.
8. Fan, X. and Zhao, D. (2001) 'On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263, pp. 424–446.
9. Fu, Y. and Pan, N. (2010) 'Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 362, pp. 313–326.
10. Kováčik, O. (1995) 'Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$', *Fasciculi Mathematici*, 25, pp. 87–94.
11. Kováčik, O. and Rákosnı́c, J. (1991) 'On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$', *Czechoslovak Mathematical Journal*, 41(116), pp. 592–618.
12. Lions, J. (1969) 'Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires', *Dunod Gauthier-Villars*, Paris.
13. Mashiyev, R. and Buhrii, O. (2011) 'Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377, pp. 450–463.
14. Musielak, J. (1983) 'Orlicz spaces and modular spaces', *Lecture Notes in Mathematics*, (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg).
15. Orlicz, W. (1931) 'Uber konjugierte Exponentenfolgen', *Studia Mathematica (Lwow)*, 3, pp. 200–211.
16. Růžička, M. (2000) 'Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory', *Lecture Notes in Mathematics*, 1748, (Springer-Verlag, Berlin).
17. Zhikov, V. and Pastukhova, S. (2010) 'Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations', *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 270, pp. 104–131.
18. Abbasbandy and Ghehsareh, H. (2010) 'The He's Variational Iteration Method for Solving the Integro-differential Parabolic Problem with Integral Conditions', *Department of Mathematics Imam Khomeini International University Ghazvin.An International Journal(AAM) Special Issue*, 1, pp. 12—23.
19. Colombo, F. (2001) 'Direct and Inverse Problems for a Phase-Field Model with Memory', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 260, pp. 517—545.
20. I. Kozhanov, A. (1994) 'Parabolic equations with nonlocal nonlinear source', *Siberian Mathematical Journal*, 35(5).
21. Kumar, K., Kumar, R. and Shukla, R. (2012) 'Nonlocal Parabolic Integro-differential Equations with Delays', *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1(4), pp. 549–564.
22. Loayza, M. (2013) 'Asymptotic behavior of solutions to parabolic problems with nonlinear nonlocal terms', *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013(228), pp. 1–12.
23. Souplet, P. (1999) 'Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source', *Journal of differential equations*, 153, pp. 374–406.

24. Yamada, Y. (1984) 'Asymptotic stability for some system of semilinear Volterra diffusion equations', *Journal Differential Equations*, 52, pp. 295–326.
25. Yamada, Y. (1982) 'On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations', *J. Math. Anal. Appl.*, 88, pp. 443–457.
26. Bokalo, M., Buhrii, O. and Mashiyev, R. (2014) 'Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity', *J. Nonlinear Evolution Equations and Appl.*, 2013(6), pp. 67–87.
27. Engler, H. (1983) 'On some parabolic integro-differential equations: existence and asymptotics of solutions', *Lecture Notes in Math.*, 1017, pp. 161–167.
28. Heard, M. and Rankin, S. (1988) 'A semilinear parabolic Volterra integro-differential equation', *J. Differential Equations*, 71(2), pp. 201–233.
29. Liut, D. and Mu, C. (2010) 'Blow-up analysis for a semilinear perabolic equation with nonlinear memory and nonlocal nonlinear boundary condition', *Electronic Jornal of Qualitative Theory of Differentuial Equations*, 51, pp. 1–17.
30. Evans, L.C. (1998) 'Partial Differential Equations', *Graduate studies in mathematics*, American Mathematical Society, Volume 19, 662 p.